Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛАМЕ ДЛЯ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

М. М. Филоненко-Бородич

(Москва)

В работах [1–2] были рассмотрены задачи о равновесии упругого параллелепипеда под действием поверхностных нагрузок или неравномерного распределения температуры в нем; в этих задачах естественно было пользоваться прямоугольными декартовыми координатами. В настоящей работе мы применим, как и ранее, вариационный метод Кастильяно, но для тел, форма которых делает естественным применение цилиндрических координат r, θ, z.

§ 1. Метод решения задачи. Функции напряжения. Компоненты тензора напряжений T будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_r &= R_r^{(0)} + \sum C_m R_r^{(m)}, & R_\theta = \Theta_r &= R_\theta^{(0)} + \sum C_m R_\theta^{(m)} \\ \Theta_\theta &= \Theta_\theta^{(0)} + \sum C_m \Theta_\theta^{(m)}, & \Theta_z = Z_\theta &= \Theta_z^{(0)} + \sum C_m \Theta_z^{(m)} \\ Z_z &= Z_z^{(0)} + \sum C_m Z_z^{(m)}, & Z_r = R_z &= Z_r^{(0)} + \sum C_m Z_r^{(m)} \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Здесь индексом (0) отмечены компоненты основного тензора T°, удовлетворяющего уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} &\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial R_z}{\partial z} + \frac{R_r - \Theta_\theta}{r} = 0 \\ &\frac{\partial R_z}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{R_z}{r} = 0 \\ &\frac{\partial R_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Theta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial Z_\theta}{\partial z} + \frac{2R_\theta}{r} = 0 \end{aligned} \qquad (1.2)$$

и граничным условиям, заданным в виде поверхностных нагрузок. Индексом ($m = 1, 2, \ldots$) в равенствах (1.1) отмечены компоненты корректирующего тензора T^*, также удовлетворяющего уравнениям (1.2), но оставляющего поверхность тела свободной от напряжений, C_m — свободные параметры, позволяющие варьировать общий тензор напряжений (1.1).

Основной тензор $T^{(0)}$ для каждой частной задачи строится без особого труда в зависимости от формы тела и заданных нагрузок. Наиболее важной частью задачи является построение корректирующего тензора T^*; он должен дать возможно более полную совокупность напряженных состояний тела заданной формы при отсутствии напряжений на поверхности («самонапряженных» состояний) и тем обеспечить применение вариационного принципа Кастильяно. Для достижения этой цели прежде всего необходимо найти общее решение уравнений равновесия (1.2), т. е. найти соответствующие функции напряжений. Задача эта в общем виде для произвольной системы координат решена Ю. А. Крутковым и В. Н. Блохом в работах [3, 4]. Можно показать, что в случае цилиндрических координат она может быть решена при помощи элементарного алгоритма, исходящего из некоторого частного решения, получаемого методом полного разделения переменных.

К уравнениям (1.2) этот метод можно применить, так как коэффициенты их зависят только от одной переменной. Решение уравнений (1.2) ищем в форме

$$R_r = R_1\Theta_1''Z_1'', \qquad \Theta_\theta = R_2\Theta_2Z_2, \qquad Z_z = R_3\Theta_3Z_3$$

$$R_\theta = R_4\Theta_4Z_4, \qquad Z_\theta = R_5\Theta_5Z_5, \qquad R_z = R_6\Theta_6Z_6$$

где R_k, Θ_k, Z_k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) — произвольные пока функции от соответствующих переменных. Для разделения переменных в первом уравнении (1.2) полагаем

$$Z_4 = \alpha_1Z_1'', \qquad Z_6 = \beta_1Z_1'', \qquad Z_2 = kZ_1''$$

$$\Theta_4' = \gamma_1\Theta_1'', \qquad \Theta_6 = \delta_1\Theta_1'', \qquad \Theta_2 = m\Theta_1''$$

здесь α_1, β_1, k, γ_1, δ_1, m — произвольные параметры. Этим путем переменные θ и z отделяются и уравнение принимает вид:

$$\left(R_1' + \frac{R_1}{r}\right) + \alpha_1\gamma_1\frac{R_4}{r} + \beta_1\delta_1R_6 - km\frac{R_6}{r} = 0$$

