Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ВНЕШНИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

А. Г. Свешников

(Москва)

1. Решение внешних задач теории упругости в случае установившихся колебаний одним требованием определенного порядка роста решения на бесконечности определяется неоднозначно. Как показано рядом авторов [1, 2], для однозначного определения решения должны выполняться дополнительные «условия излучения» на бесконечности. Так, В. Д. Купрадзе [1] формулирует эти условия отдельно для продольной $\mathbf{u}_1$ и поперечной $\mathbf{u}_2$ составляющих вектора смещения $\mathbf{u}\,(\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$ в следующем виде:

$$r\mathbf{u}_1 = O(1), \qquad r\left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial r} - ik_1\mathbf{u}_1\right) = o(1)$$
$$r\mathbf{u}_2 = O(1), \qquad r\left(\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial r} - ik_2\mathbf{u}_2\right) = o(1) \qquad (1.1)$$

Постоянные k_1 и k_2 определяются через характеристики среды. Как показано И. Н. Векуа [2], условия $r\mathbf{u}_1 = O(1)$, $r\mathbf{u}_2 = O(1)$ являются излишними.

Условия (1.1) однозначно определяют решение внешней краевой задачи теории упругости, представимое в виде расходящихся волн, в том случае, когда временная зависимость берется в виде $e^{-i\omega t}$. В том случае, когда зависимость от времени имеет вид $e^{i\omega t}$, условие (1.1) должно быть заменено следующим:

$$r\mathbf{u}_1 = O(1), \qquad r\left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial r} + ik_1\mathbf{u}_1\right) = o(1)$$
$$r\mathbf{u}_2 = O(1), \qquad r\left(\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial r} + ik_2\mathbf{u}_2\right) = o(1) \qquad (1.2)$$

Легко показать, что условия (1.1) и (1.2) существенно зависят от вида области, для которой ищется решение. Так, не существует решения задачи об установившихся колебаниях упругого слоя, заключенного между двумя параллельными плоскостями, удовлетворяющего условиям (1.1). Для однозначного определения решения нужно потребовать выполнение на бесконечности более сложных «парциальных» условий излучения.

Можно указать более общий метод однозначного определения решения внешних краевых задач теории упругости. Этот метод был впервые использован для решения некоторых конкретных электро-магнитных задач. В дальнейшем [3, 4] он получил название «принципа предельного поглощения». Этот принцип заключается в следующем.

Решение уравнения

$$\triangle u + k^2 u = -f \qquad (k \text{ — действительное}) \tag{1.3}$$

ищется как предел ограниченного на бесконечности решения уравнения

$$\triangle u + k_1^2 u = -f \qquad (k_1 = k + i\varepsilon;\ \varepsilon > 0) \tag{1.4}$$

В зависимости от вида временной зависимости ограниченное на бесконечности решение уравнения (1.3), представимое в виде расходящихся волн, получается при различном соотношении знаков k и ε. А именно, если зависимость от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$, то k и ε должны иметь одинаковые знаки; если временная зависимость взята в виде $e^{i\omega t}$, то разные знаки. В дальнейшем будем считать, что зависимость от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$ и $k > 0$. Поэтому для получения решения, представимого в виде расходящихся волн, мы должны выбрать $\varepsilon > 0$.

В работе [4] было показано «применение принципа предельного поглощения» для однозначного определения решения диффракционных задач в случае скалярного волнового уравнения. В настоящей работе показано, что «принцип предельного поглощения» может быть использован и для однозначного определения решения внешних краевых задач установившихся упругих колебаний, представимых расходящимися волнами.

2. Рассмотрим внешнюю краевую задачу для области, внутренней границей которой является поверхность S ограниченного тела K. Внешняя среда характеризуется постоянными Ляме λ и μ и плотностью ρ. В этом случае внешняя краевая задача установившихся упругих колебаний сводится к отысканию вектора смещения $\mathbf{u}$, удовлетворяющего:

а) вне S уравнению

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + k^2\mathbf{u} = -\mathbf{F}(M) \qquad (k^2 = \rho\omega^2) \tag{2.1}$$

где ω — частота установившихся колебаний, $\mathbf{F}(M)$ — амплитуда вектора массовых сил, который в дальнейшем будем считать локальной функцией,

б) условию на поверхности S, на которой может быть задан:

либо самый вектор смещения

$$\mathbf{u}|_S = \varphi \tag{2.2}$$

либо вектор напряжения, действующий на площадку с нормалью ν:

$$T(\mathbf{u})|_S = \psi \tag{2.3}$$

Вектор $T(\mathbf{u})$, как известно, имеет вид:

$$T(\mathbf{u}) = 2\mu\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} + \lambda\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mu\boldsymbol{\nu} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \tag{2.4}$$

Наконец, на одной части поверхности S может быть задан вектор смещения, на другой — вектор напряжения.

