Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В МЕСТНОЙ БЕССКАЧКОВОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗОНЕ

Л. Б. Горощенко

(Москва)

В настоящее время почти никем не оспаривается тот факт, что при обтекании какого-либо тела в дозвуковом потоке могут образовываться местные бесскачковые сверхзвуковые зоны. Для расчета течения на таких режимах и для определения предельного значения числа $M = M_\circ$ (т. е. того числа M_∞, при превышении которого обтекание без скачка уплотнения уже заведомо невозможно) необходимо решение бесскачковой смешанной задачи.

В настоящей статье, кратко излагающей основное содержание кандидатской диссертации автора, рассматриваются внешние задачи такого типа при следующих предпосылках: движение — адиабатическое, установившееся и безвихревое; газ — невязкий.

§ 1. Уравнение для потенциала скорости φ в полярных координатах r, θ (для плоской задачи) имеет вид:

$$r\left\{(\varkappa+1)\left[a_*^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2\right]-\frac{(\varkappa-1)}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{4}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\theta}+$$

$$+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r}\left\{(\varkappa+1)\left[a_*^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right]-(\varkappa-1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2\right\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+$$

$$+\left\{(\varkappa+1)\,a_*^2-(\varkappa-1)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right]\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \qquad (1.1)$$

Здесь a_* — критическое значение скорости звука, $\varkappa$ — показатель адиабаты.

Д. Б. Кикин [1] для решения уравнения (1.1) в случае сверхзвуковых задач пользовался представлением потенциала φ в виде ряда, расположенного по положительным возрастающим степеням радиуса-вектора r. Для дозвуковых задач такое разложение не пригодно, так как граничное условие на бесконечности окажется не выполненным.

Будем искать решение в виде ряда

$$\varphi(r,\theta)=r\lambda_0(\theta)+\lambda_1(\theta)+\frac{1}{r}\lambda_2(\theta)+\cdots+\frac{1}{r^{p-1}}\lambda_p(\theta) \qquad (1.2)$$

где λ_p — неизвестные функции, зависящие лишь от полярного угла θ.

Подставляя этот ряд в уравнение (1.1) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях r, получим систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка для определения функций λ_p.

Приводим первые три уравнения этой системы:

$$(\lambda_0'' + \lambda_0)\,[(\varkappa + 1)\,(a_*^2 - \lambda_0'^2) - (\varkappa - 1)\,\lambda_0^2] = 0 \tag{1.3}$$

$$[(\varkappa + 1)\,(a_*^2 - \lambda_0'^2) - (\varkappa - 1)\,\lambda_0^2]\,\lambda_1'' - 2\lambda_0'\,[(\varkappa + 1)\,\lambda_0'' + (\varkappa - 1)\,\lambda_0]\,\lambda_1' = 0 \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}&[(\varkappa + 1)\,(a_*^2 - \lambda_0'^2) - (\varkappa - 1)\,\lambda_0^2]\,\lambda_2'' - 2\lambda_0'\,[(\varkappa + 1)\,\lambda_0'' + (\varkappa - 3)\,\lambda_0]\,\lambda_2' + \\ &+ [(\varkappa + 1)\,a_*^2 + (\varkappa - 5)\,\lambda_0^2 - (\varkappa - 3)\,\lambda_0'^2 + 2\,(\varkappa - 1)\,\lambda_0\lambda_0'']\,\lambda_2 = \\ &= (\varkappa - 3)\,\lambda_0\lambda_1'^2 + (\varkappa + 1)\,\lambda_0''\lambda_1'^2 + 2\,(\varkappa + 1)\,\lambda_0'\lambda_1'\lambda_1''\end{aligned} \tag{1.5}$$

Эта система допускает последовательное решение.

Уравнение (1.3) нелинейно, но оно распадается на два уравнения, из которых для дозвуковых задач интерес представляет первое:

$$\lambda_0'' + \lambda_0 = 0 \tag{1.6}$$

Используя граничное условие $(V)_{r\to\infty} \to V_\infty$, решение уравнения (1.6) (скорость на бесконечности считаем направленной по оси x) получим в виде

$$\lambda_0 = V_\infty \cos\theta \tag{1.7}$$

Это решение соответствует установившемуся движению.

