Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

О СВОЙСТВАХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КРУЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДВУХСВЯЗНЫХ ПРОФИЛЕЙ

Д. И. Шерман

(Москва)

В настоящей заметке[1] задача о кручении круглого бруса с эллиптическим отверстием сводится при помощи полученного для нее ранее [1] уравнения Фредгольма к бесконечной системе линейных уравнений. Сходным приемом задача о кручении круглого бруса, ослабленного двумя продольными круговыми полостями, была в статье [2] также сведена к бесконечной системе уравнений. Обе системы здесь изучены различным образом и установлено, что они вполне регулярны для достаточно близких одна к другой границ области. Это позволяет в случае надобности указать погрешность, вызываемую при решении усечением бесконечной системы.

§ 1. Рассмотренная в статье [1] задача о кручении кругового бруса, симметрично ослабленного эллиптическим отверстием, была сведена к интегральному уравнению Фредгольма с ядром, являющимся мероморфной функцией некоего параметра. Решение интегрального уравнения отыскивалось в форме ряда по степеням этого параметра. Возможность такого представления решения не была строго доказана; все же в числовом расчете для одного конкретного случая оно привело к вполне удовлетворительным результатам. Однако трудности, связанные с обоснованием предложенного приема, с одной стороны, и главным образом сравнительная сложность расчетного процесса, значительно усугубляющаяся с уменьшением расстояния между границами области, с другой стороны, побуждают несколько модифицировать прием с целью сделать его более удобным для приложений.

Мы сведем здесь задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений и затем установим, что она вполне регулярна по крайней мере для практически наиболее интересного диапазона изменений относительных размеров области.

Пусть полый цилиндр сечения S, ограниченного извне окружностью L_1 радиуса R, а изнутри эллипсом L_2 с тем же центром, что у окружности, и с большей и меньшей полуосями соответственно a и b, скручивается некоторым моментом M. Начало координат поместим в центре фигуры S и направим координатные оси x и y по большой и малой полуосям эллипса.

Изучение деформаций и напряжений в таком цилиндре сводится к определению функции $\varphi_1(z)$ переменного $z = x + iy$, регулярной в области S, из граничных условий

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = 0 \qquad \text{на } L_1 \tag{1.1}$$

$$\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)} = t\bar{t} + C \qquad \text{на } L_2 \tag{1.2}$$

где t — аффикс точки кривой L_1 или L_2 и C — подлежащая отысканию постоянная.

---

[1] Мы, естественно, сохраняем всюду обозначения, использованные в названных статьях. В статье [1] дана сквозная нумерация формул в отличие от принятой здесь. Во избежание смешения с формулами статьи [2] указатели параграфа и номера формул в ней отмечены звездочкой при ссылках.

Введем на окружности L_1 чисто мнимую функцию $\omega(t)$ из условия

$$\varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)} = 2\omega(t) \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что построенная при ее помощи новая функция

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{t_1 - z}\,dt_1 \tag{1.4}$$

будет регулярна всюду вне эллипса L_2 и равна нулю на бесконечности. Второе из представленных условий может быть теперь записано в форме

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = -\frac{1}{2\pi t}\int\limits_{L_1} \omega(t)\left\{\frac{dt_1}{t_1 - t} + \frac{\overline{dt_1}}{\bar{t}_1 - \bar{t}}\right\} + t\bar{t} + C \tag{1.5}$$

Используя далее функцию

$$z = A\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \tag{1.6}$$

дающую отображение внешности эллипса L_2 на внешность круга радиуса $\rho > 1$ в плоскости ζ (A — некоторая фиксированная постоянная), и полагая

$$\varphi(z) = \varphi^*(\zeta), \qquad \omega(t) = \omega^*(\tau)$$

преобразуем равенство (1.5) к виду:

$$\varphi^*(\tau) + \overline{\varphi^*(\tau)} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \omega^*(\sigma)\Bigg[\left\{\frac{1}{\sigma^2(\tau - \sigma^{-1})} - \frac{1}{\tau - \sigma}\right\}d\sigma +$$

$$+\left\{\frac{\rho^2}{\bar{\sigma}^2}\frac{1}{\tau - \rho^2\bar{\sigma}^{-1}} - \frac{\rho^2}{\tau - \rho^2\bar{\sigma}}\right\}d\bar{\sigma}\Bigg] + A^2\left(\frac{\tau^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{\tau^2}\right) + A\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) + C \tag{1.7}$$

