Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

# ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА КОЛЕБАНИЙ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

А. С. Меляховецкий

(Сталино)

Для поперечных малых колебаний упругого стержня имеют место свойства, которые в наиболее общей форме установлены М. Г. Крейном [1]. Для сжатого стержня некоторые осцилляционные теоремы доказаны М. Г. Крейном в предположении, что сжимающее усилие является постоянным [2].

В этой статье доказывается, что те же свойства имеют место для колебаний стержня, сжатого произвольной кусочно-непрерывной осевой нагрузкой при определенных способах закрепления концов стержня.

§ 1. Рассмотрим прямолинейный стержень $S$ длиной $l$, сжатый осевой нагрузкой $Pf(x)$, где $f(x)$ — кусочно-непрерывная, положительная функция для всех $x$.

Обозначим через $H(x, s; P)$ функцию влияния прогибов стержня $S$ и запишем для $S$ интегро-дифференциальное уравнение собственных колебаний:

$$y(x, t) = -\int_0^l H(x, s; P) \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2} d\sigma(s) \tag{1.1}$$

где $d\sigma(s)$ — масса элемента $ds$.

Полагая $y(x, t) = \varphi(x) \sin(pt + \alpha)$, получим однородное нагруженное интегральное уравнение с симметрическим и положительно определенным ядром:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^l H(x, s; P) \varphi(s) d\sigma(s) \tag{1.2}$$

Покажем, что при определенных способах закрепления концов стержня и при всех значениях $P$, меньших некоторого $P_1$, ядро этого интегрального уравнения является осцилляционным и, следовательно, при колебаниях сжатого стержня имеет место весь комплекс осцилляционных свойств [1].

§ 2. Рассмотрим сначала стержень, один конец которого $(0, 0)$ жестко закреплен, а второй $(l, 0)$ свободен (консоль). В дальнейшем будем пользоваться обозначением

$$K_{pq}(x, s) = \frac{\partial^{p+q} K(x, s)}{\partial x^p \partial s^q}$$

Пусть $K_{11}(x, s)$ — функция влияния углов поворота (угол поворота в точке $x$ при действии единичной сосредоточенной пары в точке $s$). Эта функция является функцией Грина следующей краевой задачи:

$$\frac{d}{dx}\left(B \frac{dU}{dx}\right) = 0, \qquad U(0) = U(l) = 0 \tag{2.1}$$

где $B = EI(x)$ — изгибная жесткость стержня.

Как нетрудно видеть, условие

$$\Big[K_{21}(x, s)\Big]_{x=s-0}^{x=s+0} = -\frac{1}{B(s)} \tag{2.2}$$

естественно, означает условие разрыва изгибающего момента в точке приложения единичной пары. Функцию $K_{11}(x, s)$ можно рассматривать как функцию влияния неоднородной струны с одним закрепленным и другим скользящим концом и, следовательно, $K_{11}(x, s)$ является однопарной осцилляционной функцией.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение продольного изгиба стержня (2.1)

$$y'(x) = P\int_0^l K_{11}(x, s)\, y'(s)\, d\tau(s) \qquad (d\tau(s) = f(s)\, ds) \tag{2.3}$$

Резольвента этого интегрального уравнения $H_{11}(x, s; P)$, являющаяся одновременно функцией влияния углов поворота сжатого стержня, также будет однопарным осцилляционным ядром при всех $P < P_1$; здесь $P_1$ — наименьшее собственное число интегрального уравнения (2.3). Этот факт можно интерпретировать следующим образом.

1. Под действием одной сосредоточенной пары угол поворота $y'(x)$ отличен от нуля и имеет тот же знак, что и пара $(0 < x \leqslant l)$.

2. Под действием $n$ сосредоточенных пар угол поворота может менять знак не более чем $n-1$ раз.

**§ 3.** Докажем теперь следующую теорему.

*Теорема.* Функция влияния прогибов сжатой консоли $H(x, s; P)$ при всех $P < P_1$ является осцилляционной.

Для доказательства теоремы достаточно показать выполнение следующих двух условий.

1. $$H(x, s; P) > 0 \qquad (0 < x,\ s \leqslant l)$$

2. Под действием $n$ сосредоточенных сил прогиб меняет знак не более $n-1$ раз.

Так как ядра $K_{11}(x, s)$ и $H_{11}(x, s; P)$ — осцилляционные, то, как известно [3]:

$$H(x, s; P) = K(x, s) + P\int_0^l K_{01}(x, r)\, H_{10}(r, s; P)\, d\tau(r)$$

$$K(x, s) > 0, \qquad K_{01}(x, s) = \int_0^x K_{11}(r, s)\, dr > 0, \qquad H_{10}(x, s; P) = \int_0^s H_{11}(x, r; P)\, dr > 0 \tag{3.1}$$

Следовательно,

$$H(x, s; P) > 0$$

Допустим, что под действием $n$ сосредоточенных сил прогиб

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i H(x, s_i; P)$$

меняет знак $n$ раз. Функция $y(x)$ имеет, очевидно, $n$ узлов внутри отрезка $[0, l]$ и, кроме того, $y(0) = 0$.

Тогда производная

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i H_{10}(x, s_i; P)$$

имеет внутри $[0, l]$ по крайней мере $n$ узлов.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — узлы функции $y'(x)$. Рассмотрим систему

$$\sum_{i=1}^{n} X_i H_{10}(x_j, s_i; P) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Определитель этой системы $|H_{10}(x_j, s_i; P)|_1^n$ равен нулю, так как система (3.2) имеет нетривиальное решение $\{F_1, \ldots, F_n\}$.