Подобные же операции выполняем над остальными двумя уравнениями (1.2); при этом система (1.2) сведется к системе обыкновенных уравнений, содержащих восемнадцать параметров типа α_1, β_1, $\ldots$, m. Однако из условий совместности этой системы получается ряд зависимостей между функциями R_k, Θ_k, Z_k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) и между введенными параметрами; в результате компоненты тензора напряжений выразятся так:

$$R_r = \frac{C}{r}(rR_1)\,\Theta_1Z_1'', \qquad R_\theta = \frac{A}{r}\,rR_4\Theta_1'Z_1'', \qquad R_z = \frac{B}{r}\,rR_6\Theta_1''Z_1'$$

$$\Theta_\theta = C\,(rR_1)'\,\Theta_1Z_1'' + AR_4\Theta_1''Z_1'' + BrR_6\Theta_1''Z_6''$$

$$\begin{aligned} Z_r = {} & \frac{C}{r^2}(rR_1)'\,\Theta_1''Z_1 + \frac{A}{r^2}(rR_1)'\,\Theta_1''Z_1 + \frac{A}{r^2}R_4\Theta_1''Z_1 + \\ & + \frac{A}{r^2}R_4\Theta_1^{\mathrm{IV}}Z_1 - \frac{B}{r}(rR_6)'\,\Theta_1''Z_1 + B\frac{r}{r^2}R_6\Theta_1^{\mathrm{IV}}Z_1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} Z_\theta = {} & -\frac{C}{r}(rR_4)'\,\Theta_1'Z_1' - \frac{A}{r}(rR_4)'\,\Theta_1'Z_1' - \\ & - \frac{A}{r^2}rR_4\Theta_1'Z_1' - \frac{A}{r^2}rR_4\Theta_1'''Z_1' - \frac{B}{r}rR_6\Theta_1''Z_1 \end{aligned}$$

Здесь A, B, C — новые параметры. Легко видеть, что выражения эти содержат линейно производные от следующих трех функций:

$$f = CrR_1\Theta_1Z_1, \qquad \varphi = ArR_4\Theta_1'Z_1, \qquad \psi = RrR_6\Theta_1''Z_1$$

при этом разделение переменных в них не обязательно. Принимая

$$f(r,\ \theta,\ z), \qquad \varphi(r,\ \theta,\ z), \qquad \psi(r,\ \theta,\ z)$$

за функции напряжений, выразим через них компоненты (1.3):

$$\begin{aligned} & R_r = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \qquad \Theta_\theta = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \psi\right) \\ & R_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \qquad Z_z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \psi\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \\ & R_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad Z_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \psi\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r}\right) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Путем замены функций f, φ и ψ другими полученные выражения можно упростить и привести к окончательному виду:

$$
\begin{aligned}
&R_r = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, \quad \Theta_\theta = \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} \\
&R_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}, \quad Z_z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial r\,\partial\theta} \\
&R_z = \frac{1}{r}\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f_1}{\partial r\,\partial z} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f_3}{\partial\theta\,\partial z}, \quad Z_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f_2}{\partial\theta\,\partial z} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial f_3}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f_3}{\partial r\,\partial z}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Формулы (1.6) дают общее решение уравнений равновесия (1.2). Действительно, покажем, что для всякого заданного тензора напряжений, удовлетворяющего уравнениям (1.2), можно найти соответствующие три функции напряжений f_1, f_2, f_3.

Функции эти находятся из первого, второго и третьего равенств (1.5):

$$
f_1 = r\iint R_r\,dz^2, \qquad f_2 = \iint \Theta_\theta\,dz^2, \qquad f_3 = r\iint R_\theta\,dz^2 \tag{1.6}
$$

Остается показать, что подстановка этих выражений в четвертое, пятое и шестое равенства (1.5) обращает их в тождества. При этом результаты подстановок в пятое и шестое равенства (1.5) оказываются тождествами соответственно на основании третьего и первого из уравнений (1.2). Результат подстановки в четвертое равенство (1.5) имеет вид:

$$
Z_z = \iint (\Phi + \Psi)\,dz^2 \tag{1.7}
$$

Здесь в подинтегральном выражении первое слагаемое

$$
\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial R_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Theta_\theta}{\partial\theta} + \frac{2R_\theta}{r}\right] = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 Z_\theta}{\partial z\,\partial\theta} \tag{1.8}
$$

[последнее на основании третьего из уравнений (1.2)], а второе слагаемое, как можно проверить:

$$
\Psi = \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 R_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 R_\theta}{\partial r\,\partial\theta}\right] = \tag{1.9}
$$

$$
= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial R_\theta}{\partial\theta} + \frac{R_r - \Theta_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial R_\theta}{\partial\theta} + \frac{R_r - \Theta_\theta}{r}\right) = -\frac{\partial^2 R_z}{\partial r\,\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial R_z}{\partial z}
$$

[последнее на основании первого из уравнений (1.2)]. Подстановка (1.8) и (1.9) в (1.7) дает тождество на основании второго из уравнений (1.2).