в) Требованию отсутствия волн, приходящих из бесконечности.

Вектор $\mathbf{u}$ непрерывен вместе с первыми производными вплоть до S и имеет непрерывные вторые производные вне S. Как известно, если разложить вектор $\mathbf{u}$ на продольную $\mathbf{u}_1$ и поперечную $\mathbf{u}_2$ составляющие, то решение уравнения (2.1) эквивалентно решению уравнений

$$\begin{aligned} &\triangle \mathbf{u}_1 + k_1^2\mathbf{u}_1 = -\mathbf{F}_1, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{u}_1 = 0, \quad k_1^2 = \frac{k^2}{\lambda + 2\mu} \\ &\triangle \mathbf{u}_2 + k_2^2\mathbf{u}_2 = -\mathbf{F}_2, \qquad \operatorname{div}\mathbf{u}_2 = 0, \quad k_2^2 = \frac{k^2}{\mu} \end{aligned} \tag{2.5}$$

причем векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ однозначно определяются через вектор $\mathbf{u}$ по формулам

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\triangle \mathbf{u} + k_2^2\mathbf{u} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}{k_2^2 - k_1^2}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{\triangle \mathbf{u} + k_1^2\mathbf{u} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}{k_1^2 - k_2^2} \tag{2.6}$$

Краевые условия для уравнений (2.5) принимают вид

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)\,|_S = \varphi \quad \text{или} \quad T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)\,|_S = \psi \tag{2.7}$$

Векторы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ однозначно определяются через вектор $\mathbf{F}$ из условий

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}_1 = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{F}_1 = \frac{k^2}{k_1^2}\operatorname{div}\mathbf{F}\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{F}_2 = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{F}_2 = \frac{k^2}{k_2^2}\operatorname{rot}\mathbf{F} \tag{2.8}$$

При этом имеет место соотношение

$$\frac{1}{k_1^2}\,\mathbf{F}_1 + \frac{1}{k_2^2}\,\mathbf{F}_2 = \frac{1}{k^2}\,\mathbf{F} \tag{2.9}$$

3. Докажем, что в случае комплексного $k = k_0 + i\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ существует единственное решение внешней краевой задачи для уравнения (2.1), ограниченное на бесконечности. Постоянная k имеет комплексное значение в том случае, когда рассматриваются установившиеся упругие колебания в среде, обладающей внутренним сопротивлением, пропорциональным скорости смещения.

Предварительно покажем, что при комплексном k ограниченное решение краевой задачи для уравнения (2.1) должно экспоненциально убывать на бесконечности. При доказательстве будут использованы формулы

$$\iiint\limits_D \{\mathbf{u}\cdot\triangle\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\triangle\mathbf{u}\}\,d\tau = \iint\limits_S \{(u_n \operatorname{div}\mathbf{v} - v_n \operatorname{div}\mathbf{u}) + \\ + (\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v} - \boldsymbol{\nu}\times\mathbf{v}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u})\}\,d\sigma \tag{3.1}$$

$$\iiint\limits_D \mathbf{u}\cdot[(\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}] - \mathbf{v}\cdot[(\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \\ - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}]\}\,d\tau = \iint\limits_S \{\mathbf{u}\cdot T(\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot T(\mathbf{u})\}\,d\sigma \tag{3.2}$$

Эти формулы имеют место для дважды дифференцируемых функций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ внутри области, ограниченной поверхностями Ляпунова. Они легко могут быть выведены применением формулы Остроградского [1].

Теорема 1. Если решение уравнения (2.1) ограничено на бесконечности, то и векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, определенные (2.6), будут ограничены на бесконечности.

Очевидно, достаточно доказать, что из условия ограниченности на бесконечности вектора $\mathbf{u}$ следует ограниченность и $\triangle\mathbf{u}$.

Для этого рассмотрим вектор

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\left\{\frac{e^{ik_1 r}}{r} - \frac{e^{ik_1 R}}{\sin k_1 R}\,\frac{(ik_1 R - 1)}{(k_1 R \operatorname{ctg} k_1 R - 1)}\,\frac{\sin k_1 r}{r}\right\} \tag{3.3}$$

Этот вектор всюду за исключением точки $r = 0$ удовлетворяет уравнению

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} + k^2 \mathbf{v} = 0$$

В точке $r = 0$ сам вектор $\mathbf{v}$ имеет особенность порядка r^{-2}, а его дивергенция особенность порядка r^{-1}. При $r = R$ вектор $\mathbf{v}(R) = 0$, а его дивергенция экспоненциально убывает при $R \to \infty$. Кроме того, $\operatorname{rot} \mathbf{v} \equiv 0$.

