Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ДИФФРАКЦИЯ ВОЛН ВОКРУГ ДВИЖУЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СУДНА

М. Д. Хаскинд

(Николаев)

Определение возмущающих сил, раскачивающих судно на волнах, сводится к решению задачи о диффракции волн вокруг движущегося судна по поверхности тяжелой жидкости [1]. Здесь эта задача рассматривается для цилиндрического судна бесконечной длины и дается метод построения точных решений в частных случаях. Этот метод представляет собой развитие метода, изложенного в статье [2].

§ 1. Постановка задачи. Пусть имеем цилиндрическое судно, движущееся поступательно по направлению образующей с постоянной скоростью u в тяжелой жидкости неограниченной глубины. Пусть далее на цилиндрическое судно набегает система регулярных волн.

Обозначим через Φ потенциал скоростей диффрагированного волнового движения. Для его определения имеем уравнение Лапласа

$$\triangle \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.1)$$

затем граничное условие

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2u\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial x} + u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = 0 \text{ и } |y| > a \qquad (1.2)$$

и условие обтекания

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\cos(n, z) = 0 \qquad \text{на } L \qquad (1.3)$$

где t — время, g — ускорение силы тяжести, n — внешняя нормаль к шпангоуту L и $2a = b$ — ширина этого шпангоута по ватерлинии, причем система координат xyz неизменно связана с судном: ось x направлена по середине судна, параллельно скорости u, ось z — вертикально вверх и плоскость xy совпадает с невозмущенным уровнем жидкости.

Потенциал скоростей набегающей системы регулярных волн, входящий в состав всего потенциала Φ, имеет вид:

$$\Phi^* = i\frac{g}{\sigma_0} r_0 e^{kz + i[\sigma t - k(x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon)]} \qquad (i = \sqrt{-1}) \qquad (1.4)$$

Здесь σ_0 — истинная частота колебаний, $k = \sigma_0^2 / g$ — волновое число, r_0 — полувысота волны, ε — угол между направлением фазовой скорости и направлением оси x и $\sigma = \sigma_0 - ku\cos\varepsilon$ — кажущаяся частота колебаний. При этом следует иметь в виду, что в выражении (1.4) и во всех последующих выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель $e^{i\sigma t}$, следует рассматривать только действительную часть.

Учитывая вид потенциала Φ^* и характер условия (1.3), положим

$$\Phi(x, y, z, t) = \psi(y, z)\, e^{i(\sigma t - kx\cos\varepsilon)} \tag{1.5}$$

тогда уравнение Лапласа (1.1) и условия (1.2) и (1.3) примут вид:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - k_1{}^2\psi = 0 \qquad (k_1 = k\cos\varepsilon) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} - k\psi = 0 \qquad \text{при } z = 0 \text{ и } |y| > a \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \qquad \text{на } L \tag{1.8}$$

Уравнение (1.6) при условии (1.7) допускает свободные решения вида

$$\psi_0 = Ce^{kz \pm ik_2 y} \qquad (k_2 = k\,|\sin\varepsilon|)$$

Поэтому условия (1.7) и (1.8) дополняем требованием выполнения асимптотических условий

$$\begin{aligned} \psi &= i\frac{g}{\sigma_0} r_0 e^{kz - iky\sin\varepsilon} + C_+ e^{kz - ik_2 y} \qquad \text{при } y \to +\infty \\ \psi &= i\frac{g}{\sigma_0} r_0 e^{kz - iky\sin\varepsilon} + C_- e^{kz + ik_2 y} \qquad \text{при } y \to -\infty \end{aligned} \tag{1.9}$$

Физическое содержание условий (1.9) выражается в том, что набегающая система регулярных волн частично отражается от цилиндрического судна и частично огибает судно в поперечном направлении.

§ 2. Метод построения решения. Введем в рассмотрение другую функцию $f(y, z)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k_1{}^2 f = 0 \tag{2.1}$$

и связанную с функцией $\psi(y, z)$ соотношением

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} - k\psi = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{2.2}$$

При помощи функции f условие (1.7) можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = 0 \text{ и } |y| > a \tag{2.3}$$

Условие (2.3) позволяет продолжить функцию f в верхнюю полуплоскость четным образом. В результате получаем функцию, регулярную и однозначную во всей плоскости yz, вне контура $L + \bar{L}$, где $\bar{L}$—зеркальное отражение контура L в верхней полуплоскости, причем в силу уравнения (2.1) и условия (2.3) функция f обращается в нуль в бесконечно удаленной точке.