После подстановки (1.7) в уравнения для функций λ_p эти уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned}&(w + \cos 2\theta)\,\lambda_p'' - 2p\sin 2\theta\lambda_p' + [(p-1)^2 w - (p^2 - 1)\cos 2\theta]\,\lambda_p = \\ &= \frac{1}{V_\infty^2} f_p\,(\lambda_0, \lambda_0', \lambda_0'', \ldots, \lambda_{p-1}, \lambda_{p-1}', \lambda_{p-1}'') \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)\end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$w = (\varkappa + 1)\left(\frac{a_*}{V_\infty}\right)^2 - \varkappa = \frac{2}{M_\infty^2} - 1 \tag{1.9}$$

Выражение для функции f_p здесь не приводится ввиду его громоздкости. Эти уравнения линейные с периодическими коэффициентами. Поэтому естественно искать их решения в виде рядов Фурье:

$$\lambda_p = e^{\mu\theta}\sum_{n=0}^{\infty}(a_{pn}\cos n\theta + b_{pn}\sin n\theta) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.10}$$

Причем для симметричных задач решение определяется при помощи более простого ряда вида

$$\lambda_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p,\,2n+1}\cos(2n+1)\,\theta \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.11}$$

Однако уравнения с периодическими коэффициентами могут иметь и непериодические решения, что и имеет место для циркуляционных задач, для которых более удобны решения в виде степенных рядов

$$\lambda_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_{pn}\theta^n, \qquad \lambda_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p2n}\theta^{2n} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.12}$$

для общего и симметричного случаев обтекания соответственно. Причем тригонометрические функции в выражении (1.8) заменяются аппроксимирующими их степенными полиномами.

Подставив ряды (1.11) или (1.12) в уравнения (1.8) для функций λ_p и приравнивая коэффициенты, получим бесконечные системы алгебраических уравнений для коэффициентов рядов. Анализ общей формулы для функции f_p в выражении (1.8) показывает, что алгебраические уравнения, соответствующие функциям λ_p, линейны при $p = 1, 2, 3$ и нелинейны при $p = 4, 5, 6 \ldots$.

Число неизвестных в системах алгебраических уравнений превышает число уравнений. Недостающие уравнения находятся при помощи второго граничного условия — условия непротекаемости контура:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_n = 0$$

Это выражение в полярных координатах может быть записано так:

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \tag{1.13}$$

Подставляя в это уравнение ряд (1.2), нетрудно получить

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}\left(\lambda_0' + \frac{1}{r}\lambda_1' + \frac{1}{r^2}\lambda_2' + \cdots\right) - \lambda_0 + \frac{1}{r^2}\lambda_2 + \cdots = 0 \tag{1.14}$$

Уравнение контура произвольного тела $r = r(\theta)$ можно представить в виде степенного или тригонометрического ряда. После подстановки рядов для r и λ выражение (1.14) дает бесконечную систему алгебраических уравнений, соответствующих граничному условию.

Следует отметить, что ряд (1.2) может сходиться лишь при $r \geqslant 1$. Поэтому под r следует понимать относительный радиус, т. е. радиус, деленный на характерный размер тела, например, на его толщину.

§ 2. Приложим изложенный метод к задаче об обтекании цилиндра поступательным потоком газа. Для этой бесциркуляционной задачи функция λ_1, дающая течение от вихря и определяемая однородным дифференциальным уравнением (1.4), будет равна нулю. Можно доказать, что и все остальные функции λ_p с нечетным индексом будут равны нулю. Следовательно, ряд, дающий решение, запишется

$$\varphi(r, \theta) = r\lambda_0(\theta) + \frac{1}{r}\lambda_2(\theta) + \frac{1}{r^3}\lambda_4(\theta) + \cdots + \frac{1}{r^{2p-1}}\lambda_{2p}(\theta) \tag{2.1}$$

Задачу будем решать с точностью до функции λ_4, что дает хорошее совпадение с опытом. Функции λ_{2p} ищутся в виде (1.11):

$$\lambda_{2p} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2p,\,2n+1} \cos(2n+1)\theta \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