где γ_1 — кривая в плоскости ζ, отображающая окружность L_1. Отсюда находим

$$\varphi^*(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \omega^*(\sigma)\left\{\frac{1}{\sigma^2(\zeta - \sigma^{-1})}\,d\sigma + \frac{\rho^2}{\bar{\sigma}^2}\frac{1}{(\zeta - \rho^2\bar{\sigma}^{-1})}\,d\bar{\sigma}\right\} + A^2\rho^2\frac{1}{\zeta^2} \tag{1.8}$$

При помощи формулы (1.4) равенству (1.3) можно придать вид:

$$\varphi(t) - \overline{\varphi(t)} + \frac{1}{2\pi t}\int\limits_{L_1} \frac{\omega(t_1)}{t_1}\,dt_1 = \omega(t) \tag{1.9}$$

Введем, далее, постоянные

$$\alpha_m = \frac{R^m}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{\omega(t)}{t^{m+1}}\,dt \qquad (m = 0, 1, \ldots) \tag{1.10}$$

В силу предшествующего равенства их можно, исключая α_0, записать и так:

$$\alpha_m = -\frac{1}{2\pi i R^m}\int\limits_{L_1} \varphi(t)\,t^{m-1}\,dt \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{1.11}$$

Как легко видеть, α_0 — величина чисто мнимая, остальные величины α_m будем считать вещественными; ниже мы убедимся в справедливости этого допущения.

Разложение функции $\omega(t)$ в ряд Фурье принимает на основании (1.10) форму

$$\omega(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\left\{\left(\frac{t}{R}\right)^k - \left(\frac{R}{t}\right)^k\right\} \tag{1.12}$$

Равенству (1.5), используя (1.10), можно также придать вид:

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\left\{\left(\frac{t}{R}\right)^k + \left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^k\right\} + t\bar{t} + C \tag{1.13}$$

или после несложных преобразований

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{A}{R}\right)^k\sum_{n=0}^{k}\varepsilon_{nk}C_k^{1/2\,(k-n)}(1+\rho^{2n})\left(\frac{\tau^n}{\rho^{2n}}+\frac{1}{\tau^n}\right)+t\bar{t}+C \quad (1.14)$$

Здесь $\varepsilon_{0k}={}^1/_2$ для $k=2, 4, \ldots$; если индексы n и k одинаковой четности, то $\varepsilon_{nk}=1$; в противном случае $\varepsilon_{nk}=0$. Из последнего же равенства имеем

$$\varphi(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\left(\frac{A}{R}\right)^k\sum_{n=1}^{k}\varepsilon_{nk}\,C_k^{1/2\,(k-n)}(1+\rho^{2n})\,\frac{1}{\zeta^n}+A^2\rho^2\,\frac{1}{\zeta^2} \quad (1.15)$$

Изменив здесь порядок суммирования, получим

$$\varphi(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta^n}\,(1+\rho^{2n})\sum_{k=n}^{\infty}{}^{*}\,\alpha_k C_k^{1/2\,(k-n)}\left(\frac{A}{R}\right)^k+A^2\rho^2\,\frac{1}{\zeta^2} \quad (1.16)$$

Приписанная к внутренней сумме звездочка обозначает, что индекс k принимает значения той же четности, что и n. Внесем выражение для $\varphi(z)$ из (1.16) в формулу (1.10). Тогда, проделав некоторые выкладки, получим

$$\alpha_m=\sum_{n=E(m)}^{m}{}^{*}\sum_{k=n}^{\infty}{}^{*}\alpha_k g_{km}^{(n)}+f_m \qquad (m=1, 2, \ldots) \quad (1.17)$$