Применим формулу (3.2), которую мы запишем в виде

$$\iiint\limits_T \{\mathbf{u} \cdot [(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}] - \tag{3.4}$$

$$- \mathbf{v} \cdot [(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}]\}\, d\tau =$$

$$= \iint\limits_S \{(\lambda + 2\mu)(u_n \operatorname{div} \mathbf{v} - v_n \operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u})\}\, d\sigma$$

к векторам $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в области T, ограниченной поверхностью S и сферой Σ радиуса R. Точку O, в которой вектор $\mathbf{v}$ имеет особенность, выделим малой сферой Σ_0 радиуса ρ_0:

$$\iiint\limits_T \mathbf{F} \cdot d\tau = \iint\limits_{\Sigma + S + \Sigma_0} \{(\lambda + 2\mu)(u_n \operatorname{div} \mathbf{v} - v_n \operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}\}\, d\sigma$$

Переходя к пределу при $\rho_0 \to 0$ в интегралах

$$\iint\limits_{\Sigma_0} u_n \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\sigma = \rho_0 \,|\, u(0) \,|\, \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi + O(\rho_0^2)$$

$$\iint\limits_{\Sigma_0} \mathbf{v}_n \operatorname{div} \mathbf{u}\, d\sigma = \operatorname{div} \mathbf{u}(O) \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi + O(\rho_0) = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{u}(O) + O(\rho_0)$$

и при $R \to \infty$ в интегралах по поверхности Σ, получим окончательно

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(O) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \iint\limits_S \{(\lambda + 2\mu)(\mathbf{u}_n \operatorname{div} \mathbf{v} - v_n \operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}\}\, d\sigma -$$

$$- \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \iiint\limits_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\, d\tau \tag{3.5}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{div} \mathbf{u}$ экспоненциально убывает на бесконечности. Это же имеет место и для вектора $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}$. В этом случае из уравнения (2.1) следует, что вектор $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$ ограничен на бесконечности, а следовательно, и вектор $\triangle \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$ ограничен на бесконечности. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Теорема 2. Ограниченное на бесконечности решение уравнения (2.1), удовлетворяющее краевым условиям (2.2) или (2.3), экспоненциально убывает на бесконечности [при этом в уравнении (2.1) $k = k_0 + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ согласно (1.4)].

Окружим тело K поверхностью S', отстоящей от S на некоторое расстояние h $(h > 0)$. На S' векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ и их производные непрерывны и ограничены. Применим формулу (3.1) к вектору $\mathbf{u}_1$ и вектору

$$\mathbf{v}_1 = \left\{ \frac{e^{ik_1 r}}{r} - \frac{e^{ik_1 R}}{\sin k_1 R} \frac{\sin k_1 \cdot r}{r} \right\} \mathrm{S}_0 \tag{3.6}$$

(где S_0 — постоянный единичный вектор, параллельный оси z; его компоненты в сферической системе координат $\cos\theta, -\sin\theta, 0)$ в области T, ограниченной поверхностью S' и сферой Σ достаточно большого радиуса R, чтобы тело K попало внутрь Σ. Точку O, в которой вектор $\mathbf{v}_1$ имеет особенность, выделим малой сферой Σ_0 радиуса ρ_0. Так как вектор $\mathbf{v}_1$ всюду, кроме точки O, удовлетворяет уравнению

$$\triangle \mathbf{v}_1 + k_1^2 \mathbf{v}_1 = 0$$

то формула (3.1) дает

$$\iiint\limits_T \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{F}_1 \, d\tau = \iint\limits_{S'+\Sigma+\Sigma_0} \{(u_{1n} \operatorname{div} \mathbf{v}_1 - v_{1n} \operatorname{div} \mathbf{u}_1) + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{u}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_1\} \, d\sigma$$

При $r = R$ составляющая вектора $v_{1n} = 0$, а $\operatorname{div} \mathbf{v}_1$ и $\operatorname{rot} \mathbf{v}_1$ имеют порядок $e^{-\varepsilon R}$; поэтому при одном требовании ограниченности вектора $\mathbf{u}_1$ интеграл по поверхности Σ стремится к нулю при $R \to \infty$. Так как в окрестности точки $r = 0$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{v}}_1 = -\cos\theta \frac{e^{ik_1 r}}{r^2} + O\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = \sin\theta \frac{e^{ik_1 r}}{r^2} \mathbf{k} + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$u_{1n}|_{\Sigma_0} = -|u_1(0)|\cos\theta + O(r), \quad \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{u}_1|_{\Sigma_0} = |u_1(0)|\sin\theta \mathbf{k} + O(r)$$