После подстановки этого ряда в (1.8) получим

$$\left[2p(2n+3) - \frac{(2n+3)^2}{2} - \frac{(4p^2-1)}{2}\right] a_{2p,\,2n+3} +$$

$$+ \left[(2p-1)^2 - (2n+1)^2\right] a_{2p,\,2n+1} -$$

$$- \left[2p(2n-1) + \frac{(2n-1)^2}{2} + \frac{(4p^2-1)}{2}\right] a_{2p,\,2n-1} = F_{2p,\,n} \qquad \begin{pmatrix} n=0,\ 1,\ \ldots \\ p=1,\ 2,\ \ldots \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Функция $F_{2p,n}$, т. е. общая формула для правых частей алгебраических уравнений весьма громоздка. Поэтому здесь приводятся выражения, соответствующие $p = 1$ и $p = 2$.

$$F_{2n} = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{2.3}$$

$$F_{40} = \frac{1}{V_\infty}\Big\{\frac{1}{2}(\varkappa - 1)\, a_{2,1}^2 + [(2k+1)(\varkappa - 5) - 2]\, a_{2,2k+1}^2 + + [8(k+1)^2(\varkappa - 2) + \varkappa + 1]\, a_{2,2k+1}a_{2,2k+3}\Big\} \tag{2.4}$$

$$F_{41} = \frac{1}{V_\infty}\Big\{\frac{1}{2}(\varkappa + 1)\, a_{2,1}^2 + (\varkappa + 1)\, a_{2,1}a_{2,3} + [(\varkappa + 1) - - 24(k+1)^2]\, a_{2,2k+1}a_{2,2k+3} + + [3(\varkappa - 1)(2k+3)^2 - 24\varkappa + 4]\, a_{2,2k+1}a_{2,2k+5}\Big\} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{2.5}$$

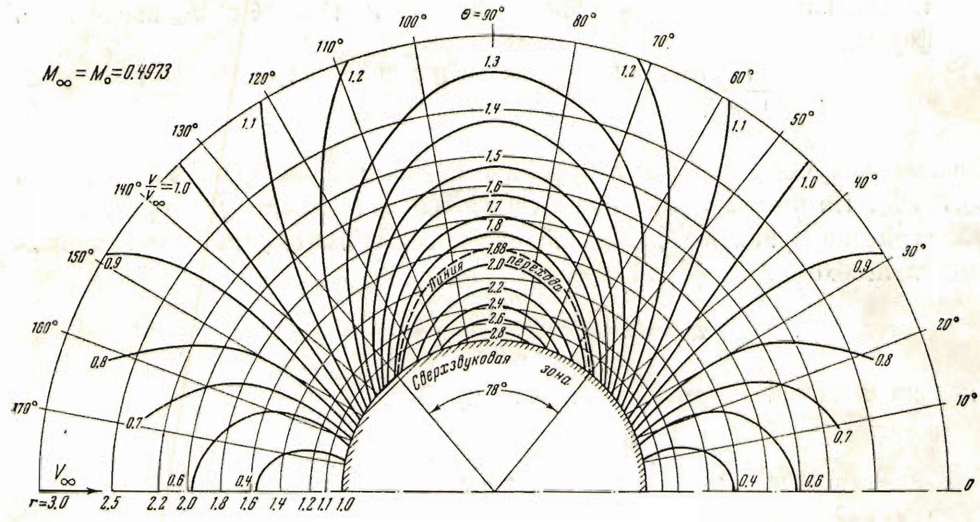
Пользуясь (2.2), для определения коэффициентов получим систему

$$\begin{array}{l}
0a_{21} + 0a_{23} = 0 \\
a_{21} + 2wa_{23} + a_{25} = 0 \\
a_{23} + 2wa_{25} + a_{27} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
4(1 - 2w)\, a_{41} + 0a_{43} = -F_{40} \\
12a_{41} + 0a_{43} + 0a_{45} = -F_{41} \\
24a_{43} + 16wa_{45} + 4a_{47} = -F_{42} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{2.6}$$

