Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЛАМИНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В НЕОДНОРОДНЫХ ИСКРИВЛЕННЫХ СЛОЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

О. В. Голубева
(Москва)

Настоящая статья посвящена рассмотрению работы галерей и скважин, расположенных в неоднородных искривленных водоносных слоях переменной толщины.

§ 1. Уравнения задачи. Рассмотрим установившуюся фильтрацию несжимаемой жидкости. Примем, что течение жидкости ламинарное, — справедлив экспериментальный закон Дарси. Далее уравнения движения вязкой жидкости Навье-Стокса заменим при помощи введения фиктивных массовых сил Жуковского уравнениями Эйлера и пренебрежем инерционными членами [1]. Полагая, что движение происходит под действием сил тяжести, приближенные уравнения ламинарной фильтрации жидкости можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{v} = -k \operatorname{grad} \varphi^*, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad \left(\varphi^* = \frac{P + \rho g h}{\mu}\right) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости фильтрации, $\mu = \mathrm{const}$ — динамическая вязкость жидкости, k — проницаемость пористой среды, ρ — плотность жидкости, P — гидродинамическое давление в жидкости, g — ускорение силы тяжести, h — высота частицы над некоторой горизонтальной поверхностью.

Уравнения (1.1) применим к изучению движения жидкости в недеформируемом слое переменной толщины, ограниченном непроницаемыми стенками. Будем предполагать, что толщина пласта мала по сравнению с линейными размерами пласта; тогда изменениями скорости жидкости в поперечных направлениях к слою можно пренебречь. При сделанных предположениях задача будет двухмерной и сводится к изучению движения жидкости в слое переменной толщины.

Примем нижнюю поверхность слоя за основную и выберем на ней ортогональную криволинейную координатную сеть p, q. Квадрат элемента дуги поверхности в этом случае запишем в виде

$$dS^2 = E dp^2 + G dq^2 \tag{1.2}$$

Обозначим через v_p и v_q составляющие вектора скорости вдоль касательных к координатным линиям поверхности; тогда в силу равенств (1.1) и (1.2) получим

$$v_p = \frac{k}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi^*}{\partial p}, \qquad v_q = \frac{k}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi^*}{\partial q} \tag{1.3}$$

Пусть $\sqrt{H}$ — безразмерная толщина слоя на поверхности; тогда уравнение неразрывности (1.1), выраженное через v_p и v_q, запишем в виде [2]

$$\frac{\partial}{\partial p} [\sqrt{H} \sqrt{G}\, v_p] + \frac{\partial}{\partial q} [\sqrt{H} \sqrt{E}\, v_q] = 0 \tag{1.4}$$

Подставляя сюда v_p и v_q согласно (1.3), получим уравнение ламинарной фильтрации жидкости в слое малой толщины и переменной проницаемости, расположенном на криволинейной поверхности вида

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\sqrt{H}\sqrt{G}k}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi^*}{\partial p}\right] + \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\sqrt{H}\sqrt{E}k}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi^*}{\partial q}\right] = 0 \tag{1.5}$$

Последнее уравнение удовлетворяется тождественно, если величины, стоящие в скобках, будут соответственно равны $\partial\psi / \partial q$ и $\partial\psi / \partial p$. Можно показать, что введенная таким образом функция ψ является функцией тока. Пользуясь введенной функцией тока, равенства (1.3) представим в виде

$$v_p = \frac{k}{\sqrt{E}} \frac{\partial \varphi^*}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{H}\sqrt{G}} \frac{\partial \psi}{\partial q}, \qquad v_q = \frac{k}{\sqrt{G}} \frac{\partial \varphi^*}{\partial q} = -\frac{1}{\sqrt{H}\sqrt{E}} \frac{\partial \psi}{\partial p} \tag{1.6}$$

Если проницаемость пористой среды k есть величина постоянная, то ее можно внести в последних выражениях под знак производных, при этом $k\varphi^* = \varphi$ есть потенциал скорости. Если, кроме того, $\sqrt{H} = 1$, т. е. слой, в котором происходит фильтрация, постоянной толщины, то равенства (1.6) будут условиями конформного преобразования криволинейной поверхности pq на плоскости $\varphi\psi$. Уравнения (1.4) и (1.5) приобретают наиболее простой вид, если на поверхности выбрать изотермическую координатную сеть. Применение последней к задачам о фильтрации жидкости было разобрано ранее [2].