то, переходя к пределу при $\rho_0 \to 0$ в интегралах

$$\iint\limits_{\Sigma_0} u_{1n} \operatorname{div} \mathbf{v}_1 \, d\sigma = |u_1(0)| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta d\varphi + O(\rho_0) = \frac{4\pi}{3} |u_1(0)| + O(\rho_0)$$

$$\iint\limits_{\Sigma_0} \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{u}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 d\sigma = |u_1(0)| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \, d\varphi + O(\rho_0) = \frac{8\pi}{3} |u_1(0)| + O(\rho_0)$$

получим окончательно

$$|u_1(0)| = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S'} (v_{1n} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 - u_{1n} \operatorname{div} \mathbf{v}_1 - \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{u}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_1) \, d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iiint \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 d\tau \tag{3.7}$$

Из формулы (3.7) следует, что вектор $\mathbf{u}_1$ экспоненциально убывает при стремлении точки O в бесконечность. Это же имеет место и для его производных, что можно проверить путем непосредственного дифференцирования. Аналогичным образом может быть получена формула

$$|u_2(0)| = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S'} \{-u_{2n} \operatorname{div} \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{v}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}_2 - \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{u}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_2\} \, d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iiint \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2 d\tau \tag{3.8}$$

где

$$\mathbf{v}_2 = \left(\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 R}}{\sin k_2 R} \frac{\sin k_2 r}{r} \right) \mathrm{S}_0 \tag{3.9}$$

Из формулы (3.8) следует, что вектор $\mathbf{u}_2$ экспоненциально убывает на бесконечности вместе со своими производными. Таким образом, вектор $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ при комплексном $k = k_0 + i\varepsilon$ экспоненциально убывает на бесконечности вместе со своими производными.

Теорема 3. Уравнение (2.1) имеет единственное решение, ограниченное на бесконечности и удовлетворяющее краевому условию (2.2) или (2.3) (при этом в уравнении (2.1) $k = k_0 + i\varepsilon$). При этом предполагается, что на S существует нормальная производная вектора $\mathbf{u}$ и выполнены условия применимости формул (3.1) и (3.2).

Очевидно, достаточно доказать, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение, т. е. ограниченное на бесконечности решение уравнения

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{w} + k^2\mathbf{w} = 0 \tag{3.10}$$

удовлетворяющее краевому условию $\mathbf{w}|_S = 0$ или $T(\mathbf{w})|_S = 0$ есть тождественный нуль. Рассмотрим вектор $\mathbf{w}^*$, комплексно сопряженный вектору $\mathbf{w}$.

Этот вектор удовлетворяет уравнению

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}^* - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{w}^* + k^{2*}\mathbf{w}^* = 0 \tag{3.11}$$

и краевому условию $\mathbf{w}^*|_S = 0$ или $T(\mathbf{w}^*)|_S = 0$ и согласно теореме 2 экспоненциально убывает на бесконечности вместе со своими производными.

Применим формулу (3.2) к векторам $\mathbf{w}$ и $\mathbf{w}^*$ в области, ограниченной поверхностью S и сферой Σ достаточно большого радиуса R. В силу краевых условий на S и поведения функций $\mathbf{w}$ и $\mathbf{w}^*$ на бесконечности получим

$$(k^2 - k^{*2}) \iiint |w|^2\, d\tau = 0$$

так как $k^2 \neq k^{*2}$, то отсюда следует $|w| \equiv 0$, что и доказывает теорему.

Таким образом, при комплексном k краевая задача для уравнения (2.1) имеет единственное решение, ограниченное на бесконечности.

4. В том случае, когда k действительное ($k = k_0$), одно требование ограниченности на бесконечности определяет решение уравнения (2.1) неоднозначно. Для однозначного определения решения, соответствующего расходящимся волнам, можно воспользоваться «принципом предельного поглощения».

Докажем, что при $\varepsilon \to 0$ существует единственный предел $\mathbf{u}_0$ ограниченного на бесконечности решения краевой задачи для уравнения

$$\begin{gathered}(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + k^2\mathbf{u} = -\mathbf{F}(M) \\ k = k_0 + i\varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)\end{gathered} \tag{4.1}$$

Этот предел удовлетворяет уравнению

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_0 - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_0 + k_0^2\mathbf{u}_0 = -\mathbf{F}(M) \tag{4.2}$$

тому же граничному условию и «условиям излучения» (1.1) на бесконечности. Доказательство проведем для случая $\mathbf{u}|_S = \varphi$; для других граничных задач доказательство аналогично. При доказательстве этого положения будет существенно использована следующая лемма.

