Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

О РАСПРОСТРАНЕНИИ МГНОВЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ НАПРЯЖЕНИЙ ОТ ДЕФОРМАЦИЙ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

Постановка и рассмотрение основных задач динамики сплошных сред, отклоняющихся от закона Гука, принадлежит Х. А. Рахматулину [1,2] . В данной работе распространение плоских волн в полупространстве, материал которого удовлетворяет произвольной связи напряжений с деформациями, изучается при помощи метода размерностей, применявшегося Л. И. Седовым [3] для построения точных решений различных задач механики сплошных сред.

§ 1. Рассмотрим полупространство, ограниченное плоскостью $x = 0$, материал которого удовлетворяет следующей связи напряжений с деформациями:

$$\sigma = \rho_0 V^2 \varphi(\varepsilon) \tag{1.1}$$

где σ — напряжение, ε — деформация, ρ_0 — плотность недеформированного материала, V — некоторая константа, имеющая размерность скорости. Из теории размерностей следует [3], что в таком виде может быть представлена любая зависимость напряжений от деформаций. В дальнейшем предполагается, что функция $\varphi(\varepsilon)$ имеет непрерывную вторую производную.

Уравнение распространения возмущений в пространстве плоскими волнами имеет, как известно [4], вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \varphi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

где x — координата, t — время, u — смещение по оси x. Это уравнение описывает распространение возмущений, не предполагаемых бесконечно малыми.

Рассмотрим в предположении произвольной $\varphi(\varepsilon)$ следующую задачу о распространении плоских волн в полупространстве. В начальный момент смещение и скорость частиц полупространства равны нулю; к ограничивающей плоскости $x = 0$ в начальный момент прикладывается некоторое напряжение, однородное вдоль этой плоскости, которое в дальнейшем остается постоянным. Такая постановка задачи отвечает следующим граничным и начальным условиям:

$$u(x, 0) = 0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha \tag{1.3}$$

Здесь α — некоторая безразмерная константа; для определенности положим $\alpha > 0$. Из теории размерностей следует [3], что решение задачи $u(x, t)$ имеет вид:

$$u = -Vtf\left(\frac{x}{Vt}\right) \tag{1.4}$$

где f — некоторая функция, т. е. решение задачи автомодельно. Подставляя (1.4) в (1.2), получим для функции f обыкновенное дифференциальное уравнение:

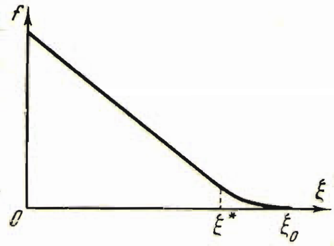
$$f''(\xi)\{\xi^2 - \varphi'[-f'(\xi)]\} = 0 \qquad \left(\xi = \frac{x}{Vt}\right) \tag{1.5}$$

§ 2.1°. Рассматриваемая задача была решена ранее Х. А. Рахматулиным[1] в предположении $\varphi'' \leqslant 0$. В этом случае найденная Х. А. Рахматулиным функция $f(\xi)$ отлична от нуля (фиг. 1) на отрезке от нуля до точки $\xi_0 = \sqrt{\varphi'(0)}$. От точки $\xi = \xi_0$ до точки $\xi = \xi^* = \sqrt{\varphi'(\alpha)}$ функция $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi^2 - \varphi'[-f'(\xi)] = 0 \tag{2.1}$$

при условии

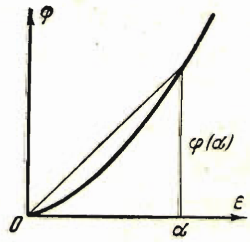
$$f(\xi_0) = 0 \tag{2.2}$$



Фиг. 1

Соответствующее этому участку движение Х. А. Рахматулин назвал волнами Римана. Далее, от точки $\xi = \xi^*$ и до $\xi = 0$ функция $f(\xi)$ представляется в виде прямой $f'(\xi) = -\alpha$. Таким образом, решение Х. А. Рахматулина непрерывно и обладает непрерывными производными.