§ 2. Фильтрация жидкости вдоль координатных линий. Рассмотрим течение вдоль координатных линий $p = \text{const}$; в этом случае составляющая $v_p = 0$ (причем из (1.3) следует, что φ^* есть функция только q) и уравнение (1.5) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\sqrt{E}\sqrt{H}k}{\sqrt{G}} \frac{d\varphi^*}{dq}\right) = 0 \tag{2.1}$$

Отсюда можно заключить, что необходимым условием возможности фильтрации жидкости вдоль выбранного семейства координатных линий будет

$$\frac{\sqrt{E}\sqrt{H}k}{\sqrt{G}} = A(p)\, B(q) \tag{2.2}$$

где A и B — некоторые функции соответственно p и q.

Из равенства (2.1) определим φ^* в виде

$$\varphi^* = C_1 \int \frac{dp}{B(q)} + C_2 \tag{2.3}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Остановимся теперь на следующей задаче. Пусть вдоль координатной линии $q = q_1$ ортогонально к основной поверхности расположена галерея, пересекающая слой. Пусть известно значение функции φ^* на границе галереи и границе области питания галереи, которая расположена по координатной линии $q = q_0$.

Требуется определить количество жидкости Q, протекающее через отрезок галереи, ограниченной координатными линиями $p = p_1$ и $p = p_2$.

Эта задача легко разрешается при помощи соотношений (1.6) и (2.3) и искомое Q определяется формулой

$$Q = (\varphi_1^* - \varphi_0^*)\, r \left\{\int_{p_1}^{p_2} A(p)\, dp\right\} : \left\{\int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{B(q)}\right\} \tag{2.4}$$

Величина $r\sqrt{H}$ представляет собой толщину слоя h.

Заменим интегралы, входящие в последнюю формулу, через их средние значения; запишем

$$\int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{B(q)} = \frac{(q_1 - q_0)}{B^\circ}, \qquad \int_{p_1}^{p_2} A(p)\, dp = A^\circ (p_2 - p_1)$$

Откуда

$$Q = \frac{(\varphi_1^* - \varphi_0^*)}{(q_1 - q_0)} A^\circ B^\circ (p_2 - p_1) \tag{2.5}$$

Пользуясь формулой (2.2), имеем

$$Q = \frac{k^\circ (\varphi_1{}^* - \varphi_0{}^*)}{S_q} h^\circ S_p$$

Здесь величины

$$S_p = \sqrt{E^\circ} (p_2 - p_1), \qquad S_q = \sqrt{G^\circ} (q_1 - q_0)$$

представляют собой средние значения координатных дуг $p = \mathrm{const}$ и $q = \mathrm{const}$, h° — средняя толщина слоя и k° — средняя проницаемость слоя. Формула (2.5) позволяет уяснить смысл формулы (2.4), но она не может служить для каких-либо расчетов, так как средние величины, входящие в формулу (2.5), можно найти, только вычислив интегралы, входящие в формулу (2.4).

Если поставить условие, что, кроме течения вдоль координатных линий $p = \mathrm{const}$, скорость течения не зависит от координаты p, то на величины $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$, $\sqrt{H}$ и k будут наложены условия вида

$$\frac{k}{\sqrt{G}} = C(q), \qquad \sqrt{E}\sqrt{H} = A_1(p) B_1(q) \tag{2.6}$$

где C, A_1, B_1 будут некоторыми функциями соответствующих переменных.

Для определения дебита галереи в этом случае можно получить формулу, аналогичную (2.4).

Заметим, что формула (2.4) будет формулой весьма общего вида, ибо если координатные линии $q = \mathrm{const}$, вдоль одной из которых расположена галерея, будут замкнуты, то, располагая галерею вдоль всей кривой $q = q_1$, по формуле (2.4) получим дебит скважины, для которой известна функция φ^* на границе скважины и на замкнутой границе области питания.

§ 3. Примеры. Рассмотрим различные случаи приложения формулы (2.4).

