Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА К РАСЧЕТУ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ОБОЛОЧКИ

М. Ш. Микеладзе
(Москва)

В настоящей работе используется метод Ш. Е. Микеладзе [1] для численного решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами применительно к системам. Показывается, что для системы дифференциальных уравнений вида (1.1) весь вычислительный процесс сводится к использованию простых рекуррентных соотношений (1.4), которые в отличие от конечно-разностного способа избавляют вычислителя от решения громоздких алгебраических систем. Предлагаемый метод применяется к задаче о расчете вращающейся оболочки переменной толщины. Частные случаи этой задачи были рассмотрены в работах[2, 3, 4].

§ 1. Численное решение системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений второго порядка, не содержащих членов с первыми производными:

$$y_\nu''(\varphi) = a_{\nu 1} y_1(\varphi) + a_{\nu 2} y_2(\varphi) + \cdots + a_{\nu n} y_n(\varphi) + F_\nu(\varphi) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь $a_{\nu\mu}$ и $F_\nu(\varphi)$ суть данные непрерывные функции от φ в интервале $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Согласно формуле Тейлора имеем

$$y_\nu(\varphi) = y_\nu(\alpha) + (\varphi - \alpha) y_\nu'(\alpha) + \int_\alpha^\varphi (\varphi - t) y_\nu''(t)\, dt \tag{1.2}$$

В результате подстановки выражений (1.2) в систему (1.1) получим систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода: (1.3)

$$y_\nu''(\varphi) = F_\nu(\varphi) + \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} y_\mu(\alpha) + (\varphi - \alpha) \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} y_\mu'(\alpha) + \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} \int_\alpha^\varphi (\varphi - t) y_\mu''(t)\, dt$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

Известно, что решение такой системы можно построить методом последовательных приближений. Однако за редкими исключениями этот метод приводит к очень большим вычислениям. Удобные для вычислений рекуррентные соотношения можно получить из системы (1.3) путем замены в ней интегралов конечными суммами. Обозначая через h и k соответственно шаг и номер деления, после такой замены интегралов по формуле трапеций получим

$$\begin{aligned} y_{\nu k}'' = F_{\nu k} &+ [a_{\nu 1}^{(k)} y_1(\alpha) + \cdots + a_{\nu n}^{(k)} y_n(\alpha)] + kh\,[a_{\nu 1}^{(k)} y_1'(\alpha) + \cdots + a_{\nu n}^{(k)} y_n'(\alpha)] + \\ &+ a_{\nu 1}^{(k)} h^2 \left[\tfrac{1}{2} k y_{10}'' + (k-1) y_{11}'' + (k-2) y_{12}'' + \cdots + y_{1,k-1}''\right] + \cdots \\ &\cdots + \alpha_{\nu n}^{(k)} h^2 \left[\tfrac{1}{2} k y_{n0}'' + (k-1) y_{n1}'' + (k-2) y_{n2}'' + \cdots + y_{n,k-1}''\right] \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $y_{\nu k}''$, $F_{\nu k}$, $a_{\nu\mu}^{(k)}$ обозначают соответственно значения $y_\nu''(\varphi)$, $F_\nu(\varphi)$ и $a_{\nu\mu}$ в точке k.

При $k = 0$ $(\varphi = \alpha)$ имеем

$$y_{\nu 0}'' = F_{\nu 0} + a_{\nu 1}^{(0)} y_1(\alpha) + a_{\nu 2}^{(0)} y_2(\alpha) + \cdots + a_{\nu n}^{(0)} y_n(\alpha) \tag{1.5}$$

Значения же функции $y_\nu''(\varphi)$ в точке с номером k согласно (1.4) выражаются через значения $y_{\nu 0}'', y_{\nu 1}'', \ldots, y_{\nu, k-1}''$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ в предыдущих точках.