где $E(m)=1$ либо $E(m)=2$ и, кроме того, введены обозначения

$$g_{km}^{(n)}=\left(\frac{A}{R}\right)^{k+m}(1+\rho^{2n})\,C_k^{1/2\,(k-n)}\,(C_{m-1}^{1/2\,(m-n)}-C_{m-1}^{1/2\,(m-n)-1})$$

$$f_m=-\varepsilon_m A^2\rho^2\left(\frac{A}{R}\right)^m(C_{m-1}^{1/2\,(m-2)}-C_{m-1}^{1/2\,(m-2)-1}),\quad C_{m-1}^{-1}=0 \quad (1.18)$$

$$\varepsilon_{2k-1}=0,\qquad \varepsilon_{2k}=1 \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

Обратив теперь в (1.17) порядок суммирования, получим для неизвестных α_k бесконечную систему уравнений

$$\alpha_m=\sum_{k=E(m)}^{\infty}{}^{*}\alpha_k\,g_{km}+f_m \qquad (m=1, 2, \ldots) \quad (1.19)$$

со значениями коэффициентов

$$g_{km}=\sum_{n=E(m)}^{N(k,\,m)}{}^{*}g_{km}^{(n)} \qquad \left(\begin{matrix}N(k, m)=k \text{ при } k\leqslant m\\ N(k, m)=m \text{ при } k>m\end{matrix}\right) \quad (1.20)$$

Нетрудно усмотреть, что система (1.19) распадается на две — в отдельности относительно α_k с четными или нечетными индексами. Учитывая вторые из равенств (1.18), сразу заключаем, что $\alpha_m=0$ $(m=1, 3, \ldots)$. Таким образом, подлежат определению постоянные α_m $(m=2, 4, \ldots)$.

Займемся изучением свойств системы (1.19). Коэффициенты при неизвестных справа в каждом уравнении (1.19) суть величины положительные. Попытаемся найти сумму этих коэффициентов в достаточно удобной для исследования форме. Положим

$$r_m(\beta)=\sum_{k=2}^{\infty}{}^{*}\beta^k g_{km}, \qquad 0<\beta<1,\ (m=2, 4, \ldots) \quad (1.21)$$

Из процесса построения (1.19) нетрудно усмотреть, что значение $r_m(\beta)$ определяется правой частью формулы (1.11) при $\alpha_k=\beta^k$ и нулевом свободном члене в функции (1.8), которую при этих условиях назовем $\varphi^*(z, \beta)$. Вычислив непосредственно правую часть (1.11), получим выражение для $r_m(\beta)$ более обозримое, нежели (1.21).

Величину $r_m(1)$ найдем, совершив для простоты предельный переход $\beta \to 1$ на промежуточном этапе выкладок. После этого, перейдя под знаком внешней суммы (1.21) к пределу $\beta \to 1$, получим (разумеется, при законности такой операции) значение упомянутой суммы коэффициентов. Из (1.12) теперь будем иметь

$$\omega(t, \beta) = (\alpha_0 - 1) + \frac{R^2}{R^2 - \beta^2 t^2} - \frac{\beta^2 R^2}{t^2 - \beta^2 R^2} \tag{1.22}$$

Подставим отсюда значение $\omega(t, \beta)$ в выражение (1.8), опустив в нем свободный член и разбив его, что естественно, на два интеграла.

Рассмотрим сначала интеграл

$$J_1(\zeta, \beta) = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \left\{ \frac{R^2}{\beta^2 t^2 - R^2} + \frac{\beta^2 R^2}{t^2 - \beta^2 R^2} \right\} \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta^{-1})}$$