Введем функцию

$$\begin{vmatrix} H_{10}(x_1, s; P) & H_{10}(x_1, s_2; P) \ldots H_{10}(x_1, s_n; P) \\ H_{10}(x_2, s; P) & H_{10}(x_2, s_2; P) \ldots H_{10}(x_2, s_n; P) \\ \ldots & \ldots \\ H_{10}(x_n, s; P) & H_{10}(x_n, s_2; P) \ldots H_{10}(x_n, s_n; P) \end{vmatrix} = \Delta(s, P) \tag{3.3}$$

Функция $\Delta(s, P)$ обращается в нуль при $s = 0, s_1, s_2, \ldots, s_n$ и, следовательно, ее производная

$$\begin{vmatrix} H_{11}(x_1, s; P) & H_{10}(x_1, s_2; P) \ldots H_{10}(x_1, s_n; P) \\ H_{11}(x_2, s; P) & H_{10}(x_2, s_2; P) \ldots H_{10}(x_2, s_n; P) \\ \ldots & \ldots \\ H_{11}(x_n, s; P) & H_{10}(x_n, s_2; P) \ldots H_{10}(x_n, s_n; P) \end{vmatrix} = \Delta'(s, P) \tag{3.4}$$

имеет внутри $[0, l]$ по крайней мере $n$ узлов.

Раскрывая определитель (3.4) по элементам первого столбца, получим

$$\Delta'(s, P) = \sum_{k=1}^{n} A_k H_{11}(x_k, s; P) \quad \text{или} \quad \Delta'(s, P) = \sum_{k=1}^{n} A_k H_{11}(s, x_k; P) \tag{3.5}$$

Считая $A_k$ величинами сосредоточенных моментов, приложенных в точках $x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, приходим к выводу, что угол поворота

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k H_{11}(x, x_k; P) \tag{3.6}$$

меняет знак по крайней мере $n$ раз, что невозможно, так как функция $H_{11}(x, s; P)$ осцилляционная. Теорема доказана.

Отметим, что из доказательства следует неравенство нулю всех $A_k$, как и вообще всех миноров любого порядка определителя

$$|H_{10}(x_j, s_i; P)|_1^n$$

В самом деле, допустив, что какое-либо $A_k = 0$, и построив для минора $A_k$ функцию $\Delta_1(s, P)$, мы пришли бы к выводу, что либо под действием $n - 1$ сосредоточенной пары угол поворота $n - 1$ раз меняет знак, либо все миноры первого столбца $\Delta_1(s, P)$ равны нулю.

Выбрав из них один и продолжая рассуждения, мы в конце концов пришли бы к заключению, что функция $H_{10}(x, s; P)$ в некоторой внутренней точке равна нулю, что невозможно.

§ 4. Введем теперь в точке $l$ шарнирную опору. Функция влияния прогибов стержня $S^*$ с дополнительной опорой

$$H^*(x, s; P) = \frac{1}{H(l, l; P)} \begin{vmatrix} H(x, s; P) & H(x, l; P) \\ H(l, s; P) & H(l, l; P) \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

также будет осцилляционной [1] для всех $P < P_1$.

Для доказательства осцилляционности функции влияния прогибов сжатого стержня с обоими жестко закрепленными концами рассмотрим предварительно стержень $S^\circ$, один конец которого жестко закреплен, а второй жестко защемлен.

Функция $K_{11}{}^\circ(x, s)$ для такого стержня будет функцией Грина следующей краевой задачи:

$$\frac{d}{dx}\left(B\,\frac{dU}{dx}\right) = 0, \qquad U(0) = U(l) = 0 \tag{4.2}$$

т. е. будет функцией влияния неоднородной струны с неподвижно закрепленными концами.

Очевидно, что и в этом случае ядро $K_{11}{}^\circ(x, s)$ и его резольвента $H_{11}{}^\circ(x, s; P)$ являются однопарными осцилляционными ядрами, а значит, и функция $H^\circ(x, s; P)$ стержня $S^\circ$ является осцилляционной для всех $P < P_1{}^\circ$. Введя в точке $l$ дополнительную шарнирную опору, мы получим стержень $S^{\circ *}$ с обоими жестко закрепленными концами и осцилляционной функцией $H^{\circ *}(x, s; P)$.

Таким образом, осцилляционность функции влияния прогибов сжатого стержня $H(x, s; P)$ доказана для следующих видов закрепления концов стержня: а) консоль, б) один конец жестко закреплен, на другом шарнир, в) оба конца жестко закреплены.

Отметим, что для случаев б) и в) граничные условия в точке $l$ можно несколько «смягчить», заменив шарнир упругой опорой.

Во всех отмеченных случаях собственные колебания сжатого стержня обладают [1] следующими свойствами: 1) все частоты $p_j$ являются простыми; 2) основной тон не имеет узлов; 3) $j$-й обертон имеет точно $j$ узлов; 4) узлы двух последовательных обертонов перемежаются; 5) в колебании, получающемся путем наложения собственных колебаний с частотами $p_k < p_l < \dots < p_m$, число перемен знака прогиба с течением времени колеблется в пределах от $k$ до $m$.

Поступила 29 IX 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. ГТТИ, 1950.
2. Крейн М. Г. Про деякі прикладання ядер Келлога до проблем осциляціі. Сообщения Харьковского математического общества, серия 4, т. 11, 1935.
3. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. ГТТИ, 1949.