Если решается краевая задача для системы (1.1), то при этом не все значения $y_\nu(\alpha)$ и $y_\nu'(\alpha)$ (или их линейные комбинации) будут известными. Ниже эти неизвестные значения рассматриваются как параметры, для отыскания которых используются граничные условия в точке $\varphi = \beta$. Очевидно, что в процессе вычислений значения $y_{\nu k}''$ будут линейно содержать неизвестные параметры. Однако нетрудно показать, что все вычисление можно проделать без участия каких-либо параметров. Действительно, на основе теории интегральных уравнений Вольтерра решение системы (1.3) можно представить в виде следующей суммы:

$$y_\nu''(\varphi) = X_\nu(\varphi) + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda(\alpha)\, Y_{\nu\lambda}(\varphi) + \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda'(\alpha)\, Z_{\nu\lambda}(\varphi) \tag{1.6}$$

где $X_\nu(\varphi)$, $Y_{\nu\lambda}(\varphi)$, $Z_{\nu\lambda}(\varphi)$ соответственно являются решениями систем интегральных уравнений:

$$X_\nu(\varphi) = F_\nu(\varphi) + \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} \int_\alpha^\varphi (\varphi - t)\, X_\mu(t)\, dt$$

$$Y_{\nu\lambda}(\varphi) = a_{\nu\lambda} + \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} \int_\alpha^\varphi (\varphi - t)\, Y_{\mu\lambda}(t)\, dt$$

$$Z_{\nu\lambda}(\varphi) = (\varphi - \alpha)\, a_{\nu\lambda} + \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} \int_\alpha^\varphi (\varphi - t)\, Z_{\mu\lambda}(t)\, dt$$

Для решения последних систем используются рекуррентные соотношения вида (1.4).

§ 2. Расчет вращающейся оболочки переменной толщины. Пусть кольцеобразная (с отверстием на полюсе) оболочка вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω. Напряженно-деформированное состояние такой оболочки описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} + \left[\operatorname{ctg}\varphi + \frac{d}{d\varphi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1 Eh}\right)\right]\frac{dU}{d\varphi} - \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{r_1}{r_2}\operatorname{ctg}^2\varphi - \nu - \nu\operatorname{ctg}\varphi\,\frac{d\ln(Eh)}{d\varphi}\right]U =$$
$$= \rho\omega^2 r_1 r_2 \sin\varphi\left[(3r_2 + \nu r_1)\cos\varphi + 3\sin\varphi\,\frac{dr_2}{d\varphi} - r_2\sin\varphi\,\frac{d\ln(Eh)}{d\varphi} + \right.$$
$$\left. + \frac{r_1}{r_2}\sin\varphi\,\frac{d\ln\rho}{d\varphi}\right] + \frac{r_1^2}{r_2} EhV \tag{2.1}$$

$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \left[\operatorname{ctg}\varphi + \frac{d}{d\varphi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}D\right)\right]\frac{dV}{d\varphi} - \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{r_1}{r_2}\operatorname{ctg}^2\varphi + \nu - \nu\operatorname{ctg}\varphi\,\frac{d\ln D}{d\varphi}\right]V = -\frac{r_1^2}{r_2}\,\frac{U}{D}$$

В уравнениях системы (2.1) приняты следующие обозначения: φ — угол между осью вращения и нормалью к меридиану, отсчитываемый от вершины оболочки, r_1 и r_2 — главные радиусы кривизны, h — толщина, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала, из которого изготовлена оболочка, E — модуль упругости, $D = Eh/12(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость изгиба, ω — угловая скорость вращения. Система (2.1) составлена относительно так называемых переменных Мейсснера U и V, которые связаны с перерезывающей силой Q_φ и смещениями следующим образом:

$$U = r_2 Q_\varphi, \qquad V = \frac{1}{r_1}\left(v + \frac{dw}{d\varphi}\right)$$

Здесь v и w обозначают смещения по касательной и нормали к меридиану.

Если ввести новые переменные y и z, связанные с U и V соотношениями [5]

$$U = \exp\left\{-0.5 \int \left[\operatorname{ctg}\varphi + \frac{d}{d\varphi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1 Eh}\right)\right] d\varphi\right\} y$$

$$V = \exp\left\{-0.5 \int \left[\operatorname{ctg}\varphi + \frac{d}{d\varphi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1} D\right)\right] d\varphi\right\} z \tag{2.2}$$

то система уравнений (2.1) преобразуется в такую относительно переменных y и z, которая уже не содержит членов с первыми производными. О том, как решать такую систему, говорилось выше.