2°. Рассмотрим случай, когда $\varphi''(\varepsilon) \geqslant 0$ (фиг. 2). Примем, что $\varphi'' \not\equiv 0$ ни на каком конечном отрезке. Это ограничение не является ни в какой мере существенным. Из предыдущего следует, что функция $f(\xi)$ либо удовлетворяет уравнению (2.1), либо удовлетворяет уравнению $f''(\xi) = 0$, т. е. $f(\xi) = p - q\xi$. Очевидно, что и в этом случае функция $f(\xi)$ отлична от нуля лишь на некотором конечном промежутке $(0, \xi_0)$. Предположим, что вблизи $\xi = \xi_0$ функция $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению (2.1). Анализ этого уравнения в рассматриваемом случае показывает, что при уменьшении ξ величина $\varphi'[-f'(\xi)]$ уменьшается; $[-f'(\xi)]$ также уменьшается.



Фиг. 2

Таким образом, поверхность $x = \xi_0 Vt$ является поверхностью разрыва напряжений. Это обстоятельство, очевидно, будет иметь место также, если $f(\xi)$ вблизи $\xi = \xi_0$ представляется отрезком прямой линии.

Поверхность разрыва напряжений $x = \xi_0 Vt$ отделяет возмущенную часть полупространства от невозмущенной. На этой поверхности должны выполняться условие сохранения массы и закон импульса. Как известно[5], эти условия носят совершенно общий характер и для произвольной непрерывной среды имеют вид:

$$\rho_1 (D - V_1) = \rho_0 D, \qquad \rho_1 V_1 (D - V_1) + \sigma_1 = 0 \tag{2.3}$$

(имея в виду, что справа от поверхности $x = \xi_0 Vt$ — покой и недеформированная среда). Здесь V_1 — скорость слева от поверхности разрыва $x = \xi_0 Vt$, $D = \xi_0 V$ — скорость перемещения поверхности разрыва $x = \xi_0 Vt$, ρ_1 — плотность слева от поверхности разрыва, σ_1 — напряжение слева от поверхности разрыва. Имеем

$$V_1 = \xi_0 V f'(\xi_0), \qquad \sigma_1 = \rho_0 V^2 \varphi[-f'(\xi_0)] \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3), получаем

$$\rho_1 = \frac{1}{1 - f_1'(\xi_0)} \rho_0, \qquad \xi_0^2 f'(\xi_0) + \varphi[-f'(\xi_0)] = 0 \tag{2.5}$$

Используя (2.1) и полагая $-f'(\xi_0) = \lambda$, получаем отсюда

$$\lambda\varphi'(\lambda) - \varphi(\lambda) = 0 \tag{2.6}$$

Но имеем

$$\lambda\varphi'(\lambda) - \varphi(\lambda) \equiv \int_0^\lambda \varphi''(\lambda)\, \lambda\, d\lambda \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что при $\varphi'' \geqslant 0$ равенство (2.6) возможно лишь при $\lambda = 0$, т. е.

$$f'(\xi_0) = 0 \tag{2.8}$$

Последнее не может иметь места, так как при уменьшении ξ величина $[-f'(\xi)]$ по доказанному должна убывать. Таким образом, вблизи точки $\xi=\xi_0$ функция $f(\xi)$ представляется отрезком прямой линии. Покажем теперь, что ни в какой точке $\xi_1<\xi_0$ не может произойти непрерывный переход прямой линии в решение уравнения (2.1). В самом деле, пусть прямая линия удовлетворяет уравнению $f'(\xi)=-q$; для возможности непрерывного перехода нужно, чтобы $q>\alpha$. Из второго условия (2.5) следует, что $\xi_0^2=\varphi(q)/q$. В точке ξ_1 функция $f'(\xi)$ непрерывна и равна $-q$. Так как слева от точки ξ_1 функция $f(\xi)$ представляется решением уравнения (2.1), то имеем соотношение $\xi_1^2=\varphi'(q)$. Но так как $\xi_1^2<\xi_0^2$, то должно быть $\varphi'(q)<<\varphi(q)/q$, чего по предыдущему не может быть ни для какого q. Далее, прямая $f'(\xi)=-q$ не может переходить в решение уравнения (2.1) и через поверхность разрыва напряжений. В самом деле, можно показать, что из закона импульсов следует соотношение на этой поверхности

$$\varphi'(q)=\frac{\varphi(p)-\varphi(q)}{p-q}$$

где p — абсолютная величина деформации слева от поверхности разрыва. При $\varphi''>0$ это соотношение может быть выполнено лишь при $p=q$, т. е. при непрерывном переходе, которого по предыдущему не может быть.