Если функция f определена, то из уравнения (2.2) можем определить функцию ψ, удовлетворяющую уравнению (1.6) и асимптотическим условиям (1.9). В самом деле, из (2.2) имеем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - k\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Используя (1.6), (2.1) и (2.2), получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 (\psi - f)}{\partial y^2} + k_2{}^2 (\psi - f) = - k \left(\frac{\partial f}{\partial z} + kf \right) \tag{2.4}$$

Рассматривая теперь (2.4) как дифференциальное уравнение относительно $\psi - f$, определим функцию ψ в следующем виде:

$$\psi = f - \frac{k}{2ik_2} \left[e^{ik_2 y} \int\limits_{+\infty}^{y} e^{-ik_2 y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + kf \right) dy - \right.$$

$$\left. - e^{-ik_2 y} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{ik_2 y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + kf \right) dy \right] + i \frac{g}{\sigma_0} r_0 e^{kz - ik \sin \varepsilon y} \tag{2.5}$$

Здесь интегрирование проводится вдоль полупрямых, расположенных в нижней полуплоскости и параллельных оси y.

Прежде всего покажем, что определенная таким образом функция ψ удовлетворяет уравнению (1.6). Для этого, дифференцируя выражение (2.5) по z и принимая во внимание (2.1), получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - k_1{}^2 f \right) + \frac{k}{2ik_2} \left[e^{ik_2 y} \left(\frac{\partial}{\partial z} + k \right) \int\limits_{+\infty}^{y} e^{-ik_2 y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - k_1{}^2 f \right) dy - \right.$$

$$\left. - e^{-ik_2 y} \left(\frac{\partial}{\partial z} + k \right) \int\limits_{-\infty}^{y} e^{ik_2 y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - k_1{}^2 f \right) dy \right] + k^2 i \frac{g}{\sigma_0} r_0 e^{kz - ik \sin \varepsilon y}$$

Интегрируя далее по частям, найдем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k_2{}^2 f \right) + k \left(\frac{\partial f}{\partial z} + kf \right) + k^2 \psi$$

Отсюда в силу уравнения (2.4) убеждаемся, что функция ψ удовлетворяет уравнению (1.6). Покажем теперь, что функция ψ удовлетворяет асимптотическим условиям (1.9). На основании (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{k}{2ik_2} e^{-ik_2 y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_2 y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + kf \right) dy + i \frac{g}{\sigma_0} r_0 e^{kz - ik \sin \varepsilon y} \quad \text{при } y \to +\infty \\ \psi &= \frac{k}{2ik_2} e^{ik_2 y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_2 y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + kf \right) dy + i \frac{g}{\sigma_0} r_0 e^{kz - ik \sin \varepsilon y} \quad \text{при } y \to -\infty \end{aligned} \tag{2.6}$$

причем интегрирование производится по прямой, параллельной оси y и расположенной ниже контура L.

Преобразуем интегралы в (2.6). Для этого рассмотрим область D, ограниченную контуром $L + \bar{L}$, прямой, параллельной оси y и расположенной ниже этого контура, и полуокружностью бесконечно большого радиуса, опирающейся на эту прямую (фиг. 1).

Применив в области D формулу Грина к функциям f и $\chi = e^{-kz + ik_2 y}$, удовлетворяющим уравнению (2.1), получим

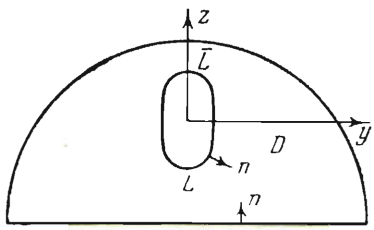
$$\int\limits_C \left(f \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial f}{\partial n} \right) dl = 0$$

где C — контур области D. Очевидно, что интеграл по полуокружности бесконечно большого радиуса обращается в нуль. Поэтому

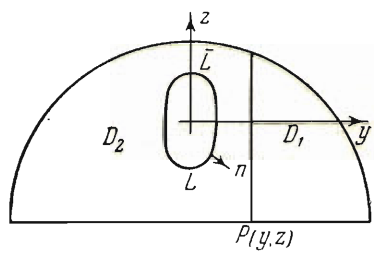
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial z}+kf\right)e^{ik_2y}dy=e^{kz}\int_{L+\bar{L}}\left(f\frac{\partial\chi}{\partial n}-\chi\frac{\partial f}{\partial n}\right)dl$$

