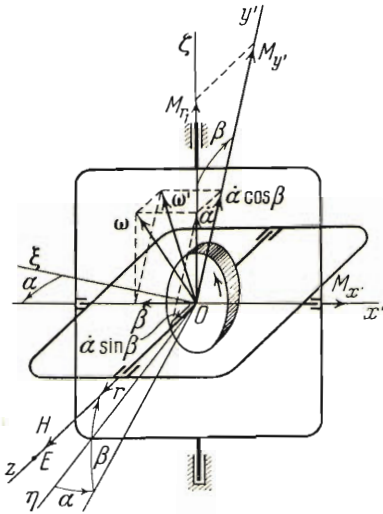


ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ
 СИММЕТРИЧНОГО АСТАТИЧЕСКОГО ИГРОСКОПА

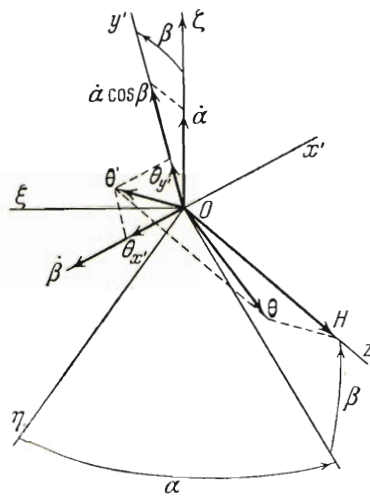
Г. А. Сломьянский

(Москва)

1. **Исходные положения.** Будем рассматривать симметричный астатический гироскоп в кардановом подвесе (фиг. 1). На чертеже $\xi\eta\zeta$ — неподвижная координатная система с началом в точке опоры гироскопа O . Ось ζ направлена вертикально вверх вдоль оси вращения внешней рамки подвеса. Оси ξ и η горизонтальны и образуют с осью ζ правый трехгранник; z — ось фигуры гироскопа; x', y' — полуподвижные оси, жестко связанные с внутренней рамкой карданова подвеса и имеющие начало



Фиг. 1



Фиг. 2

в точке O . Положение оси фигуры z относительно координатной системы $\xi\eta\zeta$ определяется при помощи двух углов — угла α между осью η и проекцией оси z на плоскость $\xi\eta$ и угла β между плоскостью $\xi\eta$ и осью z , показанных на фиг. 1 в направлении их положительного счета. Мгновенная угловая скорость ω осей x', y', z складывается из $\dot{\alpha}$ — скорости вращения внешней рамки подвеса и $\dot{\beta}$ — скорости вращения внутренней рамки относительно внешней рамки. Проекции ω на оси x', y' равны:

$$\omega_{x'} = -\dot{\beta}, \quad \omega_{y'} = \dot{\alpha} \cos \beta \quad (1.1)$$

Проекция ω' вектора ω на экваториальную плоскость гироскопа $x'y'$, являющаяся мгновенной угловой скоростью оси фигуры, равна:

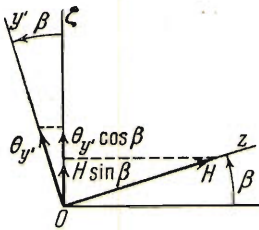
$$\omega' = \sqrt{\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2} = \sqrt{\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta} \quad (1.2)$$

Обозначим через θ кинетический момент гироскопа относительно точки O (фиг. 2), а через $\theta_{x'}$, $\theta_{y'}$, H его проекции на оси x' , y' , z . Так как

$$\theta_{x'} = A\omega_{x'}, \quad \theta_{y'} = A\omega_{y'},$$

где A — экваториальный момент инерции гироскопа, то согласно (1.1) имеем

$$\theta_{x'} = -A\dot{\beta}, \quad \theta_{y'} = A\dot{\alpha} \cos \beta \quad (1.3)$$



Фиг. 3

Проекция θ_z вектора θ на ось z (фиг. 3) согласно (1.3) равна:

$$\theta_z = \theta_{y'} \cos \beta + H \sin \beta = A\dot{\alpha} \cos^2 \beta + H \sin \beta \quad (1.4)$$

Будем полагать, что в момент возникновения движения гироскопа

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0, \quad \dot{\beta} = \dot{\beta}_0 \quad \text{при } t = 0$$

Подставив эти значения α , β , $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ в формулы (1.2), (1.3), (1.4), получим значения ω' , $\theta_{x'}$, $\theta_{y'}$ и θ_z при $t = 0$, которые в дальнейшем будем обозначать соответственно через ω'_0 , $\theta_{0x'}$, $\theta_{0y'}$ и θ_{0z} .

