Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВЗАИМНОСТИ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СУММАРНЫХ СИЛ И МОМЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

В. И. Моссаковский

(Днепропетровск)

§ 1. В упругое полупространство вдавливается штамп произвольной формы в плане, поверхность которого после вдавливания определяется уравнением

$$z = f(x, y) \tag{1.1}$$

При этом система декартовых прямоугольных координат выбирается таким образом, чтобы плоскость $z=0$ совпала с границей полупространства. Ось $z$ направлена внутрь упругого полупространства.

Обозначим часть плоскости $z=0$, где произошел контакт с полупространством, через $S^\circ$, а остальную часть плоскости через $S$.

Будем считать, что в области $S$ известны составляющие внешнего напряжения $Z_x$, $Z_y$, $Z_z$ и что между соприкасающимися поверхностями отсутствует трение.

Таким образом, приходим к смешанной задаче теории упругости для полупространства. Если эта задача решена каким-либо способом и найдено распределение давления под подошвой штампа $p=p(x, y)$, то суммарная сила и моменты, действующие на штамп, определяются по формулам

$$P = \iint\limits_{S} p\,dx\,dy, \quad M_y = \iint\limits_{S} xp\,dx\,dy, \quad M_x = \iint\limits_{S} yp\,dx\,dy \tag{1.2}$$

Нахождение распределения давления под подошвой штампа с искривленным основанием представляет даже для простейших форм области контакта (круг, эллипс) трудную задачу, поэтому естественно ставить вопрос о непосредственном нахождении $P$, $M_y$, $M_x$ без предварительного определения $p(x, y)$.

Оказывается, справедливо следующее: если найдены распределение давления под подошвой плоского штампа данной формы в плане и граничные значения составляющих вектора перемещения вне штампа, то определение величин $P$, $M_x$ и $M_y$ для штампа с любой поверхностью основания, но той же формы в плане, сводится к квадратурам.

Пусть известны функция $p_0(x, y)$ в области $S^\circ$ и функции $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$ в области $S$, соответствующие тому случаю, когда поверхность штампа после вдавливания определяется уравнением

$$z = \alpha + \beta x + \gamma y \tag{1.3}$$

и вне области контакта отсутствуют нагрузки. При этом, конечно, функции $p_0$, $u_0$, $v_0$, $w_0$ представлены в виде

$$\begin{aligned} p_0(x, y) &= \alpha p_\alpha(x, y) + \beta p_\beta(x, y) + \gamma p_\gamma(x, y) \\ u_0(x, y) &= \alpha u_\alpha(x, y) + \beta u_\beta(x, y) + \gamma u_\gamma(x, y) \\ v_0(x, y) &= \alpha v_\alpha(x, y) + \beta v_\beta(x, y) + \gamma v_\gamma(x, y) \\ w_0(x, y) &= \alpha w_\alpha(x, y) + \beta w_\beta(x, y) + \gamma w_\gamma(x, y) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Согласно теореме взаимности (массовые силы отсутствуют) имеем

$$\iint\limits_{S^\circ} p(x, y)(\alpha + \beta x + \gamma y)\,dx\,dy + \iint\limits_{S} [Z_x(x, y)\,u_0(x, y) + Z_y(x, y)\,v_0(x, y) + Z_z(x, y)\,w_0(x, y)]\,dx\,dy = \iint\limits_{S^\circ} w(x, y)\,p_0(x, y)\,dx\,dy \tag{1.5}$$

Отсюда получаем

$$P = \iint\limits_{S^\circ} w(x, y)\,p_\alpha(x, y)\,dx\,dy - \iint\limits_{S} [Z_x(x, y)\,u_\alpha(x, y) + Z_y(x, y)\,v_\alpha(x, y) + Z_z(x, y)\,w_\alpha(x, y)]\,dx\,dy \tag{1.6}$$

$$M_y = \iint\limits_{S^\circ} w(x, y)\,p_\beta(x, y)\,dx\,dy - \iint\limits_{S} [Z_x(x, y)\,u_\beta(x, y) + Z_y(x, y)\,v_\beta(x, y) + Z_z(x, y)\,w_\beta(x, y)]\,dx\,dy$$

$$M_x = \iint\limits_{S^\circ} w(x, y)\,p_\gamma(x, y)\,dx\,dy - \iint\limits_{S} [Z_x(x, y)\,u_\gamma(x, y) + Z_y(x, y)\,v_\gamma(x, y) + Z_z(x, y)\,w_\gamma(x, y)]\,dx\,dy$$