В свою очередь он может быть представлен в виде двух интегралов по числу слагаемых, содержащихся под его знаком в фигурных скобках. Первый из них имеет простые полюсы (помимо $\sigma = 0$ и $\sigma = \zeta^{-1}$) в точках, лежащих вне γ_1 и соответствующих $z = \pm R / \beta$; второй же интеграл (при тех же $\sigma = 0$ и $\sigma = \zeta^{-1}$) имеет простые полюсы внутри γ_1, отвечающие $z = \pm \beta R$. Ясно, что, не меняя величины этих интегралов, можно в одном из них взять за контур интегрирования кривую γ_1', несколько сдвинутую внутрь кривой γ_1 и, как последняя, заключающую $\sigma = 0$ и $\sigma = \zeta^{-1}$; в другом же можно вести интегрирование по контуру γ_1'', охватывающему γ_1. Видоизменив таким образом контур, по которому берется каждый из интегралов, перейдем теперь под знаком их (что, очевидно, уже возможно) к пределу $\beta \to 1$. После этого, замечая, что интеграл, распространенный по кривой γ_1'', равен нулю (поскольку все полюсы его подинтегральной функции расположены по одну сторону γ_1''), получим

$$J_1(\zeta, 1) = \left(\frac{R}{A}\right)^2 \frac{1}{2\pi i \zeta} \int_{\gamma_1'} \frac{\sigma \, d\sigma}{(\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma^2 - \sigma_2^2)(\sigma - \zeta^{-1})}, \qquad \sigma_{1,2} = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4A^2}}{2A}$$

или по теории вычетов

$$J_1(\zeta, 1) = -\frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - 4A^2}} \left\{ \frac{1}{\sigma_1 \zeta - 1} - \frac{1}{\sigma_1 \zeta + 1} \right\} \tag{1.23}$$

Следующий интеграл, составляющий функцию $\varphi^*(z, \beta)$, назовем $J_2(\zeta, \beta)$. Взяв величину, с ним сопряженную, и повторяя почти дословно рассуждения, приведенные выше, сперва будем иметь

$$\overline{J_2(\zeta, 1)} = \left(\frac{R}{A}\right)^2 \frac{1}{2\pi i \zeta} \int_{\gamma_1'} \frac{\rho^2 \sigma}{(\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma^2 - \sigma_2^2)} \frac{d\sigma}{(\sigma - \rho^2 \zeta^{-1})}$$

и затем найдем

$$J_2(\zeta, 1) = -\frac{\rho^2}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - 4A^2}} \left\{ \frac{1}{\sigma_1 \zeta - \rho^2} - \frac{1}{\sigma_1 \zeta + \rho^2} \right\} \tag{1.24}$$

Сложив далее почленно равенства (1.23) и (1.24), получим

$$\varphi^*(\zeta, 1) = -\frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - 4A^2}} \left[\left\{ \frac{1}{\sigma_1 \zeta - 1} - \frac{1}{\sigma_1 \zeta + 1} \right\} + \rho^2 \left\{ \frac{1}{\sigma_1 \zeta - \rho^2} - \frac{1}{\sigma_1 \zeta + \rho^2} \right\} \right] \tag{1.25}$$

Наконец, обе части этого равенства, взятого на окружности L_1, умножим на $-(2\pi i R^m t^{-(m-1)})^{-1} \, dt$ и проинтегрируем их по ней. Тогда придем к требуемому соотношению $(\sigma_1 > \rho)$:

$$r_m(1) = \frac{R}{\sqrt{R^2 - 4A^2}} \left(\frac{A}{R}\right)^m \sum_{\nu=0}^{1/2(m-2)} (C_{m-1}^{\nu} - C_{m-1}^{\nu-1}) \left\{ \frac{1}{\sigma_1^{m-2\nu}} + \left(\frac{\rho^2}{\sigma_1}\right)^{m-2\nu} \right\} \tag{1.26}$$

$$(m = 2, 4, \ldots)$$

Выясним порядок убывания коэффициентов g_{km} системы (1.19) с увеличением индекса k и при любом фиксированном m. Имеем

$$g_{km} < \left(\frac{A}{R}\right)^{k+m} 2^k \sum_{\nu=0}^{{}^1/_2 (m-2)} (1 + \rho^{2(m-2\nu)}) C_{m-1}^{\nu} < \left(\frac{A}{R}\right)^{k+m} 2^{k+m-1} (1 + \rho^{2m})$$