Если не учитывать инерцию рамок подвеса, то уравнения движения симметричного гироскопа, находящегося под действием внешнего момента M , в проекциях на оси x' , y' , z , как известно, имеют вид^[1]:

$$A(\ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta) + H\ddot{\beta} = M_{y'} \quad (1.5)$$

$$A(\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta) - H\dot{\alpha} \cos \beta = -M_{x'}$$

$$\dot{H} = M_z$$

где $M_{x'}$, $M_{y'}$, M_z — проекции M на оси x' , y' , z . Полагая $M_z = 0$, будем иметь согласно третьему из уравнений (1.5) $H = \text{const}$. В этом случае движение оси фигуры гироскопа полностью характеризуется двумя первыми уравнениями (1.5), которые перепишем в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + n\ddot{\beta} &= n^2 m_{y'} \\ \ddot{\beta} - n\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta &= -n^2 m_{x'} \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$n = \frac{H}{A}, \quad m_{x'} = \frac{M_{x'}}{An^2}, \quad m_{y'} = \frac{M_{y'}}{An^2}$$

2. Первые интегралы системы (1.6). Умножая первое из уравнений (1.6) на $\cos \beta$, имеем

$$\frac{d}{dt} (\dot{\alpha} \cos^2 \beta + n \sin \beta) = \frac{1}{A} M_{y'} \cos \beta$$

Воспользовавшись равенством (1.4) и учтя, что $M_{y'} \cos \beta = M_z$, т. е. проекция $M_{y'}$ на ось z (фиг. 1), получаем $d\theta_z = M_z dt$. Если момент M_z

является функцией только времени t (или постоянен), т. е. если $M_\zeta = M_\zeta(t)$, то, интегрируя и учитывая, что при $t = 0$ $\theta_\zeta = \theta_{0\zeta}$, имеем первый интеграл системы (1.6):

$$\theta_\zeta - \theta_{0\zeta} = \int_0^t M_\zeta(t) dt \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) выражает собой, что изменение момента количества движения гироскопа вокруг оси вращения внешней рамки карданова подвеса ζ равно сумме элементарных импульсов момента M_ζ , действующего вокруг этой оси.

Умножив первое из уравнений (1.6) на $2\dot{\alpha} \cos \beta$, второе на $2\dot{\beta}$ и сложив их, получаем

$$\frac{d}{dt} (\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta) = \frac{2}{A} (M_\zeta \dot{\alpha} - M_{x'} \dot{\beta})$$

Учтя (1.2), имеем $d(\frac{1}{2} A \omega'^2) = M_\zeta d\alpha - M_{x'} d\beta$. Когда момент M_ζ зависит только от угла α (или постоянен), а момент $M_{x'}$ является функцией только угла β (или постоянен), т. е. если $M_\zeta = M_\zeta(\alpha)$, $M_{x'} = M_{x'}(\beta)$, то, интегрируя от момента возникновения движения до текущего момента времени t и учитывая, что при возникновении движения, т. е. при $t = 0$, $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\omega' = \omega'_0$, получаем второй первый интеграл системы (1.6):

$$\frac{1}{2} A \omega'^2 - \frac{1}{2} A \omega'_0{}^2 = \int_{\alpha_0}^{\alpha} M_\zeta(\alpha) d\alpha - \int_{\beta_0}^{\beta} M_{x'}(\beta) d\beta \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) выражает собой теорему живой силы для движения оси фигуры относительно точки O (фиг. 1). Поскольку момент M_ζ не может одновременно являться функцией только времени t и зависеть только от угла α , то система (1.6) может одновременно иметь оба первых интеграла (2.1) и (2.2) лишь тогда, когда момент M_ζ постоянен (или равен нулю), а момент $M_{x'}$ является функцией только угла β (или постоянен). В этом случае первые интегралы системы (1.6) принимают следующий вид:

$$\theta_\zeta - \theta_{0\zeta} = M_\zeta t \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{2} A \omega'^2 - \frac{1}{2} A \omega'_0{}^2 = M_\zeta (\alpha - \alpha_0) - \int_{\beta_0}^{\beta} M_{x'}(\beta) d\beta \quad (2.4)$$

Отметим, что уравнение (2.3) позволяет определить время t_c , требующееся на совмещение рамок карданова подвеса, при действии на гироскоп постоянного момента M_ζ . Если рамки подвеса совмещены, то $\beta = \frac{1}{2} \pi$ (фиг. 1) и, следовательно, $\theta_\zeta = H$ [см. (1.4)], в силу чего

$$t_c = \frac{H - \theta_{0\zeta}}{M_\zeta} \quad \left(t_c = \frac{H}{M_\zeta} \right)$$

В скобках указано время, требующееся для совмещения рамок в случае, когда в начальный момент они были взаимно перпендикулярны ($\beta_0 = 0$), а $\dot{\alpha}_0 = 0$.

