Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОРГАНАМИ

А. М. Летов

(Москва)

В настоящей статье излагается метод построения функций Ляпунова для одного класса регулируемых систем с двумя исполнительными органами. Этот метод следует рассматривать как распространение метода А. И. Лурье [1], развитого ранее для регулируемых систем с одним исполнительным органом.

1. Рассмотрим регулируемые системы, описываемые уравнениями вида

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_{k1}\xi_1 + n_{k2}\xi_2 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

$$\dot{\xi}_1 = f_1(\sigma_1), \quad \sigma_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{1\alpha}\eta_\alpha - r_{11}\xi_1 - r_{12}\xi_2 \tag{1.1}$$

$$\dot{\xi}_2 = f_2(\sigma_2), \quad \sigma_2 = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{2\alpha}\eta_\alpha - r_{21}\xi_1 - r_{22}\xi_2$$

Здесь η_k — координаты, $b_{k\alpha}$ — постоянные объекта регулирования, ξ_1, ξ_2 — координаты, n_{k1}, n_{k2} — постоянные регулирующих органов, $p_{1\alpha}$, $p_{2\alpha}$, $r_{11}, \ldots, r_{22}$ — постоянные регулятора, $f_1(\sigma_1)$, $f_2(\sigma_2)$ — заданные непрерывные ограниченные функции своих аргументов, обладающие свойством $f_1(0) = f_2(0) = 0$, $\sigma_1 f_1(\sigma_1) > 0$, $\sigma_2 f_2(\sigma_2) > 0$. О таких функциях будем говорить, что они принадлежат к классу А функций.

Очевидное решение

$$\eta_1^* = \ldots = \eta_n^* = \sigma_1^* = \sigma_2^* = 0 \tag{1.2}$$

определяет положение равновесия регулируемой системы, которое надлежит поддерживать регулятору.

Таким образом, ставится, задача: формулировать достаточные условия, выполнение которых гарантирует устойчивость положения равновесия (1.2) регулируемой системы (1.1) при любых возмущениях и любых функциях $f_1(\sigma_1)$, $f_2(\sigma_2)$ класса А. Такую устойчивость регулируемой системы будем называть абсолютной устойчивостью.

2. Допустим, что система регулирования собственно устойчива [2]. Это значит, что корни уравнения

$$D(\rho) = |b_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\rho| = 0 \tag{2.1}$$

обладают свойством $\operatorname{Re}\rho_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Рассмотрим линейное неособое преобразование координат η_k к новым переменным, определяемым формулами

$$x_s = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)}\eta_\alpha + u_1^{(s)}\xi_1 + u_2^{(s)}\xi_2 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Если постоянные преобразования определить соотношениями

$$-\rho_s C_\beta^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha\beta} C_\alpha^{(s)} \qquad (\beta,\ s = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

$$-\rho_s u_1^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{n} n_{\alpha 1} C_\alpha^{(s)}, \qquad -\rho_s u_2^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{n} n_{\alpha 2} C_\alpha^{(s)} \tag{2.4}$$

то уравнениям возмущенного движения регулируемой системы в новых переменных можно придать вид:

$$\dot{x}_s = -\rho_s x_s + u_1^{(s)} f_1(\sigma_1) + u_2^{(s)} f_2(\sigma_2) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

Очевидно, n линейных и однородных уравнений (2.3) дают относительно $C_\alpha^{(s)}$ ненулевые решения, если постоянные ρ_s суть простые корни уравнения (2.1). Для изучаемого случая эти уравнения всегда разрешаются с точностью до одной произвольной, постоянной для каждого значения $s = 1, \ldots, n$, поэтому можно считать либо $u_1^{(s)}$, либо $u_2^{(s)}$ произвольными постоянными.

Будем считать, что уравнения (2.3) решены, а преобразование (2.2) построено. Введем две новые переменные, определенные равенствами

$$\sigma_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{1\alpha}\eta_\alpha - r_{11}\xi_1 - r_{12}\xi_2, \qquad \sigma_2 = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{2\alpha}\eta_\alpha - r_{21}\xi_1 - r_{22}\xi_2 \tag{2.6}$$

Дифференцируя (2.6), находим

$$\dot{\sigma}_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{1\alpha}\dot{\eta}_\alpha - r_{11} f_1(\sigma_1) - r_{12} f_2(\sigma_1), \qquad \dot{\sigma}_2 = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{2\alpha}\dot{\eta}_\alpha - r_{21} f_1(\sigma_1) - r_{22} f_2(\sigma_2) \tag{2.7}$$