Считая k достаточно большим, равным или превосходящим lm, где l не зависит от заданного m и выбирается из условия

$$\mu = (2\rho\,(\rho^2 + 1)^{-1})^{l+1} \rho^2 < 1$$

найдем

$$g_{km} < \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^{k+m} \left(\frac{2\rho}{1+\rho^2}\right)^{k-lm} \left\{\left(\frac{2\rho}{1+\rho^2}\right)^{m(l+1)} + \mu^m\right\} < \left(\frac{a}{R}\right)^{k+m} \left(\frac{2\rho}{1+\rho^2}\right)^{k-lm} \tag{1.27}$$

Из неравенства (1.27) вытекает [3] законность предельного перехода $\beta \to 1$ под знаком внешней суммы в (1.21). Итак, $r_m(1)$ на самом деле дает значение суммы коэффициентов в уравнении (1.19) с порядковым номером m. Нетрудно получить достаточно простую и в то же время приемлемую оценку для $r_m(1)$. Имеем

$$\sum_{\nu=0}^{{}^1/_2 (m-2)} (C_{m-1}^{\nu} - C_{m-1}^{\nu-1}) \frac{1}{\sigma_1^{m-\nu}} < \frac{1}{\sigma_1^2} \sum_{\nu=0}^{{}^1/_2 (m-2)} (C_{m-1}^{\nu} - C_{m-1}^{\nu-1}) < 2^{n-2} \frac{1}{\sigma_1^2}$$

$$\sum_{\nu=0}^{{}^1/_2 (m-2)} (C_{m-1}^{\nu} - C_{m-1}^{\nu-1}) \left(\frac{\rho^2}{\sigma_1}\right)^{m-2\nu} < \left(\frac{\rho}{\sigma_1}\right)^2 \rho^m \sum_{\nu=0}^{{}^1/_2 (m-2)} C_{m-1}^{\nu} \frac{1}{\rho^{2\nu}} < \rho \left(\frac{\rho}{\sigma_1}\right)^2 \left(\frac{1+\rho^2}{\rho}\right)^{m-1}$$

Поэтому

$$r_m(1) < \frac{R}{\sqrt{R^2 - 4A^2}} \left(\frac{\rho}{\sigma_1}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^m \left\{\frac{\rho^2}{1+\rho^2} + \frac{1}{4\rho^2}\left(\frac{2\rho}{1+\rho^2}\right)^m\right\}$$

или, еще проще,

$$r_m(1) < \frac{R}{\sqrt{R^2 - 4A^2}} \left(\frac{\rho}{\sigma_1}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^m \tag{1.28}$$

Величины $r_m(1)$ $(m = 2, 4, \ldots, 10)$ подсчитаны на основании формулы (1.26) для случая $a / R = 0.95$ и $\rho = \sqrt{2}$ приведены в табл. 1 (при этом эллипс достаточно вытянут и границы области весьма близки одна к другой в направлении вещественной оси); для $m = 12$, 14 приведены значения правой части (1.28), названной $r_m^{(0)}(1)$.

Таблица 1

m	2	4	6	8	10	12	14
$r_m(1)$	0.8666	0.5747	0.4234	0.3267	0.2585	—	—
$r_m^*(1)$	0.8331	0.5316	0.3898	0.3012	0.2391	—	—
$r_m^{(0)}(1)$	—	—	—	—	—	0.9340	0.8429

Из табл. 1 следует, что величина

$$r_m^*(1) = \frac{r_m(1) - g_{mm}}{1 - g_{mm}} \qquad (m = 2, 4, \ldots)$$

равная сумме коэффициентов в уравнениях (1.19), разрешенных относительно неизвестных с соответствующим порядковым номером, меньше единицы. Таким образом, система (1.19) вполне регулярна. Аналогичным образом может быть изучена система (1.19) при других относительных размерах области.