1°. Пусть слой постоянной толщины и проницаемости, расположенный на плоскости p, q, имеет прямолинейную галерею, расположенную вдоль оси p; тогда $\sqrt{H} = 1$, $k\varphi^* = \varphi$ и $\sqrt{E} = \sqrt{G} = 1$ и по формуле (2.2) $A = B = 1$. Дебит отрезка галереи будет

$$Q = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{q_1 - q_0} r (p_2 - p_1) \tag{3.1}$$

где p_2, p_1 — отрезок галереи и r — толщина галереи. Если отнести полученный дебит галереи к единице площади галереи, то получим известную формулу дебита единицы площади галереи [3].

2°. Применим теперь формулу (2.4) для случая слоя постоянной толщины r, расположенного по произвольной цилиндрической поверхности, определяемой уравнением

$$P = f(q)\,\mathbf{i} + g(q)\,\mathbf{j} + p\mathbf{k}$$

Пусть течение идет вдоль координатных линий $p = \mathrm{const}$ и требуется определить дебит отрезка галереи, расположенной по координатной кривой $q = q_1$ и ограниченной координатными линиями $p = p_1$, $p = p_2$. В рассматриваемом случае

$$E = 1, \qquad \sqrt{G} = \sqrt{f'^2(q) + g'^2(q)}$$

Следовательно, по формуле (2.4) дебит отрезка галереи равен

$$Q = (\varphi_1 - \varphi_0)\, r\, (p_2 - p_1) : \left(\int_{q_0}^{q_1} \sqrt{f'^2 + g'^2}\, dq\right) \tag{3.2}$$

Интеграл, входящий в последнюю формулу, представляет собой длину дуги координатной линии $p = \mathrm{const}$ на интервале от q_0 до q_1.

Следовательно, последнюю формулу запишем в виде

$$Q = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{S_q} r (p_2 - p_1) \tag{3.3}$$

Сравнивая формулы (3.1) и (3.3), приходим к выводу, что если водоносный слой постоянной толщины на интервале между границами галереи и области питания образует складки, параллельные этим границам, то дебит галереи будет тем меньше, чем больше будет длина дуги S_q по сравнению с кратчайшим расстоянием между галлереей и областью питания.

3°. Рассмотрим теперь на плоскости, по которой расположен слой постоянной толщины и проницаемости, полярную координатную сеть R и θ, тогда

$$\sqrt{E} = R, \qquad \sqrt{G} = 1$$

Расположим галерею вдоль замкнутой координатной линии $R = F_1$; пользуясь формулами (2.2) и (2.4), получим известную формулу Дюпюи, определяющую дебит круглой скважины с концентрической к скважине областью питания [3]:

$$Q = \frac{2\pi (\varphi_1 - \varphi_0)}{\ln R_1 - \ln R_0} r \tag{3.4}$$

4°. Применим теперь формулу (2.4) для определения дебита галереи, расположенной по координатной прямой p в слое переменной толщины и постоянной проницаемости, подошвой которого является плоскость pq. Пусть $\sqrt{H}$—функция только q; так как $\sqrt{E} = \sqrt{G} = 1$, то дебит галереи будет

$$Q = (\varphi_1 - \varphi_0) r (p_2 - p_0) : \left(\int\limits_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{H}} \right) \tag{3.5}$$

Заменим интеграл, входящий в последнюю формулу, через его среднее значение; получаем

$$Q = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{q_1 - q_0} \sqrt{H}^\circ r (p_2 - p_1) \tag{3.6}$$

Из последней формулы следует, что если среднее значение на интервале (q_1, q_0) будет больше его значения на границе галереи, то дебит галереи будет больше, чем дебит галереи, расположенной в слое постоянной толщины, равной толщине его на границе галереи.

В частности, если толщина слоя на границе галереи будет равна толщине слоя на границе области питания, но в этом интервале слой имеет выпуклую форму, то дебит галереи будет больше, чем дебит галереи слоя постоянной толщины, равной толщине его на границе галереи и области питания.

Эти качественно очевидные результаты могут быть количественно подсчитаны для заданного закона изменения $\sqrt{H}$ по формуле (3.5).