и совершенно аналогично получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial z}+kf\right)e^{-ik_2y}dy=e^{kz}\int_{L+\bar{L}}\left(f\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial n}-\bar{\chi}\frac{\partial f}{\partial n}\right)dl \qquad (\bar{\chi}=e^{-kz-ik_2y})$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Следовательно, асимптотические формулы (2.6) принимают вид:

$$\begin{aligned}\psi&=i\frac{g}{\sigma_0}r_0e^{kz-ik\sin\varepsilon y}+C_+e^{kz-ik_2y} \qquad \text{при } y\to+\infty\\ \psi&=i\frac{g}{\sigma_0}r_0e^{kz-ik\sin\varepsilon y}+C_-e^{kz+ik_2y} \qquad \text{при } y\to-\infty\end{aligned} \tag{2.7}$$

где C_+ и C_- определяются формулами

$$C_+=\frac{k}{2ik_2}\int_{L+\bar{L}}\left(f\frac{\partial\chi}{\partial n}-\chi\frac{\partial f}{\partial n}\right)dl, \qquad C_-=\frac{k}{2ik_2}\int_{L+\bar{L}}\left(f\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial n}-\bar{\chi}\frac{\partial f}{\partial n}\right)dl \tag{2.8}$$

Формулу (2.5) можно также представить в несколько преобразованном виде. Для этого, применяя формулу Грина к функциям f и $\bar{\chi}$ в области D_1 (фиг. 2), легко установить, что

$$e^{ik_2y}\int_{+\infty}^{y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}+kf\right)e^{-ik_2y}dy=-e^{kz}\int_{+\infty}^{z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+ik_2f\right)e^{-kz}dz$$

Точно так же применение формулы Грина к функциям f и χ в области D_2 дает следующее:

$$e^{-ik_2y}\int_{-\infty}^{y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}+kf\right)e^{ik_2y}dy=$$

$$=e^{kz}\int_{+\infty}^{z}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}+ik_2f\right)e^{-kz}dz+e^{kz-ik_2y}\int_{L+\bar{L}}\left(f\frac{\partial\chi}{\partial n}-\chi\frac{\partial f}{\partial n}\right)dl$$

Поэтому выражение (2.5) может быть представлено в форме

$$\psi=f+ke^{kz}\int_{+\infty}^{z}fe^{-kz}dz+C_+e^{kz-ik_2y}+i\frac{g}{\sigma_0}r_0e^{kz-ik\sin\varepsilon y} \tag{2.9}$$

Аналогичное выражение будет для точек левее контура L.

Полученные выражения для функции ψ позволяют найти решение в ряде частных случаев. В частности, при помощи этих выражений легко найти решение простейшей граничной задачи для случая источника.

Для всей плоскости решение уравнения (1.6), описывающее функцию источника, является функция Бесселя $K_0(k_1 r)$ от мнимого аргумента, где $r = \sqrt{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$. Представим функцию G источника в рассматриваемой граничной задаче в форме

$$G = \psi_0 + K_0(k_1 r) - K_0(k_1 r') \qquad (r' = \sqrt{(y-\eta)^2 + (z+\zeta^2)}) \tag{2.10}$$

где r' — расстояние между точкой $P(y, z)$ и зеркальным отражением точки $Q(\eta, \zeta)$ в верхней полуплоскости, т. е. точки $Q'(\eta, -\zeta)$.

Функция ψ_0 является регулярной функцией во всей нижней полуплоскости, удовлетворяет уравнению (1.6) и на основании (1.7), условию

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial z} - k\psi_0 = 2\frac{\partial}{\partial z}[K_0(k_1 r')] \qquad \text{при } z = 0 \tag{2.11}$$

Легко доказать, что условие (2.11) выполняется во всей нижней полуплоскости. В самом деле, рассмотрим функцию

$$\varphi = \frac{\partial \psi_0}{\partial z} - k\psi_0 - 2\frac{\partial}{\partial z}[K_0(k_1 r')]$$

Функция φ регулярна во всей нижней полуплоскости, удовлетворяет уравнению (1.6) и при $z = 0$ обращается в нуль. Применяя формулу Грина, получаем

$$\iint_S (|\nabla\varphi|^2 + k_1^2\varphi^2)\, dS = 0$$

где S — нижняя полуплоскость. Отсюда $\varphi \equiv 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial z} - k\psi_0 = 2\frac{\partial}{\partial z}[K_0(k_1 r')] \qquad \text{при } z \leqslant 0$$

В данной задаче набегающая система волн отсутствует, поэтому, полагая в формуле (2.9) $f = 2K_0(k_1 r')$, получаем

$$G = K_0(k_1 r) + K_0(k_1 r') + 2ke^{kz}\int_{+\infty}^{z} e^{-kz} K_0(k_1 r')\, dz + C_{\pm} e^{kz \mp ik_2 y}$$

где верхний знак для $y - \eta > 0$, а нижний для $y - \eta < 0$.