Если оболочка сплошная (без отверстия на полюсе), то в этом случае коэффициенты системы дифференциальных уравнений (2.1) обращаются в бесконечность при $\varphi = 0$. Поэтому непосредственное применение численных методов становится невозможным. В этом случае поступаем следующим образом: выделяем в окрестности полюса $\varphi = 0$ некоторую малую область $G\,(0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha)$, в пределах которой кривизну меридиана $1/r_1$ и толщину оболочки h будем считать постоянными. Такое предположение приводит либо к вписанному шару, либо к конусу, для которых решения однородной системы (2.1) даются соответственно в виде гипергеометрического и бесселевого рядов. Частные решения системы (2.1) как для рассматриваемой, так и для других осесимметричных задач можно найти в работе [6].

Из решения системы (2.1), полученного для области G, определяются значения функции U, V и их производных на границе ($\varphi = \alpha$) последней. Эти значения будут содержать линейно два неизвестных параметра. Таким образом, для определения элементов деформаций и напряжений в остальной части оболочки ($\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$) нужно пользоваться той же расчетной схемой, что и для кольцеобразных оболочек.

Следует заметить, что, исходя из малости области G, можно, следуя Геккелеру, в уравнениях системы (2.1) заменить $\operatorname{ctg}\varphi$ через $1/\varphi$. Тогда решение однородной системы (2.1) для вписанного шара, так же как и для конуса, можно получить в функциях Бесселя [7].

Для полноты изложения рассмотрим также случаи свободно вращающейся безмоментной оболочки. Обозначим через N_φ и N_θ меридиональное и кольцевое нормальные усилия. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{d}{d\varphi}(N_\varphi r_0) - N_\theta r_1 \cos\varphi + \rho\omega^2 r_1 r_0^2 \cos\varphi = 0$$

$$N_\varphi r_0 + N_\theta r_1 \sin\varphi - \rho\omega^2 r_1 r_0^2 \sin\varphi = 0 \tag{2.3}$$

где $r_0 = r_2 \sin\varphi$ — радиус параллельного круга.

Из уравнений системы (2.3) имеем

$$\frac{d}{d\varphi}\ln(N_\varphi r_0) + \operatorname{ctg}\varphi = 0 \quad \text{или} \quad N_\varphi r_0 \sin\varphi = c$$

откуда видно, что если край оболочки не нагружен, то $N_\varphi = 0$. При этом для определения кольцевого усилия получается формула

$$N_\theta = \rho\omega^2 r_0^2 \tag{2.4}$$

Согласно последней формуле, вращающуюся безмоментную оболочку можно представить в виде ряда свободно вращающихся тонких колец радиуса r_0. При этом очевидно, что пластические деформации возникают у наружного края оболочки и постепенно распространяются по направлению к вершине. Угловая скорость ω, которая соответствует появлению пластической деформации в данном параллельном сечении оболочки, определяется по формуле

$$\omega = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{g}{\gamma}\sigma_s} \tag{2.5}$$

В формуле (2.5), как обычно: σ_s — предел текучести материала, γ — удельный вес, g — ускорение силы тяжести.

На основании формулы (2.5) заключаем, что в сплошных оболочках чисто пластическое состояние теоретически невозможно ($\omega \to \infty$ при $r_0 \to 0$).

Рассмотрим числовой пример.

Стальная сферическая оболочка переменной толщины вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 314.1$ сек$^{-1}$. Расчетные данные такие:

$$R = 100 \text{ см}, \qquad \gamma / g = 10^{-6} \times 7.9 \text{ кг сек}^2 \text{ см}^{-4}, \qquad \nu = 0.3$$
$$E = 10^6 \times 2.1 \text{ кг см}^{-2}, \qquad h = 5e^{0.1047-\varphi} \quad (0.1047 \leqslant \varphi \leqslant 0.3141)$$

Для рассматриваемого примера система (2.1) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2U}{d\varphi^2} + (\operatorname{ctg}\varphi + 1)\frac{dU}{d\varphi} - (\operatorname{ctg}^2\varphi + 0.3\operatorname{ctg}\varphi - 0.3)\,U -$$
$$- 38970\,(165\sin 2\varphi + 99\sin^2\varphi)\,e^{0.1047-\varphi} = 10^6 \times 10.5 e^{0.1047-\varphi}\,V \tag{2.6}$$
$$\frac{d^2V}{d\varphi^2} + (\operatorname{ctg}\varphi - 3)\frac{dV}{d\varphi} - (\operatorname{ctg}^2\varphi + 0.9\operatorname{ctg}\varphi + 0.3)V = -10^{-6} \times 4.16 e^{3\,(\varphi - 0.1047)}\,U$$