Лемма. Если интегральное уравнение

$$u(x, \alpha) = \lambda \int_a^b K(x, s, \alpha)\, u(s, \alpha)\, ds + f(x, \alpha) \tag{4.3}$$

ядро и свободный член которого непрерывно зависят от параметра α в интервале $\alpha_1 \geqslant \alpha \geqslant \alpha_0$, для заданного значения λ разрешимо при всех значениях α $(\alpha_1 \geqslant \alpha \geqslant \alpha_0)$, причем λ не является собственным значением однородного интегрального уравнения ни при каких значениях α, кроме, быть может, $\alpha = \alpha_0$, то предел $u(x, \alpha)$ при $\alpha \to \alpha_0$ существует и удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x, \alpha_0) = \lambda \int_a^b K(x, s, \alpha_0)\, u(s, \alpha_0)\, ds + f(x, \alpha_0) \tag{4.4}$$

Согласно условиям леммы решение уравнения (4.3) может быть представлено в виде

$$u(x, \alpha) = \int_a^b R(x, s, \lambda, \alpha)\, f(s, \alpha)\, ds + f(x, \alpha) \tag{4.5}$$

где $R(x, s, \lambda, \alpha)$ — резольвента Фредгольма интегрального уравнения (4.3). Если λ не является собственным значением предельного уравнения, то утверждение леммы непосредственно следует из представления (4.5).

Чтобы доказать лемму в том случае, когда λ является собственным значением предельного уравнения, воспользуемся представлением резольвенты в окрестности полюса

$$R(x, s, \lambda, \alpha) = \frac{a_{-r}(x, s, \alpha)}{(\lambda - \lambda_0)^r} + \frac{a_{-r+1}(x, s, \alpha)}{(\lambda - \lambda_0)^{r-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}(x, s, \alpha)}{(\lambda - \lambda_0)} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x, s, \alpha)(\lambda - \lambda_0)^i \tag{4.6}$$

где $a_{-r}(x, s, \alpha), \ldots, a_{-1}(x, s, \alpha)$ — собственные функции союзного интегрального уравнения.

Используя условия разрешимости предельного уравнения

$$\int_a^b \psi_i(x, \alpha_0)\, f(x, \alpha_0)\, dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

где $\psi_i(x, \alpha_0)$ — собственные функции уравнения, союзного предельному, легко показать, что утверждение леммы будет иметь место и в этом случае.

Вернемся к нашей задаче. Краевую задачу для неоднородного уравнения всегда можно свести к краевой задаче для однородного уравнения с измененным граничным условием. Поэтому нам достаточно показать, что существует предел решения краевой задачи

$$\begin{gathered} (\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} + k^2\mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}|_s = \varphi(P, k) \qquad (k = k_0 + i\varepsilon) \end{gathered} \tag{4.7}$$

при $\varepsilon \to 0$, который удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{gathered} (\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_0 - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}_0 + k_0^2\mathbf{u}_0 = 0 \\ \mathbf{u}_0|_s = \varphi(P, k_0) \end{gathered} \tag{4.8}$$

Причем $\varphi(P, k)$ — непрерывная функция параметра k.

Представление решения поставленной краевой задачи можно получить, используя общий метод, развитый И. Н. Векуа при решении краевых задач для скалярного уравнения [5]. А именно, будем искать решение задачи в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев. В качестве ядра потенциалов естественно воспользоваться тензором, соответствующим решению однородного уравнения установившихся упругих колебаний, имеющему особенность вида r^{-1}. Согласно В. Д. Купрадзе потенциалы простого и двойного слоев в этом случае имеют вид:

$$\mathbf{V}(M) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \Gamma(M, Q)\, \boldsymbol{\mu}(Q)\, d\sigma \tag{4.9}$$

$$\mathbf{W}(M) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S N\Gamma(M, Q)\, \boldsymbol{\nu}(Q)\, d\sigma \tag{4.10}$$

где тензор $\Gamma(M, Q)$ имеет вид

$$\Gamma(M, Q) = \| u_j^i \| \tag{4.11}$$

$$u_j^i(P, Q) = \left\{\frac{2\varphi(r)}{r^2} + \frac{b^2}{a^2} e^{ik_1 r}\right\}\frac{\varepsilon_{ij}}{r} - \left\{\frac{3\varphi(r)}{r^2} + \psi(r)\right\}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

$$\varphi(r) = b^2\left(\frac{r}{b\omega i} + \frac{1}{\omega^2}\right)e^{ik_2 r} - b^2\left(\frac{r}{a\omega i} + \frac{1}{\omega^2}\right)e^{ik_1 r} \tag{4.12}$$

$$\psi(r) = b^2\left(\frac{1}{a^2} e^{ik_1 r} - \frac{1}{b^2} e^{ik_2 r}\right), \quad a^2 = \lambda + 2\mu, \quad b^2 = \mu, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