§ 2. Перейдем теперь к статье [2]. В ней исследовано кручение круглого бруса с двумя продольными круговыми полостями. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений, к которой сведена задача, также вполне регулярна в достаточно широких пределах изменения сравнительных размеров области.

Покажем это для случая симметричной области. Полученная при этом бесконечная система (4.7*) при неограниченном s имеет вид:

$$\alpha_m + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r_{k+1,\, m+1} = d_{m+1} \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

Здесь α_k — искомые неизвестные, d_{m+1} — свободные члены; подлежащие исследованию коэффициенты системы $r_{k+1,\, m+1}$ согласно формулам (4.3*) и (4.6*) равны:

$$r_{k+1,\, m+1} = -\left\{g_{k+1,\, m+1} - (-1)^{k+1} C_{-(k+1)}^{m+1} \gamma^{k+m+2}\right\}$$

$$g_{k+1,\, m+1} = p_{k+1,\, m+1}^{(1)} + (-1)^{k+1} p_{k+1,\, m+1}^{(2)}$$

Равенства (2.10*) вкупе с (2.12*) дают

$$p_{k+1,\, \nu}^{(1)} = (k+1)(\lambda\mu)^{k+\nu+1} \sum_{k_1=0}^{E(\nu)} G_{k+1,\, k_1}^{(\nu)} \frac{1}{\lambda^{2k_1}}$$

$$p_{k+1,\, \nu}^{(2)} = (-1)^{\nu} (k+1)(\xi\eta)^{k+\nu+1} \sum_{k_1=0}^{E(\nu)} (-1)^{k_1} G_{k+1,\, k_1}^{(\nu)} \frac{1}{\eta^{2k_1}}$$

причем $G_{k+1,\, k_1}^{(\nu)}$, λ, μ, ξ, η и γ — некоторые постоянные, определяемые соотношениями (2.7*) и (2.9*); верхний предел суммирования $E(\nu)$ находится весьма просто в зависимости от значений ν и $k+1$. Сопоставляя формулы (2.10*), легко придем к выводу, что величина $g_{k+1,\, m+1}$ при всех значениях индексов k и m положительна. Комбинируя соответствующие из разложений (2.5*) внутри одного из круговых отверстий (радиуса R и с аффиксом центра, равным a)

$$\chi_{k+1,\, j}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{k+1,\, \nu}^{(j)} \left(\frac{z-a}{R}\right)^{\nu}$$

причем функция (R_0 — радиус наружной окружности и $a_1 = -a_2 = a$)

$$\chi_{k+1,\, j}(z) = \left(\frac{Rz}{R_0^2 - a_j z}\right)^{k+1} \qquad (j = 1, 2)$$

находим

$$\chi_{k+1,\, 1}(t) + (-1)^{k+1} \chi_{k+1,\, 2}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{k+1,\, \nu} \left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu} \tag{2.1}$$

Просуммируем обе части этого равенства по индексу k и затем переставим в правой части порядок следования сумм. Взяв при этом во внимание равенства, определяющие $\chi_{k+1,\, j}(z)$, будем иметь

$$\frac{R}{a+R}\left\{-2 + \frac{R_0^2}{R_0^2 - (a+R)t} + \frac{R_0^2}{R_0^2 + (a+R)t}\right\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{t-a}{R}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} g_{k+1,\, \nu} \tag{2.2}$$

Отсюда без труда получим (2.3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_{k+1,\, \nu} = \left(\frac{R_0}{a+R}\right)^2 \left[\left(\frac{R(a+R)}{R_0^2 - a(a+R)}\right)^{\nu+1} + (-1)^{\nu} \left(\frac{R(a+R)}{R_0^2 + a(a+R)}\right)^{\nu+1}\right] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

Умножив теперь обе части разложения

$$\frac{1}{(1-\gamma)^{k+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} C_{-(k+1)}^{\nu} \gamma^{\nu}, \qquad \gamma < \frac{1}{2} \tag{2.4}$$