Рассмотрим теперь пример применения формулы (3.5), когда результат не является очевидным. Пусть безразмерный закон изменения толщины слоя, расположенного на плоскости pq, будет

$$\sqrt{H} = 1 + m \sin nq$$

где m, n — безразмерные коэффициенты.

Пусть область питания галереи расположена вдоль координатной оси p $(q = 0)$ и галерея расположена по прямой $q_1 = 2\pi / n$; тогда дебит галереи при рассматриваемых граничных условиях определится по формуле

$$Q = (\varphi_1 - \varphi_0) r (p_2 - p_1) : \left(\int\limits_{0}^{2\pi / n} \frac{dq}{1 + m \sin nq} \right)$$

или, подставляя значение определенного интеграла, получим

$$Q = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\pi / n} \sqrt{1 - m^2}\, r\,(p_2 - p_1)$$

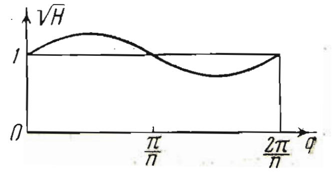
Но

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2\pi / n}\, r\,(p_2 - p_1) = Q^*$$

представляет собой дебит галереи, расположенной в слое постоянной толщины r.

Отсюда

$$\frac{Q}{Q^*} = \sqrt{1 - m^2}$$



Фиг. 1

где $m < 1$. Следовательно, дебит слоя переменной толщины (фиг. 1) будет меньше слоя дебита постоянной толщины, которая является средней арифметической слоя переменной толщины.

5°. Рассмотрим теперь скважину, расположенную в вершине куполообразной поверхности, которая определяется уравнением

$$\boldsymbol{\rho} = f(q)\,\{\cos p\mathbf{i} + \sin p\mathbf{j}\} + g(q)\,\mathbf{k}$$

Пусть далее закон изменения толщины слоя $\sqrt{H}$ и проницаемость k определены формулой

$$\sqrt{H}k = A_2(p)\,B_2(q)$$

где A_2 и B_2 — некоторые функции соответствующих переменных.

В этом случае дебит круглой скважины с концентрической к ней границей области питания определится по формуле

$$Q = (\varphi_1{}^* - \varphi_0{}^*)\, r \int\limits_0^{2\pi} A_2 dp : \left(\int\limits_{q_0}^{q_1} \frac{\sqrt{f'^2 + g'^2}}{f}\, B_2 dq \right) \tag{3.7}$$

В частном случае, когда слой расположен на плоскости с полярной координатной сетью R, θ и

$$\sqrt{H}k = A_2(\theta)\,B_2(R)$$

последняя формула приобретает вид:

$$Q = (\varphi_1{}^* - \varphi)\, r \int\limits_0^{2\pi} A_2 d\theta : \left(\int\limits_{R_0}^{R_1} \frac{R_2\, dR}{R} \right) \tag{3.8}$$

Далее, если толщина слоя постоянна так же, как и проницаемость, то дебит круглой скважины, расположенной в вершине куполообразной поверхности, по формуле (3.7) запишется в виде

$$Q = 2\pi\,(\varphi_1 - \varphi_0) : \left(\int\limits_{q_0}^{q_1} \frac{\sqrt{f'^2 + g'^2}}{f}\, dq \right) \tag{3.9}$$

Заметим, что формула (2.4) может быть использована в некоторых случаях при оценке приближенных методов расчета дебитов скважин и галерей.

Рассмотренные в настоящей работе задачи об определении дебитов галерей и скважин, расположенных в слоях, подошва которых — криволинейная поверхность, могут при помощи конформного преобразования криволинейной поверхности на другую поверхность служить решением ряда других задач. Например, при помощи конформного преобразования плоскости z в плоскость $z_1 = e^{iz}$ можно из формулы (3.1) получить формулу (3.4).

Этот метод, разобранный ранее [2], позволяет, кроме расширения числа конкретных примеров, сводить сложные задачи к более простым задачам.

Поступила 13 II 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
2. Голубева О. В. Уравнения двухмерных движений идеальной жидкости по криволинейной поверхности и их применение в теории фильтрации. ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950.
3. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, М. — Л., 1949.