а операция N соответствует нормальной производной, причем

$$N\mathbf{u} = \frac{2\lambda + 4\mu}{\lambda + 3\mu}\frac{d\mathbf{u}}{\partial \nu} + \frac{(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 3\mu)}\boldsymbol{\nu}\cdot \operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}[\boldsymbol{\nu} \times \operatorname{rot}\mathbf{u}] \tag{4.13}$$

Потенциалы $\mathbf{V}(M)$ и $\mathbf{W}(M)$ на поверхности S удовлетворяют тем же граничным соотношениям, что и обычные потенциалы простого и двойного слоя

$$\mathbf{V}_i(Q_0) = \mathbf{V}_e(Q_0), \qquad \begin{aligned} N_i\mathbf{V}(Q_0) &= N\mathbf{V}(Q_0) - \boldsymbol{\mu}(Q_0) \\ N_e\mathbf{V}(Q_0) &= N\mathbf{V}(Q_0) + \boldsymbol{\mu}(Q_0) \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i(Q_0) &= \mathbf{W}(Q_0) + \boldsymbol{\nu}(Q_0) \\ \mathbf{W}_e(Q_0) &= \mathbf{W}(Q_0) - \boldsymbol{\nu}(Q_0) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Решение краевой задачи (4.7) ищем в виде

$$\mathbf{u}(M) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \Gamma(M, Q)\, \boldsymbol{\mu}(Q)\, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S N\Gamma(M, Q)\, \boldsymbol{\nu}(Q)\, d\sigma \tag{4.16}$$

Решение краевой задачи (4.8) в виде

$$\mathbf{u}_0(M) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \Gamma_0(M, Q)\, \boldsymbol{\mu}(Q)\, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\iint N\Gamma_0(M, Q)\, \boldsymbol{\nu}_0(Q)\, d\sigma \tag{4.17}$$

Для определения векторов $\boldsymbol{\nu}(Q)$ и $\boldsymbol{\nu}_0(Q)$, в силу граничных свойств потенциалов, получим интегральные уравнения:

$$\boldsymbol{\nu}(P) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S N\Gamma(P, Q)\,\boldsymbol{\nu}(Q)\,d\sigma = -\boldsymbol{\varphi}(P, k) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \Gamma(P, Q)\,\boldsymbol{\mu}(Q)\,d\sigma \quad (4.18)$$

$$\boldsymbol{\nu}_0(P) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S N\Gamma_0(P, Q)\,\boldsymbol{\nu}_0(Q)\,d\sigma = -\boldsymbol{\varphi}(P, k_0) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \Gamma_0(P, Q)\,\boldsymbol{\mu}(Q)\,d\sigma \quad (4.19)$$

Как известно, интегральное уравнение, соответствующее первой внешней краевой задаче, будет иметь собственные функции только в том случае, когда k является собственным значением второй краевой задачи для внутренней области S. Комплексное k не может быть собственным значением внутренней краевой задачи, поэтому уравнение (4.18) всегда разрешимо. Если k_0 является собственным значением второй краевой задачи для внутренней области S, то уравнение (4.19) разрешимо не для любой правой части. Поэтому вектор $\boldsymbol{\mu}(Q)$ выберем так, чтобы уравнение (4.19), соответствующее краевой задаче (4.8), было разрешимо. То, что это всегда можно сделать, следует из общего метода И. Н. Векуа. Для задачи (4.8) это проведено В. Д. Купрадзе.

Так как $\Gamma(P, Q)$ и $N\Gamma(P, Q)$ являются непрерывными функциями параметра k, то уравнение (4.18) удовлетворяет всем условиям леммы. Отсюда следует непрерывная зависимость $\boldsymbol{\nu}(Q)$ от параметра k, причем

$$\boldsymbol{\nu}(Q) \to \boldsymbol{\nu}_0(Q) \quad \text{при} \quad k \to k_0$$

В силу формул (4.16) и (4.17) $\mathbf{u}(M)$ также непрерывно зависит от k и

$$\mathbf{u}(M) \to \mathbf{u}_0(M) \quad \text{при} \quad k \to k_0$$

что и доказывает существование единственного предела при $\varepsilon \to 0$ ограниченного на бесконечности решения уравнения (4.1), удовлетворяющего граничному условию $\mathbf{u}\big|_s = \boldsymbol{\varphi}$. Этот предел удовлетворяет уравнению (4.2) и условиям излучения (1.1), что легко проверить непосредственно.