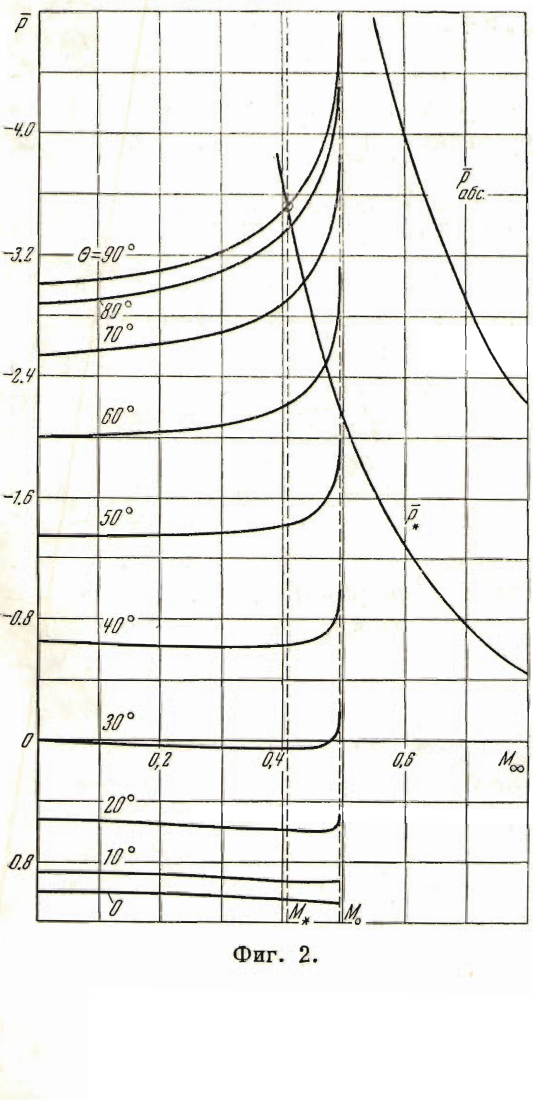
Кратко проанализируем эту систему. Во-первых, отметим, что хотя дифференциальные уравнения для функций λ_2 и λ_4 — второго порядка, но из уравнений граничного условия к каждой группе уравнений системы (2.6) можно добавить лишь по одному уравнению, так как решается симметричная задача и вторая произвольная постоянная интегрирования обращается в нуль. Заметим попутно, что исходной независимой произвольной постоянной является, естественно, V_∞ (произвольные постоянные в решениях уравнений для функций λ_2 и λ_4 зависят от V_∞).

Весьма примечательным является тот факт, что решение с точностью до λ_2, строго говоря, невозможно, так как в этом случае благодаря выпадению первого уравнения система уравнений, определяющих функцию λ_2, не замкнется. Для того чтобы эта система замкнулась, необходимо к первой группе уравнений системы (2.6) добавить, кроме уравнения граничного условия, еще два первых уравнения (оба они вводят только одно новое неизвестное a_{41}) из группы уравнений, определяющих функцию λ_4. Желание учесть коэффициенты a_{45}, a_{47} (коэффициент a_{43} определяется из второго уравнения граничного условия) привело бы к необходимости использовать первые три уравнения из системы для функции λ_6 и т. д.

Таким образом, наше приближенное решение требует учета функции λ_4, что влечет за собой появление в системе алгебраических уравнений,



Фиг. 1.



Фиг. 2.

дающих решение задачи, нелинейных алгебраических уравнений [(см.формулы (2.4), (2.5)]. Последнее обстоятельство, как мы увидим ниже, позволит зафиксировать момент появления скачка уплотнения.

После некоторых упрощений, почти не влияющих на точность расчета, решение задачи об обтекании цилиндра можно свести к решению системы из пяти алгебраических уравнений.

Нахождение коэффициентов $a_{2p,\,2n+1}$ из этой системы не представляет труда. Если же эти коэффициенты известны, то при помощи ряда (1.2) легко вычислить радиальную $v_r = \partial\varphi / \partial r$ и тангенциальную $v_\theta = r^{-1}\partial\varphi / \partial\theta$ компоненты скорости.

Далее можно построить кривые относительных скоростей и поправок на сжимаемость, поле скоростей (фиг. 1) и т. п.