Функция $K_0(k_1 r')$ отличается от $\ln(1/r')$ на величину, ограниченную во всей плоскости. Принимая это во внимание и стягивая в (2.8) контур $L + \bar{L}$ к окружности бесконечно малого радиуса с центром в точке $Q'(\eta, -\zeta)$, будем иметь

$$C_{\pm} = -2\pi i \frac{k}{k_2} e^{+k\zeta \pm ik_2\eta}$$

и, следовательно, окончательно находим

$$G = K_0(k_1 r) + K_0(k_1 r') + 2ke^{kz}\int_{+\infty}^{z} e^{-kz} K_0(k_1 r')\, dz - 2\pi i \frac{k}{k_2} e^{k(z+\zeta) \mp ik_2(y-\eta)} \tag{2.12}$$

§ 3. Диффракция волн вокруг вертикально погруженной пластины. Рассмотрим теперь задачу о диффракции волн вокруг вертикально погруженной пластины. Условие (1.8) для этого случая примет вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } y = 0 \text{ и } -T \leqslant z \leqslant 0 \tag{3.1}$$

Продифференцируем соотношение (2.2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial y} - k \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

В силу условия (3.1) имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} = 0 \qquad \text{при } y = 0 \text{ и } -T \leqslant z \leqslant 0$$

и, следовательно, при $y = 0$ и $-T \leqslant z \leqslant 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = C \tag{3.2}$$

где C — постоянная интегрирования.

На основании соотношения (2.3) условие (3.2) справедливо также в точках зеркального отражения пластины в верхней полуплоскости.

Итак, пришли к задаче об определении функции f, удовлетворяющей уравнению (2.1) во всех точках плоскости yz вне вертикального отрезка $(-T, +T)$ оси z и на этом отрезке удовлетворяющей условию (3.2).

Для решения этой задачи введем эллиптическую систему координат

$$z = -T \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \qquad y = T \operatorname{sh} \xi \sin \eta \tag{3.3}$$

Легко видеть, что координатным линиям $\xi = \mathrm{const}$ соответствует семейство софокусных эллипсов в плоскости yz, а координатным линиям $\eta = \mathrm{const}$ соответствует семейство софокусных гипербол, ортогональных к семейству эллипсов. Дважды пробегаемый отрезок $(-T, +T)$ представляет собой вырожденный эллипс $\xi = 0$ и $|\eta| < \pi$.

В эллиптической системе координат частными решениями уравнения (2.1) является совокупность произведений функций Матье $\mathrm{Ce}_n(\xi)\, \mathrm{ce}_n(\eta)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\mathrm{Se}_n(\xi)\, \mathrm{se}_n(\eta)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ с мнимым параметром ik_1, причем функции $\mathrm{ce}_n(\eta)$ и $\mathrm{se}_n(\eta)$ — ортогональные системы периодических функций со следующей нормировкой:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [\mathrm{ce}_n(\eta)]^2\, d\eta = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} [\mathrm{se}_n(\eta)]^2\, d\eta = \pi$$

Функции $\mathrm{ce}_n(\eta)$ и $\mathrm{se}_n(\eta)$ представляются рядами Фурье [3]

$$\mathrm{ce}_n(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos m\eta, \qquad \mathrm{se}_n(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \sin m\eta \tag{3.4}$$

где индексы n и m — одинаковой четности и коэффициенты A_{nm} и B_{nm} являются целыми функциями параметра $\theta = -\frac{1}{4}(k_1 T)^2$. Функции же $\mathrm{Ce}_n(\xi)$ и $\mathrm{Se}_n(\xi)$ представляются также в виде рядов через функции Бесселя [1].

В системе координат $\xi\eta$ условие (3.2) принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = TC \sin \eta \qquad \text{при } \xi = 0 \text{ и } |\eta| < \pi \tag{3.5}$$

Представим функцию f в виде следующего ряда

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Se}_n(\xi) \operatorname{se}_n(\eta) \tag{3.6}$$

Пользуясь разложением (3.4) и удовлетворяя (3.5), получаем

$$a_n = \frac{TC}{\operatorname{Se}_n'(0)} B_{n1} \qquad \left(\operatorname{Se}_n'(0) = \left(\frac{d \operatorname{Se}_n}{d\xi}\right)_{\xi=0}\right) \tag{3.7}$$

Отсюда все $a_{2j} = 0$ $(j = 1, 2, 3)$, и поэтому выражение (3.6) автоматически удовлетворяет условию (2.3), которое в эллиптической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{при } \eta = \pm \tfrac{1}{2}\pi$$