Продифференцируем (2.2) и, пользуясь уравнениями (2.5), найдем

$$\sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)}\dot{\eta}_\alpha = -\rho_s x_s, \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.8}$$

Поскольку преобразование (2.2) неособое, то соотношения (2.8) всегда могут быть разрешены относительно $\dot{\eta}$. Следовательно, искомые канонические уравнения (2.5) и (2.7) приведутся к системе

$$\dot{x}_s = -\rho_s x_s + u_1^{(s)} f_1(\sigma_1) + u_2^{(s)} f_2(\sigma_2) \tag{2.9}$$

$$\dot{\sigma}_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_{1\alpha} x_\alpha - r_{11} f_1(\sigma_1) - r_{12} f_2(\sigma_2), \qquad \dot{\sigma}_2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_{2\alpha} x_\alpha - r_{21} f_1(\sigma_1) - r_{22} f_2(\sigma_2)$$

Здесь постоянные $\beta_{1\alpha}$ зависят от параметров $p_{1\alpha}$, а постоянные $\beta_{2\alpha}$ — от параметров $p_{2\alpha}$; вычисление этих постоянных дается ниже.

3. Допустим, что уравнение (2.1) имеет s вещественных $\rho_1, \ldots, \rho_s$ и $n-s$ комплексных, попарно сопряженных $\rho_{s+1}, \ldots, \rho_n$ простых корней. В качестве функции Ляпунова для собственно устойчивых регулируемых систем берем знакоопределенную, всюду положительную функцию

$$V = F + \int_0^{\sigma_1} f_1(\sigma_1)\, d\sigma_1 + \int_0^{\sigma_2} f_2(\sigma_2)\, d\sigma_2 \tag{3.1}$$

где функция F имеет вид [1]:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k a_i x_k x_i}{\rho_k + \rho_i} \tag{3.2}$$

Здесь $a_1, \ldots, a_s$ — любые вещественные, а $a_{s+1}, \ldots, a_n$ комплексные попарно сопряженные числа. Выражение для полной производной функции V по времени согласно уравнениям (2.8) будет

$$\dot{V} = -\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k a_i x_k x_i - r_{11} f_1^2(\sigma_1) - r_{22} f_2^2(\sigma_2) - (r_{12} + r_{21}) f_1(\sigma_1) f_2(\sigma_2) + $$
$$+ f_1(\sigma_1) \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_{1k} + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i u_1^{(i)}}{\rho_k + \rho_i}\right) x_k + f_2(\sigma_2) \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_{2k} + 2a_k \sum_{i=k}^{n} \frac{a_i u_2^{(i)}}{\rho_k + \rho_i}\right) x_k \tag{3.3}$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k a_i x_k x_i = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^2$$

то выражение (3.3) можно преобразовать к виду

$$\dot{V} = -\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + f_1(\sigma_1) + f_2(\sigma_2)\right]^2 - (r_{11} - 1) f_1^2(\sigma_1) - (r_{22} - 1) f_2^2(\sigma_2) -$$
$$- (r_{12} + r_{21} - 2) f_1(\sigma_1) f_2(\sigma_2) + \sum_{k=1}^{n} \left\{\left[\beta_{1k} + 2a_k + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i u_1^{(i)}}{\rho_k + \rho_i}\right] f_1(\sigma_1) + \right.$$
$$\left. + \left[\beta_{2k} + 2a_k + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i u_2^{(i)}}{\rho_k + \rho_i}\right]\right\} x_k \tag{3.4}$$

либо к виду

$$\dot{V} = -\left[\sum_{k=0}^{n} a_k x_k + \sqrt{r_{11}} f_1(\sigma_1) + \sqrt{r_{22}} f_2(\sigma_2)\right]^2 - \tag{3.5}$$
$$- (r_{12} + r_{21} - 2\sqrt{r_{11} r_{12}}) f_1(\sigma_1) f_2(\sigma_2) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \left\{\left[\beta_{1k} + 2\sqrt{r_{11}} a_k + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i u_1^{(i)}}{\rho_k + \rho_i}\right] f_1(\sigma_1) + \right.$$
$$\left. + \left[\beta_{2k} + 2\sqrt{r_{22}} a_k + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i u_2^{(i)}}{\rho_k + \rho_i}\right] f_2(\sigma_2)\right\} x_k$$