В результате введения новых переменных y и z, связанных с U и V соотношениями (2.2), получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} - (0.75\operatorname{ctg}^2\varphi + 0.8\operatorname{ctg}\varphi - 0.55)y = 38970\sqrt{\sin\varphi}\,(165\sin 2\varphi +$$
$$+ 99\sin^2\varphi)\,e^{0.1047-\varphi/2} + 10^6 \times 10.5e^{0.1047+\varphi}\,z \tag{2.7}$$
$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} - (0.75\operatorname{ctg}^2\varphi - 0.6\operatorname{ctg}\varphi + 2.05)\,z = -10^{-6} \times 4.16e^{\varphi - 0.3141}\,y$$

Рекуррентные соотношения (1.4) для определения значений y_k'' и z_k'' принимают вид:

$$y_k'' = 38970\sqrt{\sin\varphi_k}\,(165\sin 2\varphi_k + 99\sin^2\varphi_k)\,e^{0.1047-\varphi_k/2} +$$
$$+ (0.75\operatorname{ctg}^2\varphi_k + 0.8\operatorname{ctg}\varphi_k - 0.55)\,y(\alpha) + 10^6 \times 10.5e^{0.1047+\varphi_k}z(\alpha) +$$
$$+ kh\,[(0.75\operatorname{ctg}^2\varphi_k + 0.8\operatorname{ctg}\varphi_k - 0.55)\,y'(\alpha) + 10^6 \times 10.5e^{0.1047+\varphi_k}z'(\alpha)] +$$
$$+ (0.75\operatorname{ctg}^2\varphi_k + 0.8\operatorname{ctg}\varphi_k - 0.55)\,h^2\left[\frac{1}{2}ky_0'' + (k-1)\,y_1'' +\right.$$
$$\left. + (k-2)\,y_2'' + \cdots + y_{k-1}''\right] + 10^6 \times 10.5\,e^{0.1047+\varphi_k}h^2\left[\frac{1}{2}kz_0'' +\right.$$
$$\left. + (k-1)\,z_1'' + (k-2)\,z_2'' + \cdots + z_{k-1}''\right]$$

$$z_k'' = -10^{-6} \times 4.16\,e^{\varphi_k - 0.3141}\,y(\alpha) + (0.75\operatorname{ctg}^2\varphi_k - 0.6\operatorname{ctg}\varphi_k + 2.05)\,z(\alpha) +$$
$$+ kh\,[-10^{-6} \times 4.16\,e^{\varphi_k - 0.3141}\,y'(\alpha) + (0.75\operatorname{ctg}^2\varphi_k - 0.6\operatorname{ctg}\varphi_k + 2.05)\,z'(\alpha)] -$$
$$- 10^{-6} \times 4.16\,e^{\varphi_k - 0.3141}h^2\left[\frac{1}{2}ky_0'' + (k-1)\,y_1'' + (k-2)\,y_2'' + \cdots + y_{k-1}''\right] +$$
$$+ (0.75\operatorname{ctg}^2\varphi_k - 0.6\operatorname{ctg}\varphi_k + 2.05)\,h^2\left[\frac{1}{2}kz_0'' + (k-1)\,z_1'' + (k-2)\,z_2'' + \cdots + z_{k-1}''\right]$$

Для $\varphi = \alpha = 0.1047$, $k = 0$ имеем, что

$$y_0'' = 38970\sqrt{\sin\alpha}\,(165\sin 2\alpha + 99\sin^2\alpha)\,e^{0.1047-\frac{1}{2}\alpha} +$$
$$+ (0.75\operatorname{ctg}^2\alpha + 0.8\operatorname{ctg}\alpha - 0.55)\,y(\alpha) + 10^6 \times 10.5\,e^{0.1047+\alpha}\,z(\alpha)$$

$$z_0'' = -10^{-6} \times 4.16\,e^{\alpha - 0.3141}\,y(\alpha) + (0.75\operatorname{ctg}^2\alpha - 0.6\operatorname{ctg}\alpha + 2.05)\,z(\alpha)$$