Функции f можно также дать интегральное представление. Очевидно, что эту функцию можно построить при помощи распределения «диполей»

$$f = \int_{-T}^{+T} q(s) \frac{\partial K_0(k_1 r)}{\partial y} ds, \qquad r = \sqrt{(z-s)^2 + y^2} \tag{3.8}$$

Из свойств выражения (3.8) имеем $f(-0, z) - f(+0, z) = 2\pi q(z)$. Поэтому на основании (3.6) и (3.7) находим

$$q(z) = \frac{TC}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Se}_n(0)}{\operatorname{Se}_n'(0)} B_{n1} \operatorname{se}_n(\eta) \tag{3.9}$$

Прежде чем определить постоянную C, вычислим коэффициенты C_+ и C_-. Стягивая контур интегрирования $L + \bar{L}$ в формулах (2.8) к отрезку $(-T, +T)$ оси z, будем иметь

$$C_\pm = \pm k \int_{-T}^{+T} f_+ e^{-kz} dz \qquad (f_+ = f(+0, z))$$

Подставив сюда разложение (3.6), получим

$$C_\pm = \pm \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Se}_n(0) \int_0^{\pi} e^{kT \cos \eta} d \operatorname{se}_n(\eta)$$

Воспользовавшись далее разложением (3.4) и интегральным представлением функции Бесселя $I_m(\alpha)$ от мнимого аргумента

$$I_m(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\alpha \cos \eta} \cos m\eta \, d\eta \tag{3.10}$$

окончательно найдем

$$C_\pm = \pm \pi TC \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Se}_n(0)}{\operatorname{Se}_n'(0)} B_{n1} D_n \qquad \left(D_n = \sum_{m=1}^{\infty} m B_{nm} I_m(kT)\right) \tag{3.11}$$

Определим теперь постоянную C. Из формулы (2.9) имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+ke^{kz}\int\limits_{+\infty}^{z}\frac{\partial f}{\partial y}e^{-kz}\,dz-ik_2C_+e^{kz-ik_2y}+\sigma_0r_0\sin\varepsilon e^{kz-ik\sin\varepsilon y}$$

Полагая $y=0$ и удовлетворяя условию (3.1), получаем

$$k\int\limits_{+\infty}^{T}\frac{\partial f}{\partial y}e^{-kz}\,dz+Ce^{-kT}-ik_2C_++\sigma_0r_0\sin\varepsilon=0 \tag{3.12}$$

Для интегрального слагаемого в (3.12), пользуясь (3.8), получаем

$$\int\limits_{+\infty}^{T}\frac{\partial f}{\partial y}e^{-kz}\,dz=k_1e^{-kT}\int\limits_{-T}^{+T}q(s)\,K_1[k_1(T-s)]\,ds+k_1^2\int\limits_{-T}^{+T}q(s)\,P(s)\,ds \tag{3.13}$$

где

$$P(s)=e^{-ks}\int\limits_{+\infty}^{T-s}e^{-kt}K_0(k_1t)\,dt \tag{3.14}$$

Для давления p в любой точке жидкости имеем линеаризированное выражение интеграла Лагранжа

$$p-p_0=-\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}-u\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)-\rho gz=-\rho i\sigma_0e^{i(\sigma t-kx\cos\varepsilon)}\psi(y,z)-\rho gz \tag{3.15}$$

где p_0 — атмосферное давление и ρ — плотность жидкости.

Для результирующей гидродинамических сил Y и момента M_x этих сил относительно начала координат имеем формулы

$$Y=\int\limits_{-T}^{0}(p_--p_+)\,dz,\qquad M_x=\int\limits_{-T}^{0}(p_--p_+)\,z\,dz \tag{3.16}$$

где p_- — давление на пластинку со стороны $y<0$, а p_+ — давление со стороны $y>0$, и, следовательно,

$$p_--p_+=\rho i\sigma_0e^{i(\sigma t-kx\cos\varepsilon)}(\psi_+-\psi_-)\qquad(\psi_+=\psi(+0,z),\ \psi_-=\psi(-0,z))$$

Из (2.9) получим выражение для ψ на отрезке $(-T,0)$ оси z:

$$\psi_\pm=\pm e^{kz}\int\limits_{-T}^{z}\frac{\partial f_+}{\partial z}e^{-kz}\,dz+i\frac{g}{\sigma_0}r_0e^{kz}$$

Поэтому

$$p_--p_+=2\rho i\sigma_0e^{i(\sigma t-kx\cos\varepsilon)}e^{kz}\int\limits_{-T}^{z}\frac{\partial f_+}{\partial z}e^{-kz}\,dz \tag{3.17}$$