3. Общее решение системы (1.6) при $M_{x'} = M_{y'} = 0$. В данном случае система (1.6) принимает вид:

$$\ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + n\dot{\beta} = 0, \quad \ddot{\beta} - n\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta = 0 \quad (3.1)$$

Полагая в (2.1) и (2.2) $M_{x'} = M_{y'} = 0$, получаем первые интегралы системы (3.1):

$$\theta_{\zeta} = \theta_{0\zeta}, \quad \omega'^2 = \omega_0'^2 \quad (3.2)$$

которые показывают, что во все время движения гироскопа θ_{ζ} и ω' остаются постоянными, равными их начальным значениям $\theta_{0\zeta}$ и ω_0' . Если $\theta_{0\zeta} = 0$, что будет, когда $\beta_0 = 0$, $\dot{\alpha}_0 = 0$, то во все время движения гироскопа вектор его кинетического момента θ будет оставаться перпендикулярным к оси ζ . При $\omega_0' = 0$ ось фигуры остается неподвижной. Используя (1.4), преобразуем первое уравнение системы (3.2) к виду

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{A} (\theta_{0\zeta} - H \sin \beta) \sec^2 \beta \quad (3.3)$$

Вставив во второе уравнение (3.2) выражения (1.2) и (3.3), имеем

$$\dot{\beta} = \frac{1}{A} \sqrt{\theta_0'^2 - (\theta_{0\zeta} - H \sin \beta)^2 \sec^2 \beta} \quad (\theta_0' = A\omega_0')$$

Разделив здесь переменные и интегрируя, получаем

$$t = A \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{\theta_0'^2 - (\theta_{0\zeta} - H \sin \beta)^2 \sec^2 \beta}}$$

Отсюда, пользуясь подстановкой $z = \sin \beta$ и равенством $\theta_0'^2 = H^2 + \theta_{0\zeta}^2$, получаем [2] окончательное выражение для угла β :

$$\beta = \arcsin \left\{ \frac{1}{\theta_0'^2} [H\theta_{0\zeta} + \theta_0' \sqrt{\theta_0'^2 - \theta_{0\zeta}^2} \sin(\mu t - \vartheta)] \right\} \quad (3.4)$$

где

$$\mu = \frac{\theta_0'}{A}, \quad \sin \vartheta = \frac{H\theta_{0\zeta} - \theta_0'^2 \sin \beta_0}{\theta_0' \sqrt{\theta_0'^2 - \theta_{0\zeta}^2}} \quad (3.5)$$

Разделив в (3.3) переменные и интегрируя, имеем

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (\theta_{0\zeta} - H \sin \beta) \sec^2 \beta dt$$

Разложив подынтегральное выражение на элементарные дроби, заменив $\sin \beta$ его выражением (3.4), применив подстановку $\tau = \mu t - \vartheta$, получаем [2]

$$\alpha = \alpha_0 + \left| \arcsin \frac{a_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\tau + b}{\theta_0' (H + \theta_{0\zeta})} - \arcsin \frac{a_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\tau - b}{\theta_0' (H - \theta_{0\zeta})} \right|_{-\vartheta}^{\mu t - \vartheta}$$

где

$$a_1 = \theta_0'^2 + H\theta_{0\zeta}, \quad a_2 = \theta_0'^2 - H\theta_{0\zeta}$$

Применив теорему сложения и произведя подстановку пределов, получаем окончательное выражение для угла α :

$$\alpha = \alpha_0 - \varphi + \arcsin \frac{2\theta_0'\theta_{0\zeta} (H \sqrt{\theta_0'^2 - \theta_{0\zeta}^2} - \theta_0'\theta_{0\zeta} x)}{\theta_0'^2 (H^2 - \theta_{0\zeta}^2 + \theta_0'^2 x^2) - (\theta_0' \sqrt{\theta_0'^2 - \theta_{0\zeta}^2} + H\theta_{0\zeta} x)^2} \quad (3.6)$$

В формуле (3.6) обозначено

$$x = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\mu t - \vartheta)$$

$$\sin \varphi = \frac{2\theta_0 \theta_0' (H \sqrt{\theta_0^2 - \theta_{0z}^2} + \theta_0' \theta_{0z} \operatorname{tg}^{1/2} \vartheta)}{\theta_0^2 (H^2 - \theta_{0z}^2 + \theta_0^2 \operatorname{tg}^2 1/2 \vartheta) - (\theta_0' \sqrt{\theta_0^2 - \theta_{0z}^2} - H \theta_{0z} \operatorname{tg}^{1/2} \vartheta)^2}$$

Таким образом, углы α и β являются периодическими функциями времени с периодом $T = 2\pi/\mu$. Причем, поскольку $H = \text{const}$, движение оси фигуры определяется лишь величинами θ_0' и θ_{0z} , одни и те же значения которых могут быть получены при самых разнообразных значениях β_0 , $\dot{\alpha}_0$ и $\dot{\beta}_0$. Период T и амплитуды колебаний оси фигуры в углах α и β не зависят от угла α_0 .

Для получения в общем виде уравнения траектории вершины гироскопа E (фиг. 1) следует заменить в (3.6) разность $\mu t - \vartheta$ ее значением, полученным из выражения (3.4).