Вычисление y_k, y_k', z_k, z_k' производим на основании формулы (1.2), заменив соответствующие интегралы суммами. После этого, пользуясь соотношениями (2.2), находим U_k, U_k', U_k'', V_k, V_k', V_k''. Результаты проведенных вычислений приводим в виде таблицы,

$k=0$, $\varphi=0.105$	U	$2.94\,y$
	U'	$2.94\,y' - 15.4\,y$
	U''	$436\,y - 30.9\,y' + 10^6\times 38\,z + 1380000$
	V	$3.62\,z$
	V'	$3.62\,z' - 11.8\,z$
	V''	$-10^{-6}\times 12.2\,y + 437\,z - 23.6\,z'$
$k=1$, $\varphi=0.174$	U	$2.60\,y + 0.154\,y' + 10^6\times 0.0693\,z + 2520$
	U'	$-0.38\,y + 1.84\,y' + 10^6\times 2.06\,z + 10^6\times 0.0744\,z' + 105000$
	U''	$89.8\,y - 7.10\,y' + 10^6\times 23.9\,z + 10^6\times 1.64\,z' + 1540000$
	V	$-10^{-6}\times 0.0256\,y + 3.61\,z + 0.218\,z'$
	V'	$-10^{-6}\times 0.819\,y - 10^{-6}\times 0.0275\,y' + 5.02\,z + 3.00\,z' - 0.000450$
	V''	$-10^{-6}\times 12.1\,y - 10^{-6}\times 0.714\,y' + 122\,z + 0.171\,z' - 0.0117$
$k=2$, $\varphi=0.244$	U	$2.75\,y + 0.269\,y' + 10^6\times 0.262\,z + 10^6\times 0.00850\,z' + 13\,000$
	U'	$3.36\,y + 1.51\,y' + 10^6\times 3.77\,z + 10^6\times 0.243\,z' + 229000$
	U''	$28.8\,y - 3.04\,y' + 10^6\times 24.2\,z + 10^6\times 2.88\,z' + 1900000$
	V	$4.23\,z - 10^{-6}\times 0.112\,y - 10^{-6}\times 0.00361\,y' + 0.432\,z' - 0.0000591$
	V'	$-10^{-6}\times 1.86\,y - 10^{-6}\times 0.111\,y' + 11.5\,z + 3.22\,z' - 0.00371$
	V''	$-10^{-6}\times 17.7\,y - 10^{-6}\times 1.66\,y' + 71.3\,z + 5.34\,z' - 0.0796$
$k=3$, $\varphi=0.314$	U	$3.04\,y + 0.368\,y' + 10^6\times 0.576\,z + 10^6\times 0.0315\,z' + 33000$
	U'	$4.60\,y + 1.34\,y' + 10^6\times 5.60\,z + 10^6\times 0.492\,z' + 374000$
	U''	$9.7\,y - 1.87\,y' + 10^6\times 27.3\,z + 10^6\times 4.04\,z' + 2170000$
	V	$-10^{-6}\times 0.286\,y - 10^{-6}\times 0.0154\,y' + 5.20\,z + 0.672\,z' - 0.000512$
	V'	$-10^{-6}\times 3.40\,y - 10^{-6}\times 0.273\,y' + 16.0\,z + 3.68\,z' - 0.0156$
	V''	$-10^{-6}\times 27.0\,y - 10^{-6}\times 3.04\,y' + 59.4\,z + 7.89\,z' - 0.262$

В этой таблице под y, y', z и z' надлежит понимать значения $y(\varphi)$, $y'(\varphi)$, $z(\varphi)$ и $z'(\varphi)$ при $\varphi=\alpha$. Значения y, y', z, z' определяются согласно граничным условиям в сечениях $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$.

Поступила 25 XII 1952

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Микеладзе Ш. Е. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений и их приложения к задачам теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
2. Микеладзе М. Ш. Упруго-пластические деформации быстро вращающихся дисков переменной толщины. Инженерный сборник, т. XV, 1953.
3. Meriam J. L. Stresses and Displacements in a Rotating Conical Shell. Journal of Applied Mechanics, vol. 10, No 2, June, 1943.
4. Коваленко А. Д. Теория расчета на прочность колес турбомашин. Изд. АН УССР, Киев, 1950.
5. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.—Л, 1950.
6. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, М.—Л, 1947.
7. Геккелер И. В. Статика упругого тела. Гостехиздат, М.—Л., 1934.