Выражения (1.5) значительно упрощаются, если напряженное состояние не зависит от полярного угла θ. В этом случае

$$
\begin{aligned}
&R_r = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, \quad R_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}, \quad R_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(f_2 - \frac{\partial f_1}{\partial r}\right) \\
&\Theta_\theta = \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}, \quad Z_\theta = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (rf_3)}{\partial r\,\partial z}, \quad Z_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(f_2 - \frac{\partial f_1}{\partial r}\right)
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Введем вместо f_1, f_2, f_3 другие функции, определяя их так:

$$
\omega = \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, \qquad \psi = f_2 - \frac{\partial f_1}{\partial r}, \qquad \chi = \frac{\partial (rf_3)}{\partial z}
$$

Отсюда

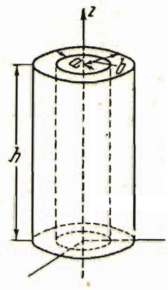
$$
f_2 = \psi + \frac{\partial f_1}{\partial r}, \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial\omega}{\partial r}
$$

Тогда равенства (1.10) примут вид:

$$
\begin{aligned}
&R_r = \frac{\omega}{r}, \quad R_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad R_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} \\
&\Theta_\theta = \frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \quad Z_\theta = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial r}, \quad Z_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Если положим здесь $\chi = 0$, то будем иметь осесимметричное напряженное состояние. Полагая же $\omega = \psi = 0$, придем к случаю чистого кручения тела вращения.

§ 2. Построение корректирующих тензоров. Общее решение уравнений равновесия (1.5), очевидно, дает возможность построить корректирующий тензор для тел, имеющих форму круглого цилиндра или части его (трубы, кольцевого сектора). Для этого предварительно в (1.5) разделим переменные, полагая



Фиг. 1

$$f_1 = R_1\Theta_1 Z_1, \qquad f_2 = R_2\Theta_2 Z_2, \qquad f_3 = R_3\Theta_3 Z_3$$

Тогда равенства (1.5) примут вид:

$$R_r = \frac{1}{r} R_1\Theta_1 Z_1'', \qquad \Theta_\theta = R_2\Theta_2 Z_2'', \qquad R_\theta = \frac{R_2}{r}\Theta_3 Z_3''$$

$$Z_z = \frac{1}{r^2} R_2\Theta'' Z_2 - \frac{R_2'}{r}\Theta_2 Z_2 + \frac{R_1''}{r}\Theta_1 Z_1 + \frac{2R_3'}{r^2}\Theta_2' Z_3 \tag{2.1}$$

$$Z_\theta = -\frac{1}{r} R_2\Theta_2' Z_2' - \frac{1}{r^2} R_3\Theta_3 Z_3' - \frac{1}{r} R_3'\Theta_3 Z_3'$$

$$R_z = \frac{1}{r} R_2\Theta_2 Z_2' - \frac{1}{r} R_1'\Theta_1 Z_1' - \frac{1}{r^2} R_3\Theta_3' Z_3'$$

Рассмотрим наиболее важные случаи трубы и кольцевого сектора.

Труба. Данная область (фиг. 1) двухсвязная; ограничена двумя цилиндрическими поверхностями $r = a$, $r = b$ и двумя плоскостями $z = 0$, $z = h$. Обе цилиндрические поверхности будут свободны от напряжений, если соблюдены условия:

$$R_r = \Theta_r = Z_r = 0 \quad \text{при} \quad r = a \text{ и } r = b \tag{2.2}$$

На основании (2.1) отсюда для функций R_1, R_2 и R_3 имеем условия

$$R_1 = 0, \quad R_1' = 0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = 0 \quad \text{при} \quad r = a \text{ и } r = b \tag{2.3}$$

Торцевые плоскости трубы будут свободны от напряжений при соблюдении условий

$$Z_z = R_z = \Theta_z = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = h \tag{2.4}$$

Отсюда для функций Z_1, Z_2, Z_3 имеем условия

$$Z_k = 0, \qquad Z_k' = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = h \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.5}$$

Что касается функций Θ_1, Θ_2, Θ_3, то вследствие двухсвязности данной области они ограничиваются лишь условием периодичности. Условия (2.3) и (2.5) для функций R_1 и Z_k $(k = 1, 2, 3)$ показывают, что для построения этих функций удобно пользоваться косинус-биномами, системы которых обладают полнотой. Функции Θ_1, Θ_2, Θ_3 в общем случае могут быть даны в форме тригонометрических рядов. На основании сказанного функции напряжений f_1, f_2, f_3 могут быть построены в следующем виде:

$$f_1 = \sum_m\sum_n\sum_p \left(\cos\frac{m\pi(r-a)}{b-a} - \cos\frac{(m+2)\pi(r-a)}{b-a}\right) \times$$
$$\times \left(A_{mnp}\cos n\theta + A'_{mnp}\sin n\theta\right)\left(\cos\frac{p\pi z}{h} - \cos\frac{(p+2)\pi z}{h}\right) \tag{2.6}$$

$$f_2 = \sum_m\sum_n\sum_p \sin\frac{m\pi(r-a)}{b-a}\left(B_{mnp}\cos n\theta + B'_{mnp}\sin n\theta\right)\left(\cos\frac{p\pi z}{h} - \cos\frac{(p+2)\pi z}{h}\right)$$