Воспользовавшись равенствами $\theta_0' = A\omega_0'$, $\theta_0^2 = H^2 + \theta_0'^2$ и выражением для θ_{0z} , преобразуем формулы (3.4) и (3.6) к виду

$$\beta = \arcsin \left[\frac{1}{p} (l + R \sqrt{q} \sin \tau) \right] \quad (3.7)$$

$$\alpha = \alpha_0 - \varphi + \arcsin \operatorname{tg} \frac{2R(\sqrt{q} - lR \operatorname{tg}^{1/2} \tau)}{\sqrt{p}(1 - l^2 + p \operatorname{tg}^2 1/2 \tau) - (R\sqrt{q} + l \operatorname{tg}^{1/2} \tau)^2} \quad (3.8)$$

где

$$\tau = n \sqrt{pt} - \vartheta, \quad p = 1 + R^2, \quad R = \frac{\omega_0'}{n}$$

$$q = (1 - e \sin \beta_0)^2 \cos^2 \beta_0 + h^2, \quad l = \sin \beta_0 + e \cos^2 \beta_0$$

$$\sin \vartheta = \frac{1}{R\sqrt{q}} (l - p \sin \beta_0), \quad e = \frac{\dot{\alpha}_0}{n}, \quad h = \frac{\dot{\beta}_0}{n}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = 2R \frac{\sqrt{q} + lR \operatorname{tg}^{1/2} \vartheta}{\sqrt{p}(1 - l^2 + p \operatorname{tg}^2 1/2 \vartheta) - (R\sqrt{q} - l \operatorname{tg}^{1/2} \vartheta)^2}$$

Из этих выражений следует, что углы α и β зависят не от значений скоростей $\dot{\alpha}_0$, $\dot{\beta}_0$, а лишь от их отношений к параметру n . Чем меньше $R = \omega_0'/n$, тем меньше амплитуды колебаний оси фигуры в углах α и β .

Все технические гироскопы являются быстро вращающимися, т. е. имеют весьма большие численные значения n .

Из опыта известно, что скорости $\dot{\alpha}_0$, $\dot{\beta}_0$, а следовательно, и скорость ω_0' , которые можно сообщить таким гироскопам, малы по сравнению с n . Поэтому для быстро вращающихся гироскопов величины e , h , R являются малыми по сравнению с единицей.

Для таких гироскопов можно принять $\approx p 1$, $q \approx \cos^2 \beta_0$. Тогда вместо формулы (3.7) имеем

$$\beta = \arcsin \{ \sin \beta_0 + R \cos \beta_0 [\sin \vartheta + \sin (nt - \vartheta)] \} \quad (3.9)$$

$$\left(R = \frac{\omega_0'}{n}, \quad \sin \vartheta \approx \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega_0'} \cos \beta_0 \right)$$

Полагая в (3.8) $p = 1$, $q = \cos^2 \beta_0$, пренебрегая слагаемыми, содержащими малую величину R , и принимая $1 - l^2 \approx \cos^2 \beta_0$, получаем

$$\alpha = \alpha_0 - \arctg \left(\frac{2R}{\cos \beta_0} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) + \arctg \left[\frac{2R}{\cos \beta_0} \cos^2 \frac{1}{2} (nt - \vartheta) \right]$$

Применив теорему сложения, отбросив слагаемое, содержащее квадрат малой величины R , и преобразовав косинусы половинных углов, имеем

$$\alpha = \alpha_0 + \arctg \left(\frac{R}{\cos \beta_0} \cos (nt - \vartheta) - \cos \vartheta \right) \quad (3.10)$$

Выражения (3.9) и (3.10) определяют движение оси фигуры быстро вращающегося симметричного астатического гироскопа в кардановом подвесе по инерции. Эти выражения можно упростить еще более. Поскольку R мало по сравнению с единицей, то второе слагаемое правой части формулы (3.10) можно заменить первым членом его разложения в степенной ряд.

Сделав это, получаем

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{R}{\cos \beta_0} [\cos \vartheta - \cos (nt - \vartheta)] \quad (3.11)$$

На том же основании разложим правую часть выражения (3.9) по степеням малой величины

$$R \cos \beta_0 [\sin \vartheta + \sin (nt - \vartheta)]$$

и ограничимся первыми двумя членами ряда; имеем

$$\beta = \beta_0 + R [\sin \vartheta + \sin (nt - \vartheta)] \quad (3.12)$$

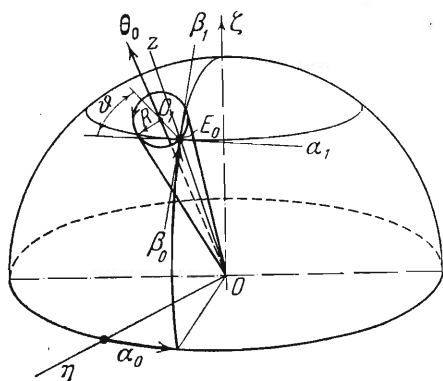
Для наглядного истолкования движения оси фигуры быстро вращающегося симметричного астатического гироскопа по инерции перейдем в выражениях (3.11) и (3.12) от углов α и β к углам $\alpha_1 = (\alpha - \alpha_0) \cos \beta_0$