В последней записи (3.5) формы $\dot{V}$ предполагается, что

$$r_{11} > 0, \quad r_{22} > 0$$

В соответствии с формами (3.3), (3.4), (3.5) и основными теоремами Ляпунова условия устойчивости рассматриваемых систем регулирования могут быть сведены в конечном счете к выполнению соотношений

$$\beta_{1k} + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i u_1^{(i)}}{\rho_k + \rho_i} = 0, \qquad \beta_{2k} + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i u_2^{(i)}}{\rho_k + \rho_i} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.6}$$

$$r_{11} > 0, \qquad 4r_{11}r_{22} > (r_{12} + r_{21})^2 \tag{3.7}$$

или же соотношений

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{1k} + 2a_k + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i u_1^{(i)}}{\rho_k + \rho_i} = 0 \\ &\beta_{2k} + 2a_k + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i u_2^{(i)}}{\rho_k + \rho_i} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

$$r_{11} > 1, \quad 4(r_{11} - 1)\ (r_{22} - 1) > (r_{12} + r_{21} - 2)^2 \tag{3.9}$$

или же соотношений

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{1k} + 2\sqrt{r_{11}}\,a_k + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i u_1^{(i)}}{\rho_k + \rho_i} = 0 \\ &\beta_{2k} + 2\sqrt{r_{22}}\,a_k + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i u_2^{(i)}}{\rho_k + \rho_i} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.10}$$

$$r_{12} + r_{21} = 2\sqrt{r_{11}r_{22}} \tag{3.11}$$

Соотношения (3.6), а также (3.7) и (3.10) определены с точностью до выбора n постоянных канонического преобразования и обладают известной симметрией относительно параметров $p_{1\alpha}$ и $p_{2\alpha}$ в том смысле, что их первая половина зависит только от $p_{1\alpha}$, а вторая только от $p_{2\alpha}$.

Если ввести обозначения

$$u_1^{(s)} + u_2^{(s)} = k_s, \qquad u_1^{(s)} - u_2^{(s)} = m_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.12}$$

то (3.6), (3.8), (3.10) можно заменить равносильными соотношениями вида

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{1k} - \beta_{2k} + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0 \\ &\beta_{1k} + \beta_{2k} + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.13}$$

$$r_{11} > 0, \quad 4r_{11}r_{22} > (r_{12} + r_{21})^2 \tag{3.14}$$

или вида

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{1k} - \beta_{2k} + 2a_k \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0 \\ &\beta_{1k} + \beta_{2k} + 4a_k + 2a_k \sum_{i=1}^{k} \frac{k_i a_i}{\rho_k + \rho_i} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.15}$$

$$r_{11} > 1, \quad 4(r_{11} - 1)\ (r_{22} - 1) > (r_{12} + r_{21} - 2)^2 \tag{3.16}$$

или же соотношений вида

$$\begin{aligned} &\beta_{1k}-\beta_{2k}+2(\sqrt{r_{11}}-\sqrt{r_{22}})\,a_k+2a_k\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i a_i}{\rho_k+\rho_i}=0 \\ &\beta_{1k}+\beta_{2k}+2(\sqrt{r_{11}}+\sqrt{r_{22}})\,a_k+2a_k\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i a_i}{\rho_k+\rho_i}=0 \end{aligned} \qquad (k=1,\ldots,n) \qquad (3.17)$$

$$r_{12}+r_{21}=2\sqrt{r_{11}r_{22}} \qquad (3.18)$$

В каждом из написанных критериев устойчивости регулируемой системы соотношения (3.14), (3,16), (3.18) стесняют выбор коэффициентов $r_{11},\ldots,r_{12}$, а соотношения (3.13), (3.15) или же соотношения (3.17) — выбор параметров $p_{1\alpha}$, $p_{2\alpha}$.

Соотношения (3.17), в отличие от аналогичных соотношений (3.13), (3.15) содержат коэффициенты r_{11}, r_{22}. Это обстоятельство во многих случаях может существенно облегчить выбор параметров $p_{1\alpha}$, $p_{2\alpha}$ согласно соотношениям (3.17), поскольку r_{11}, r_{22} могут рассматриваться как произвольные положительные числа.