Подставив (3.17) в (3.16) и интегрируя по частям, найдем

$$\begin{aligned}Y&=2\rho i\frac{g}{\sigma_0}e^{i(\sigma t-kx\cos\varepsilon)}\int\limits_{-T}^{0}\frac{\partial f_+}{\partial z}(e^{-kz}-1)\,dz\\M_x&=-2\rho i\frac{g}{\sigma_0}e^{i(\sigma t-kx\cos\varepsilon)}\int\limits_{-T}^{0}\frac{\partial f_+}{\partial z}\left(\frac{e^{-kz}}{k}+z-\frac{1}{k}\right)dz\end{aligned} \tag{3.18}$$

Воспользовавшись далее разложением (3.6), можем выражения (3.18) представить в виде, удобном для численных расчетов:

$$
\begin{aligned}
Y &= \quad 2TCi\,\frac{g}{\sigma_0}\,e^{i\,(\sigma t - kx\cos\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Se}_n(0)}{\mathrm{Se}_n'(0)}\,B_{n1}Y_n \\
M_x &= -\,2TCi\,\frac{g}{\sigma_0}\,e^{i\,(\sigma t - kx\cos\varepsilon)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Se}_n(0)}{\mathrm{Se}_n'(0)}\,B_{n1}M_n
\end{aligned}
\qquad (3.19)
$$

где

$$
\begin{aligned}
Y_n &= \int\limits_0^{1/2\pi} \frac{d\,\mathrm{Se}_n(\eta)}{d\eta}\,(e^{-kT}\cos\eta - 1)\,d\eta \\
M_n &= \int\limits_0^{1/2\pi} \frac{d\,\mathrm{Se}_n(\eta)}{d\eta}\left(\frac{e^{kT\cos\eta}}{k} - T\cos\eta - \frac{1}{k}\right)d\eta
\end{aligned}
\qquad (3.20)
$$

§ 4. Диффракция волн вокруг горизонтально плавающей пластины.

В рассматриваемом здесь случае граничное условие (1.8) имеет вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = 0 \text{ и } |y| < a \qquad (4.1)$$

Составим граничное условие для функции f. Дифференцируя соотношение (2.2), находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - k\,\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

или же на основании (1.6) и (2.1) имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - k_1^2 f = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - k_1^2\psi + k\,\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Принимая во внимание условие (4.1), получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 (f-\psi)}{\partial y^2} - k_1^2\,(f-\psi) = 0$$

Отсюда

$$f = \psi + Ae^{k_1 y} + Be^{-k_1 y} \qquad \text{при } z = 0 \text{ и } |y| < a \qquad (4.2)$$

где A и B — постоянные интегрирования.

Кроме того, из (2.2) и (4.1) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\,k\psi \qquad \text{при } z = 0 \text{ и } |y| < a \qquad (4.3)$$

Поэтому, умножая (4.2) на k и складывая с (4.3), получаем условие

$$\frac{\partial f}{\partial z} + kf = kAe^{k_1 y} + kBe^{-k_1 y} \qquad \text{при } z = 0 \text{ и } |y| < a \qquad (4.4)$$

Покажем, что функция f, удовлетворяющая уравнению (2.1) и условиям (2.3) и (4.4), при заданных постоянных A и B определяется единственным образом для всякого $k \geqslant 0$. В самом деле, пусть существуют две функции f_1 и f_2, удовлетворяющие этим условиям.

Тогда функция $f^* = f_1 - f_2$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial f^*}{\partial z} + kf^* = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } |y| < a, \qquad \frac{\partial f^*}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } |y| > a$$

Применяя формулу Грина, получим

$$\iint_S [|\nabla f^*|^2 + k_1^2 f^{*2}]\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f^* \frac{\partial f^*}{\partial z}\, dy = -k \int_{-a}^{+a} f^{*2}\, dy$$

отсюда $f^* \equiv 0$ для всякого $k \geqslant 0$.

Для решения данной задачи мы опять воспользуемся эллиптической системой координат, полагая теперь

$$y = a \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \qquad z = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta \tag{4.5}$$

В эллиптических координатах условия (2.3) и (4.4) примут вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \text{ и } \eta = -\pi \quad (\xi > 0) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + \lambda \sin \eta f = \lambda \sin \eta \left(A e^{\lambda_1 \cos \eta} + B e^{-\lambda_1 \cos \eta}\right) \quad \text{при } \xi = 0 \text{ и } -\pi < \eta < 0 \tag{4.7}$$

$$(\lambda = ka, \ \lambda_1 = \lambda \cos \varepsilon)$$

Представим функцию f в виде разложения в ряд по произведениям функций Матье:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Ce}_n(\xi) \operatorname{ce}_n(\eta) \tag{4.8}$$