и $\beta_1 = \beta - \beta_0$; получаем

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -R [\cos \vartheta - \cos (nt - \vartheta)] \\ \beta_1 &= R [\sin \vartheta + \sin (nt - \vartheta)] \end{aligned} \quad \left(R = \frac{\omega_0'}{n}, \sin \vartheta = \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega_0'} \cos \beta_0 \right) \quad (3.13)$$

Будем рассматривать α_1, β_1 как прямоугольные координаты вершины гироскопа E на плоскости, касательной в точке E_0 к поверхности единичной сферы с центром в неподвижной точке гироскопа O (фиг. 1 и 4). Точка E_0 является точкой расположения вершины гироскопа E в начальный момент времени $t = 0$; ее координаты $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$. В точку E_0 помещаем начало осей α_1, β_1 . Ось α_1 направляем по касательной к параллели, а ось β_1 — по касательной к меридиану (фиг. 4). Положительные направления осей α_1, β_1 выбираем в направлениях возрастания α и β . Исключив из выражений (3.13) время t , получаем уравнение траектории вершины гироскопа E в плоскости осей $\alpha_1 \beta_1$:

$$(\alpha_1 + R \cos \vartheta)^2 + (\beta_1 - R \sin \vartheta)^2 = R^2 \quad (3.14)$$



Фиг. 4

Это уравнение определяет окружность радиуса $R = \omega_0' / n$ с центром в точке O_1 с координатами $\alpha_1 = -R \cos \vartheta$, $\beta_1 = R \sin \vartheta$, проходящую через точку E_0 (фиг. 4).

Из формул (3.13) и (3.14) следует, что если оси фигуры быстро вращающегося гироскопа сообщить угловую скорость ω_0' , то она будет описывать с угловой скоростью n круглый конус с углом при вершине, равным $2 \operatorname{arctg} R \approx 2R$. Отметим без доказательства, что ось конуса OO_1 (фиг. 4) направлена вдоль вектора кинетического момента гироскопа θ_0 . Поскольку растров конуса невелик, то во все время движения углы α_1 , β_1 , а следовательно, и углы α , β остаются близкими к их начальным значениям α_0 , β_0 . В то же время, как видно из формул (3.11), (3.12), амплитуда колебаний внутренней рамки карданова подвеса (амплитуда колебаний в угле β) не зависит от угла β_0 ; амплитуда колебаний внешней рамки (амплитуда колебаний в угле α) при прочих равных условиях тем больше, чем больше угол β_0 , и при $\beta_0 \neq 0$ она всегда больше амплитуды колебаний внутренней рамки. Устойчивость оси фигуры гироскопа в углах α и β будет одинаковой и притом в угле α наибольшей, при $\beta_0 = 0$, т. е., когда рамки карданова подвеса взаимно перпендикулярны. Если рамки подвеса не перпендикулярны друг другу, то устойчивость в угле α будет меньше, чем в угле β , и тем значительнее, чем больше угол β_0 .

Качественная сторона рассмотренного движения оси фигуры остается справедливой и для гироскопа с любой скоростью собственного вращения. В общем случае угловая скорость вращения оси фигуры по конусу равна $\mu = \theta_0 / A$, а угол при вершине конуса равен $2 \operatorname{arctg} (\omega_0' / n)$.

4. Общее решение системы (1.6) при $M_x = \text{const}$, $M_y = 0$. В этом случае система (1.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + n\dot{\beta}^2 &= 0 \\ \ddot{\beta} - n\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta &= -n^2 m_x \end{aligned} \quad (4.1)$$

Положив в (2.3) и (2.4) $M_z = 0$, $M_x = \text{const}$, получаем первые интегралы системы (4.1):

$$\theta_\zeta = \theta_{0\zeta}, \quad \frac{1}{2} A \omega'^2 - \frac{1}{2} A \omega_0'^2 = -M_x (\beta - \beta_0) \quad (4.2)$$

Первое из уравнений (4.2) показывает, что θ_ζ — проекция кинетического момента гироскопа θ на ось ζ — остается во все время движения гироскопа постоянной, равной $\theta_{0\zeta}$ — ее значению в начальный момент движения. Если $\beta_0 = 0$, $\dot{\alpha}_0 = 0$, и, следовательно, $\theta_{\zeta} = 0$, то во все время движения гироскопа вектор его кинетического момента θ будет оставаться перпендикулярным к оси прецессии ζ . Рассматривая второе из уравнений (4.2), видим, что величина мгновенной угловой скорости оси фигуры ω' является функцией только угла β . При $\beta = \beta_0$ $\omega' = \omega_0'$.

Если $\omega_0' = 0$, то во все время движения правая часть должна быть положительной и, следовательно, угол β будет удовлетворять соотношениям $\beta \leq \beta_0$ при $M_x > 0$, $\beta \geq \beta_0$ при $M_x < 0$.