Можно показать, что переход через поверхность разрыва напряжений с прямой $f'(\xi)=-q$, переходящей через ξ_0, на другую прямую $f'(\xi)=-p$ невозможен. При $q>p$ это следует из термодинамических соображений, при $q<p$ — из-за невозможности удовлетворить закону импульсов на поверхности разрыва.

Таким образом, функция $f(\xi)$ на всем отрезке $0\leqslant\xi\leqslant\xi_0$ представляется в виде прямой:

$$f(\xi)=\begin{cases} q(\xi_0-\xi) & (0\leqslant\xi\leqslant\xi_0)\\ 0 & (\xi\geqslant\xi_0)\end{cases}$$

Из условия $(\partial u/\partial x)_{x=0}=\alpha$ следует, что $q=\alpha$. Далее, из второго условия (2.5) следует

$$\xi_0=\sqrt{\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}},\qquad D=\sqrt{\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}}\,V \tag{2.9}$$

Отсюда

$$u(x,t)=\begin{cases}\sqrt{\alpha\varphi(\alpha)}\,Vt-\alpha x & (0\leqslant x\leqslant x_0)\\ 0 & (x\geqslant x_0)\end{cases}\qquad \left(x_0=\sqrt{\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}}\,Vt\right) \tag{2.10}$$

Покажем, что в возникающей поверхности разрыва напряжений происходит потеря механической энергии. Рассмотрим энергию E деформированной части полупространства, приходящуюся на единицу площади ограничивающей плоскости. Пусть

$$\chi(\alpha)=2V^2\int_0^\alpha\varphi(t)\,dt \tag{2.11}$$

Тогда

$$E=\frac{1}{2}\int_0^{\xi_0Vt}\left\{\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\rho_0\chi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}dx=\left\{\frac{\alpha\varphi(\alpha)}{2}+\int_0^\alpha\varphi(t)\,dt\right\}\rho_0V^2\sqrt{\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}}\,t \tag{2.12}$$

Легко показать, что как и все, что говорилось ранее, последнее выражение справедливо и для конечных деформаций. В самом деле,

$$E=\frac{1}{2}\int_{u(0,t)}^{\xi_0Vt}\left\{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\chi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}dx' \tag{2.13}$$

где ρ — плотность деформированного материала, а x' — координата деформированного полупространства. Но из уравнения сохранения массы следует, что $\rho_0 dx = \rho\, dx'$, где x — координата недеформированного полупространства, откуда и следует выражение (2.13).

Работа приложенной силы, приходящаяся на единицу площади ограничивающей плоскости, равна

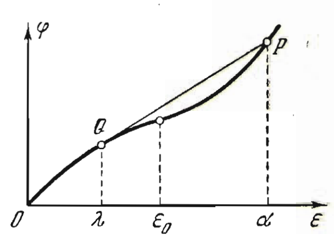
$$A = \sigma(\alpha)\, u(0, t) = \rho_0 V^3 t \varphi(\alpha) \sqrt{\alpha\varphi(\alpha)} \tag{2.14}$$