Итак, доказана теорема: если при заданных вещественных $\rho_1,\ldots,\rho_s$ и комплексных, попарно сопряженных $\rho_{s+1},\ldots,\rho_n$ постоянных, обладающих свойством $\operatorname{Re}\rho_k>0$ $(k=1,\ldots,n)$, возможно так подобрать постоянные $p_{1\alpha}$, $p_{2\alpha}$, что существует единая система s вещественных $a_1,\ldots,a_j$ и $n-s$ комплексных попарно сопряженных $a_{s+1},\ldots,a_n$ чисел, удовлетворяющих совокупно соотношениям (3.13) [(13.15)] или же соотношениям (3.17), а коэффициенты $r_{11},\ldots,r_{22}$ удовлетворяют соотношениям (3.14), [(3.16), (3.18)], то положение равновесия (1.2) регулируемой системы (1.1) обладает абсолютной устойчивостью.

4. В качестве примера приложения изложенных рассуждений рассмотрим случай регулируемой системы для $n=2$. Для простоты считаем числа ρ_1, ρ_2 вещественными.

Обращаясь к уравнениям (3.10), напишем

$$\beta_{11}+2\sqrt{r_{11}}a_1+\frac{u_1^{(1)}}{\rho_1}a_1^2+\frac{2u_1^{(2)}a_1a_2}{\rho_1+\rho_2}=0 \qquad (4.1)$$

$$\beta_{12}+2\sqrt{r_{11}}a_2+\frac{u_1^{(2)}}{\rho_2}a_2^2+\frac{2u_1^{(1)}a_1a_2}{\rho_1+\rho_2}=0 \qquad (4.2)$$

$$\beta_{21}+2\sqrt{r_{22}}a_1+\frac{u_2^{(1)}}{\rho_1}a_1^2+\frac{2u_2^{(2)}a_1a_2}{\rho_1+\rho_2}=0 \qquad (4.3)$$

$$\beta_{22}+2\sqrt{r_{22}}a_2+\frac{u_2^{(2)}}{\rho_2}a_2^2+\frac{2u_2^{(1)}a_1a_2}{\rho_1+\rho_1}=0 \qquad (4.4)$$

Будем искать возможность удовлетворить уравнениям (4.1) — (4.4) числами a_1, a_2.

Умножим (4.1), (4.2) на $\sqrt{r_{22}}$, а (4.3), (4.4) на $-\sqrt{r_{11}}$ и после почленного сложения (4.1), (4.3) и (4.2), (4.4) соответственно получим

$$\frac{a_1^2}{\rho_1}U_1+\frac{2a_1a_2}{\rho_1+\rho_2}U_2=B_1, \qquad \frac{a_2^2}{\rho_2}U_2+\frac{2a_1a_2}{\rho_1+\rho_2}U_1=B_2 \qquad (4.5)$$

где обозначено

$$U_1 = u_1^{(1)}\sqrt{r_{22}} - u_2^{(1)}\sqrt{r_{11}}, \qquad B_1 = \beta_{21}\sqrt{r_{11}} - \beta_{11}\sqrt{r_{22}},$$
$$U_2 = u_1^{(2)}\sqrt{r_{22}} - u_2^{(2)}\sqrt{r_{11}} \qquad B_2 = \beta_{22}\sqrt{r_{11}} - \beta_{12}\sqrt{r_{22}} \tag{4.6}$$

Далее умножим первое равенство на U_1/ρ_1, $[U_1\rho_1]$, а второе на U_2/ρ_2, $[U_2\rho_2]$; после почленного сложения найдем

$$\left(\frac{a_1U_1}{\rho_1} + \frac{a_2U_2}{\rho_2}\right)^2 = \Gamma^2, \qquad (a_1U_1 + a_2U_2)^2 = D^2 \tag{4.7}$$

где обозначено

$$\Gamma^2 = \frac{B_1U_1}{\rho_1} + \frac{B_2U_2}{\rho_2}, \qquad D^2 = \rho_1B_1U_1 + \rho_2B_2U_2 \tag{4.8}$$

Если постоянные регулятора таковы, что неравенства

$$\Gamma^2 > 0, \qquad D^2 > 0 \tag{4.9}$$

выполняются, то уравнения (4.7) могут быть разрешены, и мы найдем

$$a_1 = \frac{C_1}{U_1}, \qquad a_2 = \frac{C_2}{U_2} \tag{4.10}$$

В равенствах (4.10) величины C_1, C_2 обозначают известные функции от параметров регулятора и имеют вид:

$$C_1 = \frac{\pm\rho_1}{\rho_2 - \rho_1}(\rho_2\Gamma - D), \qquad C_2 = \frac{\pm\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}(D - \rho_1\Gamma) \tag{4.11}$$