Воспользовавшись (1.4), преобразуем первое из уравнений (4.2) к виду

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{A} (\theta_{0z} - H \sin \beta) \sec^2 \beta \quad (4.3)$$

Заменив во втором из уравнений (4.2) ω' и $\dot{\alpha}$ их выражениями (1.2) и (4.3) и воспользовавшись равенством $\theta_0' = A\omega_0'$, получаем

$$\dot{\beta} = \frac{1}{A} \sqrt{\theta_0'^2 - 2AM_{x'}(\beta - \beta_0) - (\theta_{0z} - H \sin \beta)^2 \sec^2 \beta} \quad (4.4)$$

Разделив в (4.4) и (4.3) переменные и интегрируя, имеем

$$t = A \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{\theta_0'^2 - 2AM_{x'}(\beta - \beta_0) - (\theta_{0z} - H \sin \beta)^2 \sec^2 \beta}} \quad (4.5)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (\theta_{0z} - H \sin \beta) \sec^2 \beta dt \quad (4.6)$$

Получением выражений (4.5), (4.6) общее решение уравнений движения гироскопа для случая, когда $M_{x'} = \text{const}$, $M_{y'} = 0$, выражено в квадратурах без каких бы то ни было упрощений исходной системы (4.1) и при самом общем виде начальных условий. Однако интегралы, входящие в это решение, не могут быть выражены через элементарные функции. Заменив в (4.6) dt его выражением согласно (4.5), получаем в общем виде уравнение траектории вершины гироскопа E на поверхности единичной сферы:

$$\alpha = \alpha_0 + \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{(\theta_{0z} - H \sin \beta) \sec^2 \beta d\beta}{\sqrt{\theta_0'^2 - 2AM_{x'}(\beta - \beta_0) - (\theta_{0z} - H \sin \beta)^2 \sec^2 \beta}} \quad (4.7)$$

В подинтегральном выражении этого уравнения $\dot{\beta}_0$ содержится только в квадрате (входит в состав $\theta_0'^2$), а α_0 вообще в него не входит. Это свидетельствует о том, что характер движения оси фигуры гироскопа не зависит от значения угла α_0 и знака скорости $\dot{\beta}_0$.

5. Приближенное интегрирование (4.5), (4.6) и (4.7). Будем считать, что во все время движения угол β остается близким к его начальному значению β_0 и, следовательно, может отличаться от β_0 лишь на малую величину $\beta_1 = \beta - \beta_0$. На этом основании можем принять, что последний член подкоренного выражения формул (4.5) и (4.7), равный

$$f(\beta) = (\theta_{0z} - H \sin \beta)^2 \sec^2 \beta$$

приближенно равен

$$f_1(\beta) = a_0 + a_1\beta_1 + a_2\beta_1^2$$

где a_0 , a_1 , a_2 — постоянные коэффициенты. В качестве a_0 и a_1 возьмем соответственно первые два коэффициента разложения $f(\beta)$ в ряд Тейлора по степеням β_1 , т. е. $a_0 = f(\beta_0)$, $a_1 = f'(\beta_0)$. Воспользовавшись равенствами (1.4), (1.3) (взяв их для начального момента времени), получаем, что

$$a_0 = \theta_{0y}^2, \quad a_1 = -2AH\dot{\alpha}_0 \cos \beta_0 \left(1 - \frac{\dot{\alpha}_0}{n} \sin \beta_0\right)$$

Принимаем a_2 равным cn^2 , где c — постоянный коэффициент, который определим после нахождения закона изменения во времени угла α .

Таким образом, имеем

$$f_1(\beta) = \theta_{0y}'^2 - 2AH\dot{\alpha}_0 \cos \beta_0 (1 - e \sin \beta_0) \beta_1 + cn^2 \beta_1^2 \quad \left(e = \frac{\dot{\alpha}_0}{n} \right) \quad (5.1)$$

Заменяв последний член подкоренного выражения в формуле (4.5) его приближенным значением (5.1), учтя, что $\theta_0'^2 - \theta_{0y}'^2 = \theta_{0x}'^2 = A^2 \dot{\beta}_0'^2$, и сделав подстановку $\beta - \beta_0 = \beta_1$, приближенно имеем

$$t = \int_0^{\beta_1} \frac{d\beta_1}{\varphi(\beta_1)} \quad (\varphi(\beta_1) = \sqrt{\dot{\beta}_0'^2 + 2bn\beta_1 - cn^2\beta_1^2}) \quad (5.2)$$

где

$$b = \left(1 - \frac{\dot{\alpha}_0}{n} \sin \beta_0 \right) \dot{\alpha}_0 \cos \beta_0 - \frac{M_{x'}}{H} \quad (5.3)$$

Взяв интеграл [2], получаем

$$\beta_1 = \frac{1}{cn} \left[b + \sqrt{b^2 + c\dot{\beta}_0'^2} \sin(\sqrt{c}nt - \psi) \right] \quad \left(\sin \psi = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c\dot{\beta}_0'^2}} \right) \quad (5.4)$$

Зная, что $\beta = \beta_0 + \beta_1$, получаем окончательное выражение для угла β :

$$\beta = \beta_0 + \frac{1}{cn} \left[b + \sqrt{b^2 + c\dot{\beta}_0'^2} \sin(\sqrt{c}nt - \psi) \right] \quad (5.5)$$