5. Как было указано, «условия излучения» (1.1) не всегда оказываются пригодными для однозначного определения решения внешней краевой задачи теории упругости. Покажем, что в случае установившихся упругих колебаний слоя между двумя параллельными плоскостями условия (1.1) должны быть заменены другими, которые назовем «парциальными условиями излучения». Эти условия легко могут быть получены путем использования «принципа предельного поглощения».

Рассмотрим колебания упругого слоя с граничными условиями

$$\mathbf{u}\big|_{z=0} = 0, \qquad \mathbf{u}\big|_{z=l} = 0 \quad (5.1)$$

Пусть требуется найти вектор $\mathbf{u}$, который в области между параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = l$ удовлетворяет: (а) уравнению (4.2), (б) граничным условиям (5.1), (в) условию отсутствия волн, приходящих из бесконечности.

Используя принцип предельного поглощения, будем искать решение уравнения (4.2), удовлетворяющее условиям (б) и (в), как предел при $\varepsilon \to 0$ ограниченного на бесконечности решения уравнения (4.1), удовлетворяющего граничным условиям (5.1). Как будет показано ниже, такое решение единственно.

Так же как в п. 2, заменим решение уравнения (4.1) решением эквивалентной системы (2.5). Векторы $\mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{u}_2$ однозначно определяются через вектор $\mathfrak{u}$ по формулам (2.6). Легко показать, что в случае решения задачи для плоского слоя при граничных условиях (5.1) можно определить граничные условия для векторов $\mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{u}_2$. В данном случае решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условиям (5.1), имеет вид:

$$\mathfrak{u} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathfrak{u}_m(\rho, \varphi) \sin \frac{m\pi}{l} z \tag{5.2}$$

Отсюда следует, что и вектор $\triangle \mathfrak{u}$ удовлетворяет условиям

$$\triangle \mathfrak{u} \Big|_{z=0} = 0, \qquad \triangle \mathfrak{u} \Big|_{z=l} = 0$$

В таком случае из формул (2.6) следует, что и векторы $\mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{u}_2$ удовлетворяют условиям

$$\mathfrak{u}_1 \Big|_{z=0} = 0, \qquad \mathfrak{u}_1 \Big|_{z=l} = 0, \qquad \mathfrak{u}_2 \Big|_{z=0} = 0, \qquad \mathfrak{u}_2 \Big|_{z=l} = 0 \tag{5.3}$$

Рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{\vartheta}_1 = g_1(z_0, \rho, z)\, \mathbf{S}_0 \tag{5.4}$$

Вектор $\mathbf{S}_0$ — постоянный вектор, направленный вдоль оси z.

Функция $g_1(z_0, \rho, z)$ представляет собой функцию источника уравнения

$$\triangle u + k_1^2 u = 0$$

для плоского слоя. Она имеет вид [4]:

$$g_1(z_0, \rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(1)}(\rho, z_0) \sin \frac{m\pi}{l} z = \frac{e^{ik_1 r}}{r} + w \tag{5.5}$$

Здесь

$$C_m^{(1)}(\rho, z_0) = -\frac{i}{2l} \sin \frac{m\pi}{l} z_0 H_0^{(1)}\left(k_1 \rho \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{l k_1}\right)^2 m^2}\right) \tag{5.6}$$

причем w — регулярная функция. Из представления (5.5) следует, что вектор $\boldsymbol{\vartheta}_1$ удовлетворяет краевой задаче

$$\triangle \boldsymbol{\vartheta}_1 + k_1^2 \boldsymbol{\vartheta}_1 = 0, \qquad \boldsymbol{\vartheta}_1 \Big|_{z=0} = 0, \qquad \boldsymbol{\vartheta}_1 \Big|_{z=l} = 0$$

Кроме того, нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{\vartheta}_1$ на боковой поверхности цилиндра с образующими, параллельными оси z, равна нулю. При комплексном k_1 производные функции $g_1(z_0, \rho, z)$ экспоненциально убывают на бесконечности. Поэтому, применив формулу (3.1) к векторам $\mathfrak{u}_1$ и $\boldsymbol{\vartheta}_1$ в области T, ограниченной боковой поверхностью цилиндра S достаточно большого радиуса R, плоскостями $z = 0$ и $z = l$ и сферой S_0 малого радиуса ρ, выделяющей точку O, в которой функция $g_1(z_0, \rho, z)$ имеет особенность, получим

$$\iiint_T \boldsymbol{\vartheta}_1 \cdot \mathbf{F}_1 \, d\tau = \iint_{S+\Sigma+S_0} \{u_{1n} \operatorname{div} \boldsymbol{\vartheta}_1 - \vartheta_{1n} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{u}_1 \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\vartheta}_1\} \, d\sigma \tag{5.7}$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$ и $\rho \to 0$, будем иметь

$$|u_1(O)| = \frac{1}{4\pi} \iiint \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\vartheta}_1 \, d\tau \tag{5.8}$$