Далее умножим уравнение (4.1) на β_{21}, а уравнение (4.3) на $-\beta_{11}$ и сложим; умножим уравнение (4.2) на β_{22}, а уравнение (4.4) на $-\beta_{12}$ и сложим. Замечая, что $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, найдем

$$2B_1 + \frac{a_1R_{11}}{\rho_1 + \rho_1} + \frac{a_2R_{12}}{\rho_1 + \rho_2} = 0, \qquad 2B_2 + \frac{a_1R_{21}}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{a_2R_{22}}{\rho_2 + \rho_2} = 0 \tag{4.12}$$

Здесь обозначено

$$R_{11} = -\beta_{11}u_2^{(1)} + \beta_{21}u_1^{(1)}, \qquad R_{12} = \beta_{21}u_1^{(2)} - \beta_{11}u_2^{(2)}$$
$$R_{21} = \beta_{22}u_1^{(1)} - \beta_{12}u_2^{(1)}, \qquad R_{22} = \beta_{22}u_1^{(2)} - \beta_{12}u_2^{(2)} \tag{4.13}$$

Если обратиться теперь к уравнениям (2.3), (2.4) и принять величины $C_2^{(s)}$ за произвольные постоянные канонического преобразования, то найдем

$$u_1^{(s)} = r_1^{(s)}C_2^{(s)}, \qquad u_2^{(s)} = r_2^{(s)}C_2^{(s)}, \qquad C_1^{(s)} = -\frac{\rho_s + b_{22}}{b_{12}}C_2^{(s)} \qquad (s = 1,\ 2) \tag{4.14}$$

$$r_1^{(s)} = -\frac{1}{\rho_s}\left[n_{21} - \frac{n_{11}(\rho_s + b_{22})}{b_{22}}\right], \qquad r_2^{(s)} = -\frac{1}{\rho_s}\left[n_{22} - \frac{n_{12}(\rho_s + b_{22})}{b_{12}}\right] \tag{4.15}$$

С другой стороны, разрешая уравнения (2.8), будем иметь

$$\dot{\eta}_1 = \frac{1}{\Delta}(-\rho_1C_2^{(2)}x_1 + \rho_2C_2^{(1)}x_2)$$

$$\dot{\eta}_2 = \frac{1}{\Delta}(-\rho_2C_1^{(1)}x_2 + \rho_1C_1^{(2)}x_1), \qquad \Delta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{b_{12}}C_2^{(1)}C_2^{(2)} \tag{4.16}$$

В соответствии с (4.16) выражения для величин $\beta_{k\alpha}$ примут вид:

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= -\frac{\rho_1}{(\rho_2-\rho_1)\,C_2^{(1)}}\,[b_{12}p_{11}+(\rho_2+b_{22})\,p_{12}] = \frac{\gamma_{11}}{C_2^{(1)}}\\
\beta_{12} &= \frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)\,C_2^{(2)}}\,[b_{12}p_{11}+(\rho_1+b_{22})\,p_{12}] = \frac{\gamma_{12}}{C_2^{(2)}}\\
\beta_{21} &= -\frac{\rho_1 b_{12}}{(\rho_2-\rho_1)\,C_2^{(1)}}\,[b_{12}p_{21}+(\rho_2+b_{22})\,p_{22}] = \frac{\gamma_{21}}{C_2^{(1)}}\\
\beta_{22} &= \frac{\rho_2 b_{12}}{(\rho_2-\rho_1)\,C_2^{(2)}}\,[b_{12}p_{21}+(\rho_1+b_{22})\,p_{22}] = \frac{\gamma_{22}}{C_2^{(2)}}
\end{aligned} \qquad (4.17)$$

Теперь вновь возвратимся к уравнениям (4.12).

По условиям теоремы мы должны удовлетворить этим уравнениям решениями (4.10). При подстановке этих решений в (4.12) найдем

$$2B_1+\frac{C_1R_{11}}{2\rho_1U_1}+\frac{C_2R_{12}}{(\rho_1+\rho_2)\,U_2}=0, \quad 2B_2+\frac{C_1R_{21}}{(\rho_1+\rho_2)\,U_1}+\frac{C_2R_{22}}{2\rho_2U_2}=0 \qquad (4.18)$$