Разложив подинтегральное выражение формулы (4.6) в ряд Тейлора по степеням β_1 и ограничиваясь членами, содержащими β_1 в нулевой и первой степени, получаем приближенно (после преобразований с использованием равенств (1.4) и (1.3), взятых для начального момента времени)

$$\alpha = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0 t - acn \int_0^t \beta_1 dt \quad \left(a = \frac{n - 2\dot{\alpha}_0 \sin \beta_0}{cn \cos \beta_0} \right) \quad (5.6)$$

Заменяв β_1 его выражением (5.4) и взяв интеграл, имеем

$$\alpha = \alpha_0 + (\dot{\alpha}_0 - ab)t + \frac{a\sqrt{b^2 + c\dot{\beta}_0'^2}}{\sqrt{cn}} [\cos(\sqrt{c}nt - \psi) - \cos \psi] \quad (5.7)$$

Из раздела 3 следует, что при $M_{x'} = 0$ в формуле (5.7) член, пропорциональный времени t , должен обращаться в нуль. Это обстоятельство и используем для определения c .

Вставив в коэффициент при t значения a и b соответственно из (5.3) и (5.6), положив $M_{x'} = 0$ и приравняв этот коэффициент нулю, получаем уравнение для определения c :

$$\dot{\alpha}_0 - \left(1 - \frac{\dot{\alpha}_0}{n} \sin \beta_0 \right) \dot{\alpha}_0 \cos \beta_0 \frac{n - 2\dot{\alpha}_0 \sin \beta_0}{cn \cos \beta_0} = 0$$

Отсюда находим

$$c = 1 - \frac{\dot{\alpha}_0}{n} \left(3 - 2 \frac{\dot{\alpha}_0}{n} \sin \beta_0 \right) \sin \beta_0 \quad (5.8)$$

Пользуясь (5.3) и (5.8), преобразуем (5.7) к виду

$$\alpha = \dot{\alpha}_0 + a \left\{ \frac{M_{x'}}{H} t + \frac{\sqrt{b + c\dot{\beta}_0^2}}{Vcn} [\cos(\sqrt{c}nt - \psi) - \cos\psi] \right\} \quad (5.9)$$

Из (5.4) видим, что во все время движения угол β_1 не превосходит угла

$$\beta_1^* = \frac{1}{c} (k + \sqrt{k^2 + h^2c})$$

$$h = \frac{\dot{\beta}_0}{n}, \quad k = e \cos \beta_0 - e^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 - m_{x'}, \quad e = \frac{\dot{\alpha}_0}{n}$$

Поэтому, чтобы формулы (5.5) и (5.9) были действительны, угол β_1^* должен быть малым. Для малости угла β_1^* вовсе не требуется, чтобы n было большим, т. е. чтобы гироскоп был быстро вращающимся, а требуется лишь малость величин e , h и $m_{x'}$. Однако, если гироскоп быстро вращающийся, то получается полная гарантия малости угла β_1^* .

Исключив при помощи (5.2) из формулы (5.6) время t , получим вместо точного уравнения (4.7) приближенное уравнение траектории вершины гироскопа E на поверхности единичной сферы:

$$\alpha = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0 \int_0^{\beta_1} \frac{d\beta_1}{\varphi(\beta_1)} - acn \int_0^{\beta_1} \frac{\beta_1 d\beta_1}{\varphi(\beta_1)}$$

Преобразовав последний интеграл^[2], получаем

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{a}{n} [\varphi(\beta_1) - |\dot{\beta}_0|] + (\dot{\alpha}_0 - ab) \int_0^{\beta_1} \frac{d\beta_1}{\varphi(\beta_1)}$$

Преобразовав при помощи равенств (5.3) и (5.8) выражение, стоящее в круглых скобках, и взяв интеграл^[2], имеем

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{a}{n} \left[\varphi(\beta_1) - |\dot{\beta}_0| + \frac{M_{x'}}{H V c} \left(\psi - \arcsin \frac{b - cn\beta_1}{\sqrt{b^2 + c\dot{\beta}_0^2}} \right) \right]$$

Воспользовавшись теоремой сложения, получаем уравнение траектории вершины гироскопа в окончательной форме:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{a}{n} \left[\varphi(\beta_1) - |\dot{\beta}_0| + \frac{M_{x'}}{H V c} \arccos \frac{c|\dot{\beta}_0|\varphi(\beta_1) + b(b - cn\beta_1)}{b^2 + c\dot{\beta}_0^2} \right] \quad (5.10)$$

В частном случае, когда $\alpha_0 = \beta_0 = \dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = 0$ и, следовательно, $\beta = \beta_1$, уравнение (5.10) принимает вид:

$$\alpha = \sqrt{(2m_{x'} + \beta)\beta} + m_{x'} \arccos \left(1 + \frac{\beta}{m_{x'}} \right)$$

т. е. превращается в уравнение циклоиды.