Если зависимость относительной скорости V / V_∞ от θ и M_∞ найдена, то по формуле

$$\bar{p} = \frac{p - p_\infty}{{}^1/_2 \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{[1 + {}^1/_2 (\varkappa - 1) M_\infty^2 (1 - V^2 / V_\infty^2)]^{\varkappa/\varkappa - 1} - 1}{{}^1/_2 \varkappa M_\infty^2} \tag{2.7}$$

можно получить кривые коэффициента давления в функции M_∞ и θ (фиг. 2). На этом графике нанесена также зависимость $\bar{p}_*$ (критическое значение коэффициента давления) от M_∞. Для нахождения этой зависимости необходимо в формуле (1.9)

$$w = (\varkappa + 1) \left(\frac{a_*}{V_\infty}\right)^2 - \varkappa = \frac{2}{M_\infty^2} - 1$$

положить $a_* = V_*$ (критический режим). Тогда

$$\left(\frac{V}{V_\infty}\right)_*^2 = \frac{w + \varkappa}{\varkappa + 1} = \frac{1}{\varkappa + 1}\left(\frac{2}{M_\infty^2} + \varkappa - 1\right)$$

Поставляя это выражение в формулу (2.7), получим

$$\bar{p}_* = \frac{2}{\varkappa M_\infty^2} \left\{\left[\frac{2 + (\varkappa - 1) M_\infty^2}{\varkappa + 1}\right]^{\varkappa/\varkappa - 1} - 1\right\} \tag{2.8}$$

Для того чтобы проанализировать течение кривых фиг. 1, 2, необходимо привести формулу для коэффициента a_{21}, получающуюся при решении системы алгебраических уравнений. При решении с точностью до a_{23} имеем

$$a_{21} = \frac{(2w - 1) - \sqrt{(2w - 1)(2w - 14.2 + 3.6 / w - 25.8 / w^2)}}{6.6 - 1.8 / w + 12.9 / w^2} \tag{2.9}$$

Остальные коэффициенты выражаются в виде несложных функций от a_{21}, так что, например, относительную максимальную скорость на цилиндре можно выразить следующей формулой:

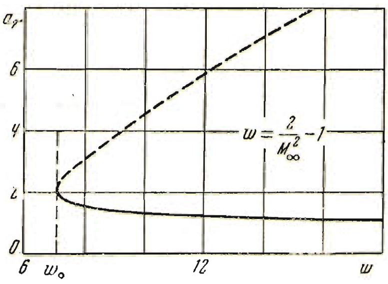
$$\frac{V_{\max}}{V_\infty} = -\frac{1}{3w}\left[\frac{(2w - 1) - \sqrt{(2w - 1)(2w - 14.2 + 3.6 / w - 25.8 / w^2)}}{6.6 - 1.8 / w + 12.9 / w^2}(2w + 3) + 4w\right] \tag{2.10}$$

Анализ формул (2.9) или (2.10) показывает, что при $w < w_\circ$ коэффициент a_{21} и $V_{\max} / V_\infty$ становятся величинами комплексными и решение теряет физический смысл, свидетельствуя о том, что при $w < w_\circ$ (т. е. при $M_\infty > M_\circ$) бесскачковое обтекание цилиндра становится уже заведомо невозможным. При $w = w_\circ$ подкоренное выражение в формулах (2.9), (2.10) обратится в нуль. Отсюда ясно, что для определения $w_\circ$ необходимо решить следующее кубическое уравнение:

$$2w_\circ^3 - 14.2 w_\circ^2 + 3.6 w_\circ - 25.8 = 0$$

Интересующий нас корень этого уравнения оказывается равным $w_\circ = 7.1$, или $M_\circ = 0.4973 \approx 0.5$. Следует отметить, что увеличение [illegible]ета мало влияет на величину $M_\circ$. Критическое значение [illegible]еляемое пересечением кривых $\bar{p}_{\min}$ (при $\theta = 90°$) и $\bar{p}_*$ (фиг. 2), [illegible]индра 0.4065, а число M, при котором возникает скачок, [illegible] Таким образом, местные бесскачковые сверхзвуковые зоны могут существовать на цилиндре при числе M_∞, превышающем M_* почти на 0.1. На предельном режиме сверхзвуковые зоны достигают значительных размеров (фиг. 1), простираясь по контуру на 78° и более чем на половину радиуса в глубину потока, причем число M в них достигает значения 1.8.

Весьма интересным является следующее обстоятельство. Если построить кривую $a_{21} = f\,(w)$ (фиг. 3), верхняя пунктирная ветвь которой не имеет физического смысла, то нетрудно заметить, что



Фиг. 3.

$$\left(\frac{da_{21}}{dw}\right)_{w=w_0} = \infty \qquad (2.11)$$

Можно показать, что при увеличении точности расчета кривая $a_{21} = f\,(w)$ изменится мало и равенство (2.11) останется в силе.