Применяя аналогичным образом формулу (3.1) к $\mathbf{u}_2$ и $\boldsymbol{\vartheta}_2$, где

$$\boldsymbol{\vartheta}_2 = g_2(z_0, \rho, z) \, \mathbf{S}_0 \tag{5.9}$$

$$g_2(z_0, \rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(2)}(\rho, z_0) \sin \frac{m\pi}{l} z \tag{5.10}$$

$$C_m^{(2)}(\rho, z_0) = -\frac{i}{2l} \sin \frac{m\pi}{l} z_0 H_0^{(1)} \left(k_2 \rho \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{lk_2}\right)^2 m^2} \right) \tag{5.11}$$

получим

$$|u_2(O)| = \frac{1}{4\pi} \iiint \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\vartheta}_2 \, d\tau \tag{5.12}$$

Формулы (5.8) и (5.12) доказывают единственность решения задачи об установившихся колебаниях упругого слоя при комплексном k. При этом достаточно одного требования ограниченности решения на бесконечности. Переходя в формулах (5.8) и (5.12) к пределу при $\varepsilon \to 0$, что возможно в силу равномерной сходимости полученных интегралов, получим решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условиям (б) и (в).

Полученные результаты позволяют найти и аналитические «условия излучения», однозначно определяющие решение уравнения (4.2). Как было показано [4], функция $g(z_0, \rho, z)$ удовлетворяет «парциальным условиям излучения» (5.13)

$$\sqrt{\rho}\, C_m = O(1), \qquad \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial C_m}{\partial \rho} - ik_m C_m \right) = o(1), \qquad k_m = k \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{lk}\right)^2 m^2}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, M)$$

Отсюда следует, что для однозначного определения решения уравнения (4.2), удовлетворяющего требованию отсутствия волн, приходящих из бесконечности, векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ должны удовлетворять «парциальным условиям излучения»

$$\sqrt{\rho}\, \mathbf{u}_m^{(j)} = O(1), \qquad \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_m^{(j)}}{\partial \rho} - ik_m^{(j)} \mathbf{u}_m^{(j)} \right) = o(1) \qquad (j=1,2) \tag{5.14}$$

где $\mathbf{u}_m^{(1)}$ и $\mathbf{u}_m^{(2)}$ — коэффициенты разложения векторов

$$\mathbf{u}_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{u}_m^{(1)} \sin \frac{m\pi}{l} z, \qquad \mathbf{u}_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{u}_m^{(2)} \sin \frac{m\pi}{l} z \tag{5.15}$$

а $k_m^{(1)}$ и $k_m^{(2)}$ имеют вид:

$$k_m^{(1)} = k_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{kl_1}\right)^2 m^2}, \qquad k_m^{(2)} = k_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{lk_2}\right)^2 m^2} \tag{5.16}$$

Причем эти условия должны выполняться не для всех коэффициентов $\mathfrak{u}_m^{(1)}$ и $\mathfrak{u}_m^{(2)}$, а только для $M_{1,2}$ первых. $M_{1,2}$ определяются из условий

$$M_{1,2} \geqslant \frac{lk_{1,2}}{\pi} \tag{5.17}$$

Для остальных коэффициентов достаточно одного требования ограниченности на бесконечности. Можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. Существует единственное решение уравнения (4.2), удовлетворяющее граничному условию (5.1) и «парциальным условиям излучения» (5.14), в которых $\mathfrak{u}_m^{(1)}$ и $\mathfrak{u}_m^{(2)}$ — коэффициенты разложения векторов $\mathfrak{u}_1$ и $\mathfrak{u}_2$ в ряды (5.15), а $k_m^{(1)}$ и $k_m^{(2)}$ определены (5.16), причем условия (5.15) выполняются только для тех коэффициентов, которые устанавливаются при помощи (5.17).

Теорему легко доказать, применяя формулу (3.1) к функциям $\mathfrak{u}_i$ и ϑ_i.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность А. Н. Тихонову, под руководством которого выполнена эта работа, а также И. Н. Векуа за сделанные по ней ценные указания.

Поступила 13 II 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. Гостехиздат, 1950.
2. Векуа И. Н. О доказательстве некоторых теорем единственности, встречающихся в теории установившихся колебаний. ДАН СССР, т. LXXX, № 3, 1951.
3. Тихонов А. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1951.
4. Свешников А. Г. Принцип излучения. ДАН СССР, т. LXXIII, № 5, 1950.
5. Векуа И. Н. О метагармонических функциях. Труды Тбилисского мат. ин-та, т. XII, 1943.