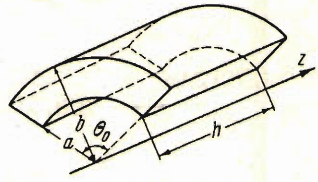
$$f_3 = \sum_m\sum_n\sum_p \sin\frac{m\pi(r-a)}{b-a}\left(C_{mnp}\cos n\theta - C'_{mnp}\sin n\theta\right)\left(\cos\frac{p\pi z}{h} - \cos\frac{(p+2)\pi z}{h}\right)$$

Здесь $m = 1, 2, 3 \ldots, \; n = 0, 1, 2, \ldots, \; p = 0, 1, 2, \ldots$ и обозначены через

$$A_{mnp}, \quad B_{mnp}, \quad C_{mnp}, \quad A'_{mnp}, \quad B'_{mnp}, \quad C'_{mnp}$$

коэффициенты, необходимые для варьирования упругой энергии. Если координатная плоскость $\theta = 0$ является плоскостью симметрии напряженного состояния, то можно положить

$$A'_{mnp} = B'_{mnp} = C'_{mnp} = 0.$$

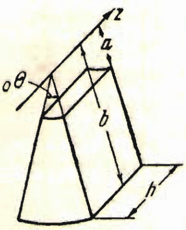


Фиг. 2

Кольцевой сектор. В этом случае (фиг. 2 и 3) имеется односвязная область.

Пусть координатная плоскость $\theta = 0$ совпадает с одной из граней сектора, проходящих через ось z.

Условия на цилиндрических поверхностях и на торцевых плоскостях такие же, как и в случае трубы. Следовательно, для функций R_k и Z_k $(k = 1, 2, 3)$ сохраняются условия (2.3) и (2.5).



Фиг. 3

Для радиальных граней необходимо поставить условия

$$R_\theta = \Theta_\theta = Z_\theta = 0 \qquad \text{при } \theta = 0 \text{ и } \theta = \theta_0 \tag{2.7}$$

Отсюда на основании (2.1) для функций Θ_2 и Θ_3 получим условия

$$\Theta_2 = 0, \qquad \Theta_2' = 0, \qquad \Theta_3 = 0 \quad \text{при } \theta = 0 \text{ и } \theta = \theta_0 \tag{2.8}$$

Эти условия будут удовлетворены, если положим

$$\Theta_2 = \cos\frac{n\pi\theta}{\theta_0} - \cos\frac{(n+2)\pi\theta}{\theta_0}, \qquad \Theta_3 = \sin\frac{n\pi\theta}{\theta_0} \tag{2.9}$$

Функция Θ_1 при этом остается произвольной; функции напряжений представляются в следующем виде:

$$f_1 = \sum\sum\sum A_{mnp}\left(\cos\frac{m\pi(r-a)}{b-a} - \cos\frac{(m+2)\pi(r-a)}{b-a}\right)\Theta_{1,n}\left(\cos\frac{p\pi z}{h} - \cos\frac{(p+2)\pi z}{h}\right)$$

$$f_2 = \sum\sum\sum B_{mnp}\sin\frac{m\pi(r-a)}{b-a}\left(\cos\frac{n\pi\theta}{\theta_0} - \cos\frac{(n+2)\pi\theta}{\theta_0}\right)\left(\cos\frac{p\pi z}{h} - \cos\frac{(p+2)\pi z}{h}\right)$$

$$f_3 = \sum\sum\sum C_{mnp}\sin\frac{m\pi(r-a)}{b-a}\sin\frac{n\pi\theta}{\theta_0}\left(\cos\frac{p\pi z}{h} - \cos\frac{(p+2)\pi z}{h}\right) \tag{2.10}$$

Кольцевой сектор в зависимости от величины центрального угла может получать форму или круговой цилиндрической оболочки, например свода конечной длины (фиг. 2), или усеченного клина (фиг. 3), т. е. консоли, или подпорной стенки.

Для решения соответствующих задач необходимо к полученному корректирующему тензору присоединить основной тензор, зависящий от нагрузок, приложенных на поверхности. Решение (1.5) или (2.1) позволит решить и эту часть задачи. Дальнейшее решение сведется к использованию вариационного уравнения Кастильяно.

Поступила 7 VI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
2. Филоненко-Бородич М. М. Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда. ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.
3. Крутков Ю. А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.
4. Блох В. И. Функции напряжений в теории упругости. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.