Наличие равенства (2.11) в свою очередь ведет к выражениям:

$$\left(\frac{dp}{dM_\infty}\right)_{M_\infty = M_0} = \infty, \qquad \left(\frac{dV}{dM_\infty}\right)_{M_\infty = M_0} = \infty \qquad (2.12)$$

которые можно рекомендовать в качестве нового критерия, определяющего момент появления скачка уплотнения.

Может возникнуть вопрос: действительно ли критерий (2.12) соответствует появлению скачка уплотнения, а не какому-либо другому физическому фактору? Для проверки можно использовать критерий, выведенный А. А. Никольским и Г. И. Тагановым [2]:

$$\left(\frac{d\theta_1}{ds}\right)_{M_\infty = M_0} = 0 \qquad (2.13)$$

Этот критерий гласит: в момент появления скачка уплотнения величина производной от угла наклона вектора скорости на линии перехода по контуру обращается в нуль.

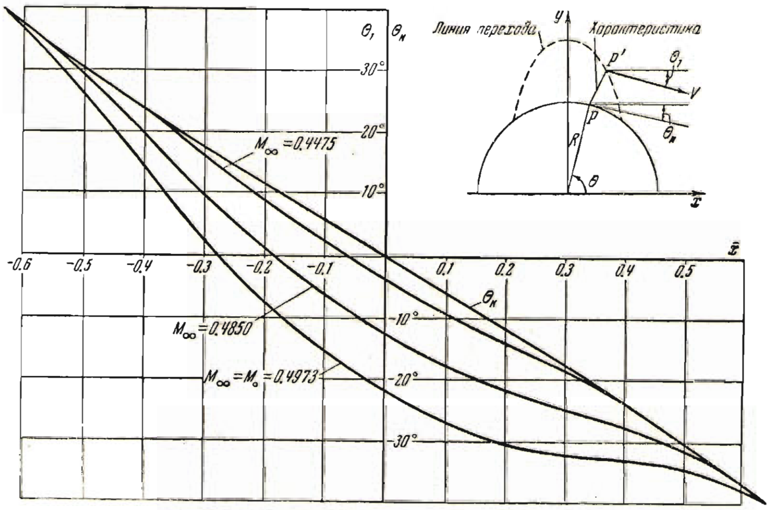
Кривые θ_1 при различных числах M_∞ даны на фиг. 4. При найденном нами значении M_0 кривая θ_1 действительно имеет участок, почти параллельный оси абсцисс. Таким образом, M_0 определено правильно и критерий (2.12) справедлив.

Теперь оказывается возможным объяснить причину необходимости появления скачка уплотнения. При $M_\infty > M_*$ с ростом скорости набегающего потока местные скорости в струйках начинают резко увеличиваться. Если бы скачки уплотнения не существовали, то местные скорости в струйках быстро превысили бы максимально возможную для газа скорость истечения в пустоту. Физически это невозможно, поэтому течение перестраивается, появляются скачки уплотнения.

Интересно отметить, что в момент появления скачков местные скорости на контуре еще далеко не достигают максимально возможного значения (см. кривую максимально возможных для газа разрежений $\bar{p}_{абс}$ на фиг. 2).

Это обстоятельство объясняется тем, что поток подвержен действию «закона монотонности», на основании которого и выведен критерий (2.13). Действительно, если в местной сверхзвуковой зоне скорости достигнут такого значения, что критерий (2.13) выполнится, то появится скачок.

Таким образом, критерий (2.12) определяет, при каком числе M_∞



Фиг. 4.

появится скачок уплотнения, а критерий (2.13) — какая при этом будет достигнута в сверхзвуковой зоне скорость. Рассматриваемый метод дает эту скорость автоматически.

Приведенное выше решение задачи об обтекании цилиндра показывает, что метод, изложенный в § 1, дает возможность решать смешанные бесскачковые задачи для заданного фиксированного контура. Причем появление скачка уплотнения констатируется не расхождением ряда для потенциала скорости (ряд сходится достаточно хорошо и при M_0), а появлением мнимости в решении.

Поступила 28 IV 1953

ЛИТЕРАТУРА

2. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, т. X, вып. 5, 1946.