на величину γ_1^{k+1}, где $\gamma_1 \leqslant \gamma$, и просуммировав его по всем целым неотрицательным k, составим равенство

$$\frac{\gamma_1}{1-\gamma-\gamma_1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{\nu}C_{-(k+1)}^{\nu}\gamma_1^{k+1} \tag{2.5}$$

Приравняем в нем слагаемые с одинаковыми степенями параметра γ, разложив предварительно левую часть по его степеням. Положив после этого $\gamma_1=\gamma$, получим

$$\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^{\nu+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{\nu}C_{-(k+1)}^{\nu}\gamma^{k+\nu+1} \tag{2.6}$$

Весьма элементарные соображения приводят к неравенству

$$r_{m+1}<r_{m+1}^{*}-2\sum_{k=E(m)}^{n}{}^{*}\{\varepsilon_k^{(1)}g_{k+1,\,m+1}+\varepsilon_k^{(2)}|C_{-(k+1)}^{m+1}|\gamma^{k+m+2}\} \tag{2.7}$$

при обозначениях

$$r_{m+1}=\sum_{k=0}^{\infty}|r_{k+1,\,m+1}|,\qquad r_{m+1}^{*}=\sum_{k=0}^{\infty}(g_{k+1,\,m+1}+|C_{-(k+1)}^{m+1}|\gamma^{k+m+2}) \tag{2.8}$$

Здесь n, вообще говоря, любое целое неотрицательное число одинаковой четности с m; его следует каждый раз фиксировать в зависимости от номера m уравнения системы (4.7*) и брать возможно наименьшим, уточняя тем самым оценку (2.7) лишь в той мере, в какой это необходимо для выявления интересующего нас свойства системы. Звездочка, приписанная к сумме, указывает, что она распространяется только на значения $k\leqslant n$ одинаковой четности с n; в соответствии с этим $E(m)$ равно нулю либо единице. Далее, $\varepsilon_k^{(1)}=1$, $\varepsilon_k^{(2)}=0$ для тех из $k\leqslant n$, для которых

$$g_{k+1,\,m+1}\leqslant|C_{-(k+1)}^{m+1}|\gamma^{k+m+2}$$

и, наоборот, $\varepsilon_k^{(1)}=0$, $\varepsilon_k^{(2)}=1$ для остальных значений $k\leqslant n$.

Опуская в (2.7) второе слагаемое, получим усиленное неравенство

$$r_{m+1}<r_{m+1}^{*} \tag{2.9}$$

Из вида формул (2.3) и (2.6) непосредственно явствует, что система (4.7*) квази-регулярна. В характерных случаях, близких к предельному ($R={}^1/_2R_0$, $\gamma={}^1/_2$), можно, опираясь на (2.7), установить, что система (4.7*) вполне регулярна.

В статье [2] были разобраны два числовых примера. Остановимся на втором из них ($R={}^4/_9R_0$, $a={}^1/_2R_0$, $\gamma={}^4/_9$), наименее благоприятном в смысле связанных с ним вычислительных трудностей. Для этого примера правая часть (2.7), обозначаемая $r_{m+1}^{(0)}$, подсчитана в табл. 2 для $m=0, 1, 2, 3$ при $n=2$ и $n=3$ одной и той же четности с m; для $m=4, 5$ мы ограничились, согласно (2.9), подсчетом r_{m+1}^{*}.

Таблица 2

m	0	1	2	3	4	5
r_{m+1}^{*}	1.258	1.102	0.8507	0.6865	0.5453	0.4355
$r_{m+1}^{(0)}$	0.7019	0.7137	0.6429	0.5029	—	—

Из табл. 2 ясно, что система (4.7*) вполне регулярна. Очевидно, что для относительно меньших значений a, R и γ она тем более остается вполне регулярной.

Поступила 6 III 1953

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И. Об одной задаче кручения. ДАН СССР, т. LXIII, № 5, 1948.
2. Степанов Р. Д. и Шерман Д. И. Кручение круглого бруса, ослабленного двумя продольными цилиндрическими круговыми полостями. Инженерный сборник, т. XI, 1952.
3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Гостехтеоретиздат, 1950.