Отсюда и из формулы (2.13) получаем

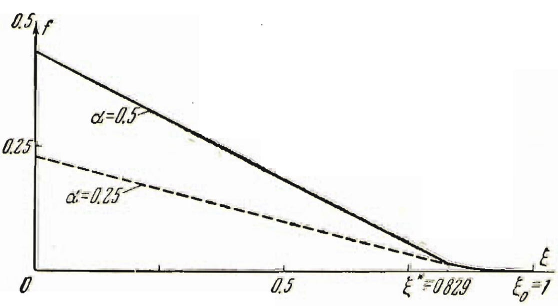
$$A - E = \frac{\rho_0 V^3 t}{\alpha} \sqrt{\alpha\varphi(\alpha)} \left\{ \frac{\alpha\varphi(\alpha)}{2} - \int_0^\alpha \varphi(t)\, dt \right\} \tag{2.15}$$

Но в случае $\varphi'' \geqslant 0$ выражение в фигурных скобках предыдущего равенства положительно, как это следует из фиг. 2. Таким образом, работа приложенной силы больше, чем энергия деформированной части полупространства. Отсюда следует, что часть энергии теряется в поверхности разрыва напряжений. Легко видеть, что в случае, рассмотренном в предыдущем пункте, потери энергии не происходит.

§ 3.1°. Рассмотрим теперь случай, когда φ'' меняет знак в рассматриваемой области деформаций. Пусть сперва φ'' обращается в нуль в рассматриваемой области один раз и меняет знак возрастая (фиг. 3). Если деформация в ограничивающей плоскости не превосходит ε_0, то в рассуждениях п. 1° § 2 ничего не меняется. Пусть



Фиг. 3



Фиг. 4

теперь деформация в ограничивающей плоскости такова, что $\alpha > \varepsilon_0$, $\varphi(\alpha) < \alpha\varphi'(0)$. Исследование, подобное предыдущему, показывает (фиг. 4), что функция $f(\xi) \neq 0$ лишь при $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 = \sqrt{\varphi'(0)}$. От точки ξ_0 до некоторой точки ξ^* функция $f(\xi)$ является решением уравнения (2.1) при условии (2.2), непрерывна и обладает непрерывной производной. Поверхность $x = \xi^* V t$ является поверхностью разрыва напряжений. На этой поверхности имеют место условия [5]

$$\rho_1 (D - V_1) = \rho_2 (D - V_2) \tag{3.1}$$

$$\rho_1 V_1 (D - V_1) + \sigma_1 = \rho_2 V_2 (D - V_2) + \sigma_2 \tag{3.2}$$

Но из уравнения непрерывности следует, что

$$\rho_1 = \frac{1}{1 - f_1'(\xi)} \rho_0 \tag{3.3}$$

Далее

$$D = \xi^* V, \quad V_1 = \xi^* V f_1'(\xi^*), \quad V_2 = \xi^* V f_2'(\xi^*) \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что

$$\rho_1 (D - V_1) = \rho_2 (D - V_2) = \rho_0 \xi^* V \tag{3.5}$$

Условие (3.2) дает

$$\xi^{*2} = \frac{\varphi[-f_2'(\xi^*)] - \varphi[-f_1'(\xi^*)]}{[-f_2'(\xi^*)] - [-f_1'(\xi^*)]} \tag{3.6}$$

Вполне аналогично предыдущему можно показать, что слева от поверхности разрыва напряжений, т. е. при $\xi \leqslant \xi^*$, функция $f(\xi)$ представляется в виде прямой $f'(\xi) = f_2'(\xi) = -\alpha$. Полагая $f_1'(\xi^*) = -\lambda$, получаем

$$\xi^{*2} = \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(\lambda)}{\alpha - \lambda} \tag{3.7}$$

Справа от поверхности разрыва напряжений $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению (2.1); поэтому

$$\xi^{*2} = \varphi'[-f_1'(\xi^*)] = \varphi'(\lambda)$$

т. е. имеем соотношение для определения λ:

$$\varphi'(\lambda) = \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(\lambda)}{\alpha - \lambda} \tag{3.8}$$