Далее согласно (4.6), (4.15), (4.17) находим

$$\begin{aligned}
U_\nu &= (r_1^{(\nu)}\sqrt{r_{22}}-r_2^{(\nu)}\sqrt{r_{11}})\,C_2^{(\nu)} = U_\nu' C_2^{(\nu)}\\
B_\nu &= \frac{\gamma_\nu\sqrt{r_{11}}-\gamma_\nu\sqrt{r_{22}}}{C_2^{(\nu)}} = \frac{B_\nu'}{C_2^{(\nu)}} \qquad (\nu=1,\,2)
\end{aligned} \qquad (4.19)$$

Далее согласно (4.13), (4.15), (4.17) находим (4.20)

$$R_{11}=\gamma_{21}r_1^{(1)}-\gamma_{11}r_2^{(1)}=R_{11}', \qquad R_{12}=[\gamma_{21}r_1^{(2)}-\gamma_{11}r_2^{(2)}]\,\frac{C_2^{(2)}}{C_2^{(1)}}=\frac{R_{12}'C_2^{(2)}}{C_2^{(1)}}$$

$$R_{21}=[\gamma_{22}r_1^{(1)}-\gamma_{12}r_2^{(1)}]\,\frac{C_2^{(1)}}{C_2^{(2)}}=\frac{R_{21}'C_2^{(1)}}{C_2^{(2)}}, \qquad R_{22}=\gamma_{22}r_1^{(2)}-\gamma_{12}r_2^{(2)}=R_{22}'$$

Теперь подставим величины (4.19), (4.20) в равенства (4.18) и, обращая внимание на их структуру относительно произвольных величин $C_2^{(1)}$, $C_2^{(2)}$, после очевидного упрощения получим (4.21)

$$2B_1'+\frac{C_1R_{11}'}{2\rho_1U_1'}+\frac{C_2R_{12}'}{(\rho_1+\rho_2)\,U_2'}=0, \qquad 2B_2'+\frac{C_1R_{21}'}{(\rho_1+\rho_2)\,U_1'}+\frac{C_2R_{22}'}{2\rho_2U_2'}=0$$

Равенства (4.21) содержат шесть параметров регулятора p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, r_{11}, r_{22}. Разрешая эти равенства относительно любой пары параметров регулятора, например p_{12}, p_{21}, найдем

$$p_{12}=p_{12}(p_{11},\, p_{22},\, r_{11},\, r_{22}), \qquad p_{21}=p_{21}(p_{11},\, p_{22},\, r_{11},\, r_{22}) \qquad (4.22)$$

Итак, если формулы (4.22) найдены, то область устойчивости системы в пространстве параметров регулятора p_{11}, p_{22}, $r_{11}>0$, $r_{22}>0$ выделяется лишь двумя неравенствами (4.9). В том частном случае, в котором мы полагаем $r_{11}=r_{22}=1$, эти неравенства имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Gamma^2 &= (p_{11}-p_{21})\;[(n_{21}-n_{22})\,b_{12}+(n_{12}-n_{11})\,b_{22}]+\\
&\quad+(p_{22}-p_{12})\;[(n_{21}-n_{22})\,b_{11}+(n_{12}-n_{11})\,b_{21}]>0\\
D^2 &= (p_{21}-p_{11})\;[(n_{21}-n_{22})\,b_{12}-(n_{22}-n_{11})\,b_{11}]+\\
&\quad+(p_{22}-p_{12})\;[(n_{21}-n_{22})\,b_{22}-(n_{12}-n_{11})\,b_{21}]>0
\end{aligned} \qquad (4.23)$$

Изучение примера показывает, что критерий устойчивости системы регулирования, сформированный на основании изложенного метода, может быть трудным для реализации ввиду необходимости выдерживать соотношения (4.22). Выполнение условия (3.7) сомнения не вызывает.

5. Для практических приложений уравнений (2.8) к решению частных задач очень важно иметь формулы, позволяющие сразу вычислить постоянные β_{ki} через исходные данные. В случае регулируемых систем с одним регулирующим органом такие формулы впервые дал А. И. Лурье[1,3].

