Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХРАЗМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ МОДУЛЯ ЕЕ СКОРОСТИ

А. И. Некрасов

(Москва)

Пусть будут $\varphi(x, y)$ — потенциал скоростей искомого движения рассматриваемой жидкости и $q(x, y)$ — заданный модуль ее скорости, так что должно быть

$$\triangle(\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 y} = 0, \qquad +\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = q(x, y) \tag{1}$$

Мы имеем

$$\frac{\partial^2\varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi^2}{\partial y^2} = 2\varphi\triangle\varphi + 2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] = 2q^2(x, y) \tag{2}$$

Таким образом, рассматриваемая гидродинамическая задача равносильна следующей математической задаче: определить гармоническую функцию двух переменных, квадрат которой удовлетворяет заданному уравнению Пуассона. В такой форме эта задача была предложена Б. С. Стечкиным.

Обозначим через $\psi(x, y)$ функцию тока разыскиваемого движения жидкости; тогда будет

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = w(z)$$

где w есть комплексный потенциал и $z = x + iy$. Если ϑ есть угол скорости жидкости с осью абсцисс, то должно быть

$$-\frac{dw}{dz} = qe^{-i\vartheta}, \qquad \mathrm{Log}\left(-\frac{dz}{dw}\right) = -\log q + i\vartheta \tag{3}$$

т. е. $-\log q$ и ϑ суть сопряженные гармонические функции, для которых имеют место соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\log q) = \frac{\partial\vartheta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(-\log q) = -\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$$

Отсюда находим

$$d\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}dx + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}dy = \frac{\partial}{\partial y}(\log q)\,dx - \frac{\partial}{\partial x}(\log q)\,dy$$

или

$$d\vartheta = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial q}{\partial y}dx - \frac{\partial q}{\partial x}dy\right) \tag{4}$$

где правая часть есть полная производная. Отсюда по формуле (3) находим значение для количества $\mathrm{Log}(-dz/dw)$ в виде

$$\mathrm{Log}\left(-\frac{dz}{dw}\right) = f(z), \quad \text{или} \quad w = -\int e^{-f(z)}dz + \mathrm{const}$$

Таким образом, поставленная задача решена. В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$q = r = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Применяя формулу (4), получим

$$d\vartheta = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = d \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

Если мы положим $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, то будет

$$d\vartheta = d \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}\theta), \qquad \text{или} \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta + \text{const}$$

Из формулы (3) будем иметь

$$\operatorname{Log}\left(-\frac{dz}{dw}\right) = -\log r + i\frac{\pi}{2} - i\theta - \operatorname{Log}(\alpha + i\beta)$$

где α и β суть действительные произвольные постоянные. Отсюда получаем

$$-\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\alpha + i\beta}\frac{i}{z} \qquad \text{или} \qquad dw = (\alpha + i\beta)\, iz\, dz$$

Интегрируя, имеем

$$w = \frac{1}{2} i(\alpha + i\beta) z^2 + \text{const}$$

Следовательно, будет

$$\varphi = -\alpha xy - \frac{1}{2}\beta(x^2 - y^2) + \text{const}, \qquad \psi = \frac{1}{2}\alpha(x^2 - y^2) - \beta(xy) + \text{const}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\alpha y - \beta x, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\alpha x + \beta y$$

и

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha^2 + \beta^2) r^2$$

чтобы решение соответствовало условию $q = r$, должно быть $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Таким образом, решение имеет вид:

$$\varphi = -\alpha xy - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \alpha^2}(x^2 - y^2) + \text{const}, \qquad \psi = \frac{1}{2}\alpha(x^2 - y^2) - \sqrt{1 - \alpha^2}\, xy + \text{const}$$

где произвольные постоянные действительны.

Поступила 1 IV 1953

Институт механики
Академии наук СССР