Это соотношение показывает, что для определения λ можно применить простое геометрическое построение: из точки P, отвечающей данному α на кривой $\varphi(\alpha)$, проведем касательную PQ к этой кривой; абсцисса точки касания и есть искомое λ. Легко видеть, что в предположениях задачи λ существует и единственно. Очевидно, что при изменении α от ε_0 до α_0, для которого $\varphi(\alpha_0) = \alpha_0\varphi'(0)$, величина ξ^{*2} возрастает от $\varphi'(\varepsilon_0)$ до $\varphi'(0)$. Остановимся на балансе механической энергии в рассматриваемой задаче. Легко видеть, что работа приложенной силы равна

$$A = \rho_0 V^3 t \varphi(\alpha)\,[f(\xi^*) + \alpha\xi^*] \tag{3.9}$$

Далее, энергия E деформированной части полупространства равна

$$E = E_1 + E_2 \tag{3.10}$$

где E_1 — энергия части полупространства от $\xi = 0$ до $\xi = \xi^*$ и E_2 — энергия части полупространства от $\xi = \xi^*$ до $\xi = \xi_0$. Вполне аналогично предыдущему получим

$$E_1 = \frac{1}{2}\rho_0 V^3 t \xi^*\,[f(\xi^*) + \alpha\xi^*] + \rho_0 V^3 t \xi^* \int_0^\alpha \varphi(t)\,dt \tag{3.11}$$

Для вычисления E_2 поступим следующим образом. Рассмотрим такую же задачу, как и изучаемая, но пусть деформация в ограничивающей плоскости равна λ. При этом энергия части полупространства от $\xi = \xi^*$ до $\xi = \xi_0$ равна тому же E_2, но так как λ непременно меньше ε_0, то движение непрерывно и потери механической энергии не происходит, т. е. работа приложенной силы равна энергии деформированной части полупространства. Отсюда легко получим

$$E_2 = [f(\xi^*) + \lambda\xi^*]\,\rho_0 V^2 t \varphi(\lambda) - \frac{1}{2}\rho_0 V^3 t \xi^*\,[f(\xi^*) + \lambda\xi^*]^2 - \rho_0 V^3 \xi^* t \int_0^\lambda \varphi(t)\,dt \tag{3.12}$$

Пользуясь формулами (3.9), (3.10), (3.11) и (3.12), получим

$$A - E = \rho_0 V^3 t \xi^* \left\{\frac{\alpha - \lambda}{2}\,[\varphi(\alpha) + \varphi(\lambda)] - \int_\lambda^\alpha \varphi(t)\,dt\right\} \tag{3.13}$$

В рассматриваемом случае выражение в фигурных скобках положительно, как это легко следует из рассмотрения фиг. 3. Это выражение для потери энергии, как и соответствующее выражение для случая, рассмотренного в п. 2° § 2, можно получить, используя общее выражение для потери энергии в поверхности разрыва напряжений, данное в работе Х. А. Рахматулина [1], учитывая, что в области, где движение непрерывно, потеря энергии не имеет места.

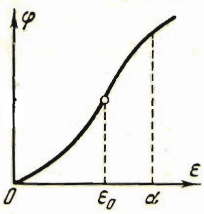
Уравнение (2.1) легко интегрируется в параметрической форме:

$$f = -\frac{1}{2}\int_0^p \frac{p\varphi''(p)\,dp}{\sqrt{\varphi'(p)}}, \qquad \xi = \sqrt{\varphi'(p)} \tag{3.14}$$

Константа интегрирования определилась из условия $f = 0$ при $\xi = \xi_0 = \sqrt{\varphi'(0)}$.

Таким образом, в рассматриваемом случае возникает поверхность разрыва напряжений, которая передвигается позади переднего фронта возмущения. Часть работы приложенной силы теряется в возникающей поверхности разрыва. Если $\alpha > \alpha_0$, то движение становится полностью подобным рассмотренному в п. 2° § 2, т. е. функция $f(\xi)$ изображается отрезком прямой линии.