С этой целью обратимся к уравнениям (2.3). В случае различных ρ_s решения этих уравнений могут быть представлены так:

$$C_k^{(s)} = A_i^{(s)} D_{ik}(\rho_s) \qquad (k,\ s = 1, \ldots, n) \tag{5.1}$$

где D_{ik} — алгебраические дополнения элементов любой фиксированной i-й строки определителя (2.1), а $A_i^{(s)}$ — множители пропорциональности. Последние можно определить. Сложим почленно соотношения (2.4)

$$-\rho_s (u_1^{(s)} + u_2^{(s)}) = A_i^{(s)} \Big[\sum_{\alpha=1}^{n} (n_{\alpha 1} + n_{\alpha 2}) D_{i\alpha}(\rho_s) \Big]$$

и, требуя выполнения условий

$$u_1^{(s)} + u_2^{(s)} = 1 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{5.2}$$

легко находим

$$A_i^{(s)} = \frac{1}{H_i(\rho_s)} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где для краткости обозначено

$$H_i(\rho_s) = -\frac{1}{\rho_s} \sum_{\alpha=1}^{n} (n_{\alpha 1} + n_{\alpha 1}) D_{i\alpha}(\rho_s) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.3}$$

Итак, постоянные прямого преобразования определяются так:

$$C_k^{(s)} = \frac{D_{ik}(\rho_s)}{H_i(\rho_s)} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{5.4}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1^{(s)} &= -\frac{1}{\rho_s} \sum_{\alpha=1}^{n} n_{\alpha 1} \frac{D_{i\alpha}(\rho_s)}{H_i(\rho_s)} \\ u_2^{(s)} &= -\frac{1}{\rho_s} \sum_{\alpha=1}^{n} n_{\alpha 2} \frac{D_{i\alpha}(\rho_s)}{H_i(\rho_s)} \end{aligned}\right\} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{5.5}$$

Теперь уравнения (2.8) можно записать в форме

$$\sum_{\alpha=1}^{n} D_{i\alpha}(\rho_s) \dot{\gamma}_{l\alpha} = -\rho_s H_i(\rho_s) x_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{5.6}$$

Разрешим их. С этой целью рассмотрим определитель

$$\Delta(\rho_1, \ldots, \rho_n) = \begin{vmatrix} D_{i1}(\rho_1) & \ldots & D_{in}(\rho_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{i1}(\rho_n) & \ldots & D_{in}(\rho_n) \end{vmatrix} \tag{5.7}$$

и допустим, что он отличен от нуля.

Рассмотрим также систему определителей:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} D_{i1}(\rho_1), \ldots, D_{ik-1}(\rho_1), & -\rho_1 H_i(\rho_1) x_1, & D_{ik+1}(\rho_1), \ldots, D_{in}(\rho_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{i1}(\rho_n), \ldots, D_{ik-1}(\rho_n), & -\rho_n H_i(\rho_n) x_n, & D_{ik+1}(\rho_n), \ldots, D_{in}(\rho_n) \end{vmatrix} \qquad (5.8)$$

получающихся из определителя (5.7) заменой k-го столбца правыми частями уравнений (5.6). По известным формулам находим

$$\eta_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad (5.9)$$

Пусть Δ_{kj} — алгебраические дополнения элементов k-го столбца и j-й строки определителя (5.8). Имеем строку Лапласа

$$\Delta_k = \sum_{j=1}^{n} [-\rho_j H_i(\rho_j) x_j] \Delta_{jk} \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad (5.10)$$

Теперь докажем справедливость следующих формул [4]:

$$\Delta(\rho_1, \ldots, \rho_n) = D'(\rho_j) \Delta_{jk} \qquad (j,\ k, = 1, \ldots, n) \qquad (5.11)$$

С этой целью подставим значения (5.9) в уравнения (5.6) и, поскольку они обратятся теперь в тождества, имеем соотношения:

$$\begin{matrix} \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ik}(\rho_1)\Delta_{1k} = \Delta, & \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ik}(\rho_1)\Delta_{2k} = 0, \ldots, & \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ik}(\rho_1)\Delta_{nk} = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ik}(\rho_n)\Delta_{1k} = 0, & \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ik}(\rho_n)\Delta_{2k} = 0, \ldots, & \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ik}(\rho_n)\Delta_{nk} = \Delta \end{matrix} \qquad (5.12)$$

Рассмотрим, например, первый ряд соотношений (5.12). В случае простых корней ρ_s имеем $D'(\rho_s) \neq 0$, поэтому возможно поделить почленно каждое соотношение с номером j этого столбца на $D'(\rho_j)$, так что после почленного сложения получим

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{D_{ik}(\rho_1)}{D'(\rho_1)} + \frac{D_{ik}(\rho_2)}{D'(\rho_2)} + \cdots + \frac{D_{ik}(\rho_n)}{D'(\rho_n)}\right] \Delta_{1k} = \frac{\Delta}{D'(\rho_1)} \qquad (5.13)$$

Если теперь воспользоваться известной формулой [1]