Это выражение удовлетворяет условию (4.6). Для удовлетворения условия (4.7) составим выражения функций f и $\partial f / \partial \xi$ при $\xi = 0$. Имеем

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Ce}_n(0) \operatorname{ce}_n(\eta), \qquad \frac{\partial f}{\partial \xi} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Ce}_n'(0) \operatorname{ce}_n(\eta) \qquad \left(\operatorname{Ce}_n'(0) = \left(\frac{d \operatorname{Ce}_n}{d\xi}\right)_{\xi=0}\right)$$

Подставляя эти выражения в (4.7), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Ce}_n'(0) \operatorname{ce}_n(\eta) + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} a_m \operatorname{Ce}_m(0) \operatorname{ce}_m(\eta) \sin \eta =$$

$$= \lambda \sin \eta \left(A e^{\lambda_1 \cos \eta} + B e^{-\lambda_1 \cos \eta}\right) = \Phi_0 \tag{4.9}$$

Разложим $\Phi_0(\eta)$ в ряд по функциям $\operatorname{ce}_n(\eta)$ в интервале $(-\pi, 0)$:

$$\Phi_0(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A b_n^+ + B b_n^-) \operatorname{ce}_n(\eta) \tag{4.10}$$

где коэффициенты $b_n^{\mp}$ на основании (3.4) определяются выражениями

$$b_n^{\pm} = \pm \frac{2 \cos \varepsilon}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} \left\{(-1)^k e^{\mp \lambda_1} - e^{\pm \lambda_1} + k \int_0^{\pi} e^{\pm \lambda_1 \cos \lambda} \sin k\eta \, d\eta\right\} \tag{4.11}$$

Далее проведем разложение произведения $\operatorname{ce}_m(\eta) \sin \eta$ по функциям $\operatorname{ce}_n(\eta)$ в интервале $(-\pi, 0)$:

$$\operatorname{ce}_m(\eta) \sin \eta = \sum_{n=0}^{\infty} d_{nm} \operatorname{ce}_n(\eta) \qquad \left(d_{nm} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ce}_m(\eta) \sin \eta \operatorname{ce}_n(\eta)\, d\eta\right) \tag{4.12}$$

Произведя вычисления при помощи (3.4), получаем

$$d_{nm} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{mk} A_{ns} l_{ks} \tag{4.13}$$

причем коэффициенты l_{ks} отличны от нуля только при k и s одинаковой четности и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} l_{2\mu+1,\, 2\nu+1} &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4(\mu+\nu+1)^2-1} + \frac{1}{4(\mu-\nu)^2-1}\right] \\ l_{2\mu,\, 2\nu} &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4(\mu+\nu)^2-1} + \frac{1}{4(\mu-\nu)^2-1}\right] \end{aligned} \tag{4.14}$$

По этой причине коэффициенты d_{nm} отличны от нуля только при n и m одинаковой четности. Подставим (4.10) и (4.12) в условие (4.9):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Ce}_n'(0) \operatorname{ce}_n(\eta) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \operatorname{Ce}_m(0)\, d_{nm} \right) \operatorname{ce}_n(\eta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (A b_n^{+} + B b_n^{-}) \operatorname{ce}_n(\eta)$$

Приравнивая здесь коэффициенты при функциях $\operatorname{ce}_n(\eta)$, получим две независимые системы бесконечных уравнений для определения a_n

$$\begin{aligned} a_{2s+1} &= \sum_{l=0}^{\infty} C_{sl}^{(1)} a_{2l+1} + \frac{1}{\operatorname{Ce}_{2s+1}'(0)} (A b_{2s+1}^{+} + B b_{2s+1}^{-}) \\ a_{2s} &= \sum_{l=0}^{\infty} C_{sl}^{(2)} a_{2l} + \frac{1}{\operatorname{Ce}_{2s}'(0)} (A b_{2s}^{+} + B b_{2s}^{-}) \end{aligned} \qquad (s=0, 1, 2, \ldots) \tag{4.15}$$

где

$$C_{sl}^{(1)} = -\lambda \frac{\operatorname{Ce}_{2l+1}(0)\, d_{2s+1,\, 2l+1}}{\operatorname{Ce}_{2s+1}'(0)}, \qquad C_{sl}^{(2)} = -\lambda \frac{\operatorname{Ce}_{2l}(0)\, d_{2s,\, 2l}}{\operatorname{Ce}_{2s}'(0)} \tag{4.16}$$

При малых значениях параметра $\theta = -\frac{1}{4}\lambda_1^2$ функции $\operatorname{Ce}_n(\xi) \approx e^{-n\xi}$ $(n \neq 0)$ и $d_{nm} \approx l_{nm}$. Поэтому при малых θ система (4.15) совпадает с системой, рассмотренной в работе [2], разрешимость которой доказана.