**§ 2.** Как известно [1], решение задачи о давлении жесткого штампа на упругое полупространство при отсутствии сил трения между соприкасающимися поверхностями и отсутствии внешних нагрузок вне области контакта может быть сведено к нахождению гармонической в полупространстве функции $\varphi_3(x, y, z)$ по граничным условиям

$$\begin{aligned} &\varphi_3(x, y, 0) = f(x, y) && \text{в области } S^\circ \\ &\varphi_{3z}'(x, y, 0) = 0 && \text{в области } S \end{aligned} \tag{2.1}$$

При этом давление под подошвой штампа $p(x, y)$ и смещения точек границы полупространства $w(x, y)$ определяются по формулам

$$p(x, y) = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\varphi_{3z}'(x, y, 0), \qquad w(x, y) = \varphi_3(x, y, 0) \tag{2.2}$$

Граничные значения составляющих вектора перемещения $u(x, y)$, $v(x, y)$ определяются через граничные значения гармонических в полупространстве функций $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$:

$$u(x, y) = \varphi_1(x, y, 0), \qquad v(x, y) = \varphi_2(x, y, 0) \tag{2.3}$$

Функции $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$ связаны с функцией $\varphi_3(x, y, z)$ соотношениями

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} \tag{2.4}$$

Таким образом, если значения функции $\varphi_3(x, y, z)$ известны на всей плоскости $z = 0$, то задача определения функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ сводится к нахождению граничных значений гармонической в полупространстве функции по граничному значению ее нормальной производной (задача Неймана) и принципиальных трудностей не представляет.

Однако этот способ является мало эффективным ввиду громоздкости получающихся интегралов. Поэтому для определения функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ может иногда оказаться более удобным другой метод, связанный с применением интегралов типа Коши.

Проинтегрируем формулы (2.4) по $z$, замечая, что функции $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$ исчезают на бесконечности:

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_z^\infty \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} dz, \qquad \varphi_2(x, y, z) = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_z^\infty \frac{\partial \varphi_3}{dy} dz \tag{2.5}$$

Дифференцируем первую формулу (2.5) по $x$, вторую по $y$ и складываем,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \int_z^\infty \left[\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2}\right] dz \tag{2.6}$$

Функция $\varphi_3$ гармоническая, поэтому

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} \tag{2.7}$$

Формула (2.6) принимает вид:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \tag{2.8}$$

Полагая в формуле (2.8) $z$ равным нулю и используя формулы (2.2) и (2.3), получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x, y) \qquad \text{в обл. } S^\circ \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{в обл. } S \end{aligned} \tag{2.9}$$

Дифференцируем первую формулу (2.5) по $y$, вторую по $x$. Из равенства первых частей следует $\partial\varphi_1 / \partial y = \partial\varphi_2 / \partial x$. Поэтому, полагая $z = 0$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{2.10}$$

Если известно распределение давления под подошвой штампа $p(x, y)$ и каким-либо способом найдено частное решение системы уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x, y), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \qquad \text{в обл. } S^\circ \tag{2.11}$$

то функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ можно представить в виде

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y), \quad v(x, y) = v_1(x, y) + v_1(x, y) \qquad \text{в обл. } S^\circ \tag{2.12}$$

При этом функции $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \qquad \text{в обл. } S^\circ \tag{2.13}$$

Из формул (2.9), (2.10) видно, что функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{в обл. } S \tag{2.14}$$

Соотношения (2.13), (2.14) показывают, что функции $v_2(x, y)$, $u_2(x, y)$ являются действительной и мнимой частями аналитической в области $S^\circ$ функции $F(z)$, а функции $v(x, y)$, $u(x, y)$ — действительной и мнимой частями аналитической в $S$ функции $F_1(z)$.

Функции $F(z)$ и $F_1(z)$ можно рассматривать как значения кусочно-голоморфной функции $\Phi(z)$ соответственно в областях $S^\circ$ и $S$.

Следуя Н. И. Мусхелишвили [2], границу области $S^\circ$ обозначим буквой $L$. Граничные значения $\Phi(z)$ при стремлении $z$ к точкам $t$ на линии $L$ из области $S^\circ$ и из области $S$ будем обозначать соответственно $\Phi_-(t)$ и $\Phi_+(t)$.

Из условия непрерывности функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ на $L$ следует

$$\Phi_+(t) - \Phi_-(t) = v_1(t) + iu_1(t) \quad \text{на } L \tag{2.15}$$

Для определения функции $\Phi(z)$ получаем формулу

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{v_1(t) + iu_1(t)}{t - z}\,dt \tag{2.16}$$

причем интегрирование производится так, чтобы область оставалась слева.