2°. В случае, если $\varphi''(\xi)$ меняет знак убывая, а остальные предположения задачи остаются такими же, как и в предыдущем разделе (фиг. 5), функции f строится следующим образом. Если $\alpha < \varepsilon_0$, то в рассуждениях п. 2° § 2 ничего не меняется и функция $f(\xi)$ строится способом, там указанным. Если $\alpha > \varepsilon_0$, то движение становится непрерывным, поверхность разрыва пропадает и функция $f(\xi)$ строится так (фиг. 1). От точки ξ_0 до точки ξ^* функция $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению (2.1) при условии (2.2). При этом $\xi_0^2 = \varphi'(\varepsilon_0)$, $\xi^{*2} = \varphi'(\alpha)$. От точки ξ^* до $\xi = 0$ функция $f(\xi)$ представляется отрезком прямой $f'(\xi) = -\alpha$. Таким образом, функция $f(\xi)$ непрерывна вместе со своей производной. Работа приложенной силы равна энергии деформированной части полупространства.



Фиг. 5

§ 4. Рассмотрим примеры решений с поверхностями разрыва напряжений.

1. Пусть $\varphi = \varepsilon + \beta\varepsilon^2$, $\beta > 0$. Решение имеет вид:

$$u = \begin{cases} \alpha\sqrt{1+\alpha\beta}\, t - \alpha x, & 0 \leqslant x \leqslant x_0 = \sqrt{1+\alpha\beta}\, t \\ 0 & x \geqslant x_0 \end{cases}$$

2. Пусть (фиг. 6) $\varphi = \varepsilon - \beta\varepsilon^2 + \gamma\varepsilon^3$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\beta / 3\gamma < \alpha < \beta / \gamma$. Тогда $\varphi'(\varepsilon) > 0$, если $3\gamma / \beta^2 > 1$. Уравнение (2.1) при этом принимает следующий вид:

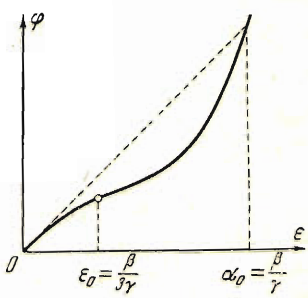
$$f'(\xi) = \frac{\beta}{3\gamma}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{3\gamma}{\beta^2}(\xi^2 - 1)}\right]$$

Формула (3.6) дает

$$\xi^{*2} = \frac{(3\alpha\gamma - \beta)^2 + 4(3\gamma - \beta^2)}{12\gamma}$$

При $\xi_0 \geqslant \xi \geqslant \xi^*$ функция $f(\xi)$ выражается так:

$$f(\xi) = \frac{\beta}{3\gamma}(1-\xi) - \frac{\beta}{6\gamma}\left[1 - \xi\sqrt{\frac{3\gamma}{\beta^2}\xi^2 - \left(\frac{3\gamma}{\beta^2} - 1\right)}\right] + \frac{(3\gamma - \beta^2)}{6\gamma\sqrt{3\gamma}}\ln\left[\frac{\sqrt{3\gamma} + \beta}{\sqrt{3\gamma}\xi + \sqrt{3\gamma\xi^2 - (3\gamma - \beta^2)}}\right]$$



Фиг. 6

Положим $\beta = \gamma = 1$, $\alpha = 0.5$; тогда после вычислений последовательно получим

$$\xi^* = \frac{1}{4}\sqrt{11}, \qquad f_1'(\xi^*) = -0.25, \qquad f_2'(\xi^*) = -0.5, \qquad \xi_0 = 1;$$

$$f(\xi) = \frac{1-\xi}{3} - \frac{1}{6}\left[1 - \xi\sqrt{3\xi^2 - 2}\right] + \frac{2}{3\sqrt{2}}\ln\left[\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}\xi + \sqrt{3\xi^2 - 2}}\right] \qquad (\xi^* \leqslant \xi \leqslant \xi_0)$$

График функции $f(\xi)$ дан на фиг. 4.

В заключение автор благодарит Л. И. Седова и Х. А. Рахматулина за ценные указания при выполнении настоящей работы.

Поступила 20 III 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации. Уч. записки МГУ, вып. 152, 1951.
2. Рахматулин Х. А. О распространении волны разгрузки. ПММ, т. IX, вып. 1, 1945.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, 1951.
4. Ильюшин А. А. Пластичность. ГИТТЛ, 1948.
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950.