Функцию f в рассматриваемой задаче можно представить в замкнутом виде через распределение «источников»

$$f = \int_{-a}^{+a} \gamma(s)\, K_0(k_1 r)\, ds, \qquad r = \sqrt{(y-s)^2 + z^2} \tag{4.17}$$

Из свойств функции f имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=-0} - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=+0} = 2\pi\gamma(y), \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=+0} = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=-0}$$

Поэтому на основании (4.8) интенсивность источников равна

$$\gamma(y) = \frac{1}{\pi a \sin\eta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Ce}_n'(0) \operatorname{ce}_n(\eta) \tag{4.18}$$

Определяем постоянные A и B. Согласно (2.2) и (2.5) имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}+kf+i\sigma_0 r_0 e^{kz-ik_2 y\sin\varepsilon}-\frac{k^2}{2ik_2}\left[e^{ik_2y}\int\limits_{+\infty}^{y}e^{-ik_2y}\left(\frac{\partial f}{dz}+kf\right)dy-\right.$$

$$\left.-e^{-ik_2y}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{ik_2y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}+kf\right)dy\right]$$

Удовлетворяя условие (4.1) и учитывая (2.3) и (4.4), получаем

$$\begin{aligned}
&k\int\limits_{+\infty}^{a}f(y,0)\,e^{-ik_2y}dy-\frac{Ae^{(k_1-ik_2)a}}{k_1-ik_2}+\frac{Be^{-(k_1+ik_2)a}}{k_1+ik_2}=0\\
&k\int\limits_{-\infty}^{-a}f(y,0)\,e^{ik_2y}\,dy-\frac{Ae^{-(k_1+ik_2)a}}{k_1+ik_2}+\frac{Be^{(k_1-ik_2)a}}{k_1-ik_2}=\frac{2}{k}\sin\varepsilon\sigma_0 r_0
\end{aligned}\tag{4.19}$$

Эти уравнения для A и B составлены для случая $\varepsilon<\pi$. Если же $\varepsilon>\pi$, то правые части в уравнениях (4.19) следует поменять местами.

Для выполнения численных расчетов интегралы в (4.19) следует преобразовать при помощи (4.17). В результате будем иметь

$$\int\limits_{\pm\infty}^{\pm a}f(y,0)\,e^{\mp ik_2y}\,dy=\pm\int\limits_{-a}^{+a}\gamma(x)\,Q(\pm x)\,dx\tag{4.20}$$

где

$$Q(x)=e^{-ik_2x}\int\limits_{+\infty}^{a-x}K_0(k_1t)\,e^{-ik_2t}\,dt\tag{4.21}$$

Пользуясь (3.15), (4.1), (2.2) для равнодействующей гидродинамических сил Z и момента M, получим (не учитывая гидростатические силы)

$$\begin{aligned}
Z&=\int\limits_{-a}^{+a}(p-p_0)\,dy=\rho i\,\frac{g}{\sigma_0}\,e^{i(\sigma t-kx\cos\varepsilon)}\int\limits_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=-0}dy\\
M_x&=\int\limits_{-a}^{+a}(p-p_0)\,y\,dy=\rho i\,\frac{g}{\sigma_0}\,e^{i(\sigma t-kx\cos\varepsilon)}\int\limits_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=-0}y\,dy
\end{aligned}\tag{4.22}$$

Подставив в (4.22) разложение (4.8), получаем простые формулы

$$\begin{aligned}
Z&=-\pi\rho i\,\frac{g}{\sigma_0}\,e^{i(\sigma t-kx\cos\varepsilon)}\,\mathrm{Ce}_0'(0)\,A_{00}a_0\\
M_x&=-\frac{\pi}{2}\,\rho i\,\frac{g}{\sigma_0}\,e^{i(\sigma t-kx\cos\varepsilon)}\,\mathrm{Ce}_1'(0)\,A_{11}a_1
\end{aligned}\tag{4.23}$$

Поступила 2 I 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Гидродинамическая теория качки корабля на волнении. ПММ, т. X, вып. 1, 1946.
2. Хаскинд М. Д. Колебания плавающего контура на поверхности тяжелой жидкости. ПММ, т. XVII, вып. 2, 1953.
3. Стретт М. Д. О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. ОНТИ, 1935.
4. Купрадзе В. О. Основные задачи математической теории диффракции (установившиеся процессы). ОНТИ, 1935.