**§ 3.** В виде примера рассмотрим штамп круговой формы в плане. В работе [3] было показано, что под подошвой круглого штампа, поверхность которого после вдавливания определяется уравнением

$$z = f_n(\rho)\cos n\varphi \tag{3.1}$$

возникает давление

$$p(r, \varphi) = -\frac{E\cos n\varphi}{(1-\nu^2)\pi}\left[r^{n-1}\frac{d}{dr}r^{1-2n}\frac{d}{dr}r^{2n}\int\limits_r^a \frac{x^{-2n}dx}{\sqrt{x^2-r^2}}\int\limits_0^x \frac{f_n(\rho)\rho^{n+1}d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}} + \frac{r^n c_n}{\sqrt{(a^2-r^2)^3}}\right] \tag{3.2}$$

где

$$c_n = a^{1-2n}\int\limits_0^a \frac{f_n(\rho)\rho^{n+1}}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,d\rho \tag{3.3}$$

Функции $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$ будем искать в виде

$$u_1(x, y) = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \qquad v_1(x, y) = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \quad \text{в обл. } S^\circ \tag{3.4}$$

где $Q(x, y)$ — частное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\,p(x, y) \tag{3.5}$$

Если положить

$$Q(x, y) = R_n(r)\cos n\varphi \tag{3.6}$$

то для определения функции $R_n(r)$ из (3.5) и (3.6) получим уравнение

$$r^{n-1}\frac{d}{dr}r^{1-2n}\frac{d}{dr}r^n R_n(r) =$$

$$= -\frac{1-2\nu}{(1-\nu)\pi}\left[r^{n-1}\frac{d}{dr}r^{1-2n}\frac{d}{dr}r^{2n}\int\limits_r^a \frac{x^{-2n}dx}{\sqrt{x^2-r^2}}\int\limits_0^x \frac{f_n(\rho)\rho^{n+1}d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}} + \frac{r^n c_n}{\sqrt{(a^2-r^2)^3}}\right] \tag{3.7}$$

Отсюда

$$R_n(r) = -\frac{1-2\nu}{(1-\nu)\pi}\left[r^n\int\limits_r^a \frac{x^{-2n}dx}{\sqrt{x^2-r^2}}\int\limits_0^x \frac{f_n(\rho)\rho^{n+1}d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}} + \right. \tag{3.8}$$

$$\left. + c_n r^{-n}\int\limits_0^r \frac{\rho^{2n-1}d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} + a_n r^n + b_n r^{-n}\right]$$

В формулах (3.8) при $n = 0$ последний член в скобках принимает вид $b_0 \ln r$.

Мы ищем частное решение уравнения (3.7), регулярное при $r < a$. Поэтому все $a_n$ мы можем положить равными нулю, а $b_n$ определить из того условия, что функция $R_n(r)$ должна быть ограничена в точке $r = 0$.

Нетрудно проверить, что все $b_n$ равны нулю, кроме $b_0$, которое равно $- c_0 / a$.

Для определения функций $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ мы должны знать значения функций $\partial Q / \partial x$, $\partial Q / \partial y$ на границе области $S^\circ$. Из формулы (3.6) следует

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= R_n'(r) \cos \varphi \cos n\varphi + \frac{R_n(r)}{r} \sin n\varphi \sin \varphi \\
\frac{\partial Q}{\partial y} &= R_n'(r) \sin \varphi \cos n\varphi - \frac{R_n(r)}{r} \sin n\varphi \cos \varphi
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Из формулы (3.8) находим значения $R_n(a)$ и $R_n'(a)$:

$$
\begin{aligned}
R_n(a) &= -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\pi} c_n a^{n-1} \frac{\Gamma(n)\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(n+{}^1/_2)} \\
R_0'(a) &= 0 \qquad \text{при } n \geqslant 1 \\
R_0'(a) &= \frac{c_0}{a^2} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\pi}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

На границе круга $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ величины $t$ и $\varphi$ связаны соотношением

$$
t = a(\cos\varphi + i \sin\varphi)
\tag{3.11}
$$

Таким образом

$$
\begin{aligned}
v_0(t) + iu_0(t) &= \frac{c_0}{a} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \frac{i}{t} \qquad \text{при } n=0 \\
v_0(t) + iu_0(t) &= c_n a^{n-1} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(n)\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(n+{}^1/_2)} \frac{i}{t} \left[\frac{a^n}{t^n} - \frac{t^n}{a^n}\right] \qquad \text{при } n \geqslant 1
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Для функции $\Phi(z)$ получаем формулы

$$
\begin{aligned}
\Phi(z) &= 0 \qquad \text{в обл. } S^\circ \\
\Phi(z) &= -\frac{c_0}{a} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \frac{i}{z} \qquad \text{в обл. } S
\end{aligned}
\qquad \text{при } n=0
\tag{3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi(z) &= -c_n a^{2n-1} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(n)\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(n+{}^1/_2)} \frac{i}{z^{n+1}} \qquad \text{в обл. } S \\
\Phi(z) &= -\frac{c_n}{a\pi} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\Gamma(n)\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(n+{}^1/_1)} iz^{n-1} \qquad \text{в обл. } S^\circ
\end{aligned}
\qquad \text{при } n \geqslant 1
\tag{3.14}
$$

Разделяя в формулах (3.13), (3.14) действительные и мнимые части, получим выражения для функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ в области $S^\circ$, а также выражения для функций $u_2(x, y)$, $v_2(x, y)$ в области $S$.