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{D_{ik}(\rho_j)}{D'(\rho_j)} = \delta_{ik} \qquad (5.14)$$

в которой при любом $i = k$, $\delta_{kk} = 1$, $i \neq k$, $\delta_{ik} = 0$, то соотношение (5.13) приводится к виду

$$\Delta = \Delta_{1k} D'(\rho_1)$$

Повторив рассуждения с каждым столбцом (5.12), убедимся в справедливости (5.11). Но это будет означать, что уравнения (5.9) могут быть записаны окончательно так:

$$\dot{\eta}_k = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\rho_j H_k(\rho_j)}{D'(\rho_j)} x_j \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad (5.15)$$

Чтобы получить искомые выражения β_{kj}, остается подставить (5.15) в уравнения (2.7), и мы найдем

$$\beta_{1j} = -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\rho_j H_\alpha(\rho_j)}{D'(\rho_j)} p_{1\alpha}, \qquad \beta_{2j} = -\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\rho_j H_\alpha(\rho_j)}{D'(\rho_j)} p_{2\alpha} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{5.16}$$

6. Для проверки формул (5.4), (5.16) обратимся к рассмотренному примеру. Имеем группу очевидных формул:

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} b_{11}+\rho & b_{21} \\ b_{12} & b_{22}+\rho \end{vmatrix}, \qquad D'(\rho_1) = -\rho_2 + \rho_1, \qquad D'(\rho_2) = \rho_2 - \rho_1 \tag{6.1}$$

$$D_{11} = b_{22} + \rho, \qquad D_{12} = -b_{12}, \qquad D_{21} = -b_{21}, \qquad D_{22} = b_{11} + \rho$$

По формулам (5.3) имеем

$$H_\nu(\rho_s) = -\frac{1}{\rho_s}\left[(n_{11} + n_{12}) D_{\nu 1}(\rho_1) + (n_{21} + n_{22}) D_{\nu 2}\right] \qquad (\nu = 1,2) \tag{6.2}$$

Следовательно, положив $i = 1$, находим

$$C_1^{(s)} = \frac{D_{1\nu}(\rho_s)}{H_1(\rho_s)}, \qquad u_\nu^{(s)} = -\frac{n_{1\nu} D_{11}(\rho_s) + n_{2\nu} D_{12}}{\rho_s D_{12}} C_2^{(s)} \qquad (\nu = 1,2) \tag{6.3}$$

Сравнения показывают, что формулы (6.3) и формулы (4.14), (4.15) совпадают. Далее раскроем два первых выражения (5.16):

$$\beta_{11} = -\frac{\rho_1}{D'(\rho_1)}\left[H_1(\rho_1) p_{11} + H_2(\rho_1) p_{12}\right], \qquad \beta_{12} = \frac{\rho_2}{D'(\rho_2)}\left[H_1(\rho_2) p_{11} + H_1(\rho_2) p_{12}\right] \tag{6.4}$$

В силу очевидных тождеств

$$D_{11}(\rho_2) = -D_{22}(\rho_1), \qquad D_{11}(\rho_1) = -D_{22}(\rho_2)$$

а также тождеств

$$H_1(\rho_1) D_{11}(\rho_2) = -H_2(\rho_1) D_{12}, \qquad H_1(\rho_2) D_{11}(\rho_1) = -H_2(\rho_2) D_{12} \tag{6.5}$$

будем иметь

$$\beta_{11} = \frac{\rho_1 D_{12}}{(\rho_2 - \rho_1) C_2^{(1)}}\left[p_{11} - \frac{D_{11}(\rho_2) p_{12}}{D_{12}}\right], \qquad \beta_{12} = -\frac{\rho_2 D_{12}}{(\rho_2 - \rho_1) C_2^{(2)}}\left[p_{11} - \frac{D_{11}(\rho_1) p_{12}}{D_{12}}\right] \tag{6.6}$$

Наличие формул (6.3) позволяет установить совпадение величин β_{11}, β_{12}, определяемых по формулам (4.17) и формулам (6.6).

Автор благодарит А. И. Лурье за ценные замечания и советы, позволившие значительно улучшить первоначальное содержание статьи.

Поступила 3 VII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
2. Летов А. М. Собственно неустойчивые регулируемые системы. ПММ, т. XIV, вып. 2, 1950.
3. Троицкий А. В. О канонических преобразованиях уравнений теории автоматического регулирования. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
4. Лурье А. И. О канонической форме уравнений теории автоматического регулирования. ПММ. т. XII, вып. 5, 1948.