Отметим, что выражения (5.5), (5.9) и (5.10) могут быть несколько упрощены путем принятия в них $c = 1$, что возможно, так как $e = \dot{\alpha}_0/n$ всегда мало по сравнению с единицей, если n велико, т. е. если гироскоп быстро вращающийся.

Формулы (5.5), (5.9), (5.10) имеют наиболее общий вид и значительно полнее характеризуют движение оси фигуры гироскопа под действием постоянного момента $M_{x'}$, чем формулы, получаемые путем непосредственной линеаризации системы (4.1). Анализ этих формул не входит в задачу настоящей работы, поэтому в следующем разделе рассмотрим лишь один частный вопрос, а именно исследуем регулярную прецессию симметричного гироскопа, находящегося под действием постоянного внешнего момента, направленного вдоль оси вращения внутренней рамки карданова подвеса.

6. Случай регулярной прецессии при $M_{x'} = \text{const}$, $M_{y'} = 0$. Чтобы имела место регулярная прецессия, необходимо иметь $\dot{\beta}_0 = 0$, $b = 0$, ибо только в этом случае, как видно из (5.5) и (5.7), во все время движения

$$\beta = \beta_0, \quad \alpha = \alpha_0 + \dot{\alpha}_0 t$$

Условие $b = 0$ после замены в нем b выражением (5.3) принимает вид:

$$\frac{1}{n} \sin \beta_0 \cos \beta_0 \dot{\alpha}_0^2 - \cos \beta_0 \dot{\alpha}_0 + nm_{x'} = 0 \quad (6.1)$$

Разрешая это уравнение относительно $\dot{\alpha}_0$, имеем

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{n}{2 \sin \beta_0} (1 \pm \sqrt{1 - 4m_{x'} \operatorname{tg} \beta_0}) \quad (6.2)$$

Рассмотрим возможные значения скоростей регулярной прецессии $\dot{\alpha}_0$. Из (6.1) имеем, что при $\beta_0 = 0$

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{M_{x'}}{H} \quad (6.3)$$

Кроме того, из (6.2) находим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_0 &= \frac{n}{2 \sin \beta_0} && \text{при } 4m_{x'} \operatorname{tg} \beta_0 = 1 \\ \dot{\alpha}_0 &= \frac{n}{2 \sin \beta_0} (1 \pm \sqrt{1 - 4m_{x'} \operatorname{tg} \beta_0}) && \text{при } 4m_{x'} \operatorname{tg} \beta_0 < 1 \end{aligned} \quad (6.4)$$

К этим же результатам автор пришел путем анализа точных уравнений движения. Таким образом, формулы (6.3), (6.4) являются точными, хотя они и получены в данной работе путем анализа приближенных выражений (5.5) и (5.7).

7. Общее решение системы (1.6) при $M_{x'} = M_{x'}(\beta)$, $M_{y'} = 0$. В этом случае система (1.6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + n\dot{\beta} &= 0 \\ \ddot{\beta} - n\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta &= - \frac{M_{x'}(\beta)}{A} \end{aligned} \quad (7.1)$$

и имеет два первых интеграла

$$\theta_{\zeta} = \theta_0 \zeta, \quad \frac{1}{2} A \omega'^2 - \frac{1}{2} A \omega_0'^2 = - \int_{\beta_0}^{\beta} M_{x'}(\beta) d\beta \quad (7.2)$$

которые получаем из выражений (2.3) и (2.4), положив в них $M_z = 0$. Используя (1.4), преобразуем первое из уравнений (7.2) к виду

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{A} (\theta_0 \zeta - H \sin \beta) \sec^2 \beta \quad (7.3)$$

Заменяя во втором из уравнений (7.2) ω' и $\dot{\alpha}$ их выражениями (1.2) и (7.3) и воспользовавшись равенством $\theta_0' = A\omega_0'$, имеем

$$\dot{\beta} = \frac{1}{A} \left(\theta_0'^2 - 2A \int_{\beta_0}^{\beta} M_{x'}(\beta) d\beta - (\theta_0 \zeta - H \sin \beta)^2 \sec^2 \beta \right)^{1/2} \quad (7.4)$$

Разделив в (7.4) и (7.3) переменные и интегрируя, получаем решение системы (7.1):

$$t = A \int_{\beta_0}^{\beta} \left[\theta_0'^2 - 2A \int_{\beta_0}^{\beta} M_{x'}(\beta) d\beta - (\theta_0 \zeta - H \sin \beta)^2 \sec^2 \beta \right]^{-1/2} d\beta$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{A} \int_0^t (\theta_0 \zeta - H \sin \beta) \sec^2 \beta dt$$

Таким образом, при $M_{x'} = M_{x'}(\beta)$, $M_{y'} = 0$ задача о движении оси фигуры симметричного гироскопа также приводится к квадратурам.

Считаю своим долгом выразить благодарность А. М. Летову за сделанные в его рецензии ценные замечания, побудившие меня найти первые интегралы системы (1.6) в наиболее общем виде.

Поступила 12 XI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГОНТИ, 1939.
2. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ОГИЗ, Гостехиздат, 1943.