При $n = 0$

$$
u(x, y) = -\frac{c_0}{a} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \frac{\cos\varphi}{r}, \qquad v(x, y) = -\frac{c_0}{a} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\pi} \frac{\sin\varphi}{r} \qquad \text{в обл. } S
\tag{3.15}
$$

$$
u_2(x, y) = 0, \qquad v_2(x, y) = 0 \qquad \text{в обл. } S^\circ
\tag{3.16}
$$

При $n \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
u(x, y) &= -\frac{c_n a^{2n-1}}{\pi} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\Gamma(n)\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(n+{}^1/_1)} \frac{\cos(n+1)\varphi}{r^{n+1}} \\
v(x, y) &= -\frac{c_n a^{2n-1}}{\pi} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\Gamma(n)\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(n+{}^1/_2)} \frac{\sin(n+1)\varphi}{r^{n+1}}
\end{aligned}
\qquad \text{в обл. } S
\tag{3.17}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
u_2(x, y) &= -\frac{c_n}{a\pi}\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(n+{}^1/_2)}\,r^{n-1}\cos(n-1)\,\varphi \\
v_2(x, y) &= \frac{c_n}{a\pi}\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(^1/_2)}{\Gamma(n+{}^1/_1)}\,r^{n-1}\sin(n-1)\,\varphi
\end{aligned}\right\}\quad \text{в обл. } S^\circ \qquad (3.18)
$$

Формулы (3.16), (3.18) совместно с формулами (3.8), (3.6), (3.4) и (2.13) дают значения функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ в области $S^\circ$.

Давления под подошвой штампа, поверхность которого после вдавливания определяется уравнением (3.1), можно вычислить по формуле

$$
p(r, \varphi) = \qquad (3.19)
$$

$$
= \frac{E\cos n\varphi}{2(1-\nu^2)}\times\left[\frac{c_n r^n}{\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{2r^n}{\pi}\int_r^a\frac{x^{-2n}dx}{\sqrt{x^2-r^2}}\int_0^x\frac{f_n''(\rho)\,\rho^{n+1}+f_n'(\rho)\,\rho^n-n^2 f_n(\rho)\,\rho^{n-1}}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\,d\rho\right]
$$

$$
\left.\begin{aligned}
c_0 &= \frac{2}{\pi}\left[f(0)+a\int_0^a\frac{f(\rho)\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right] && \text{при } n=0 \\
c_n &= \frac{2}{\pi}\,a^{1-2n}\int_0^a\frac{f_n'(\rho)\,\rho^n+nf_n(\rho)\,\rho^{n-1}}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,d\rho && \text{при } n\geqslant 1
\end{aligned}\right\}\qquad (3.20)
$$

Осадка поверхности полупространства вне области контакта определяется по формуле

$$
w(r, \varphi) = \frac{2\cos n\varphi}{\pi r^n}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{u_n(\rho)\,\rho^{n+1}}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\,d\rho \qquad (3.21)
$$

Используя эти формулы для крутого штампа, поверхность которого определяется уравнением $z=\alpha+\beta x+\gamma y$, найдем значения функции $p(x, y)$ в области $S^\circ$ и функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ в области $S$ в следующем виде:

$$
\left.\begin{aligned}
p(x, y) &= \frac{E}{(1-\nu^2)\,\pi}\,\frac{\alpha+2\beta x+2\gamma y}{\sqrt{a^2-x^2-y}} \\
w(x, y) &= -\frac{2a}{\pi r^2}\sqrt{r^2-a^2}\,(\beta x+\gamma y)+\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{a}{r}\,(\alpha+\beta x+\gamma y) \\
u(x, y) &= -\frac{a}{\pi}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\frac{dx}{r^2}+\frac{4}{3}\,\beta\,\frac{a^2(x^2-y^2)}{r^4}+\frac{8}{3}\,\gamma\,\frac{a^2xy}{r^4}\right) \\
v(x, y) &= -\frac{a}{\pi}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\frac{\alpha y}{r^2}+\frac{8}{3}\,\beta\,\frac{a^2xy}{r^4}+\frac{4}{3}\,\gamma\,\frac{a^2(x^2-y^2)}{r^4}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad (3.22)
$$

Поступила 13 IX 1952

## ЛИТЕРАТУРА


1. Лурье А. И. Некоторые контактные задачи теории упругости. ПММ, т. V, вып. 3, 1941.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.
3. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство. Труды ИМА, АН УССР, № 1, 1951.