Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСТЕКАНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

Н. Н. Кочина

(Москва)

Будем считать первоначальный уровень грунтовых вод горизонтальным и примем его за плоскость xy, ось z направим вертикально вверх. Пусть после полива, когда поливные воды уже сомкнулись с грунтовыми, свободная поверхность грунтовых вод имеет форму $z = F(x, y)$, причем будем ее предполагать слабо изогнутой. Вниз грунтовые воды простираются до бесконечности. Решение этой задачи для плоского случая дано в работах [1, 2]. Рассмотрим аналогичным образом пространственную задачу.

В области фильтрации должно выполняться уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$ для потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$. На свободной поверхности давление равно атмосферному; примем его равным нулю. Получаем

$$\varphi + kz = 0 \qquad \left(\varphi = -\frac{k}{\rho g}(p + \rho g z)\right) \tag{1}$$

Дифференцируя (1) по t, имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{m}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{k}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

Это условие считаем выполненным на плоскости $z = 0$.

Пренебрегая квадратичными членами, получим

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \qquad \left(c = \frac{k}{m}\right) \tag{3}$$

Отсюда следует, что $\varphi = \varphi(x, y, z - ct)$. Из (1) найдем уравнение свободной поверхности:

$$z = -\frac{\varphi(x, y, -ct)}{k} \tag{4}$$

На свободной поверхности задано начальное условие

$$\varphi(x, y, 0) = -kF(x, y) \tag{5}$$

Решив задачу Дирихле для нижнего полупространства, найдем

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{k}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(z-ct)\,F(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-ct)^2]^{3/2}}$$

Начальное условие выполняется, так как, введя сферические координаты λ, δ, так что [3]

$$\xi = x - (z - ct)\,\mathrm{tg}\,\delta\cos\lambda, \qquad \eta = y - (z - ct)\,\mathrm{tg}\,\delta\sin\lambda$$

получим

$$\varphi(x, y, z, t) = -\frac{k}{2\pi}\int\limits_{0}^{1/2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} F[x - (z-ct)\,\mathrm{tg}\,\delta\cos\lambda,\ \ y - (z-ct)\,\mathrm{tg}\,\delta\sin\lambda]\sin\delta\,d\delta\,d\lambda$$

Полагая $z=0$, $t=0$, в силу (1) будем иметь $z=F(x, y)$.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть начальный бугор имеет прямоугольную форму, т. е. $F(x, y)=\delta$ внутри прямоугольника $|x|<a$, $|y|<b$ и $F(x, y)=0$ вне его.

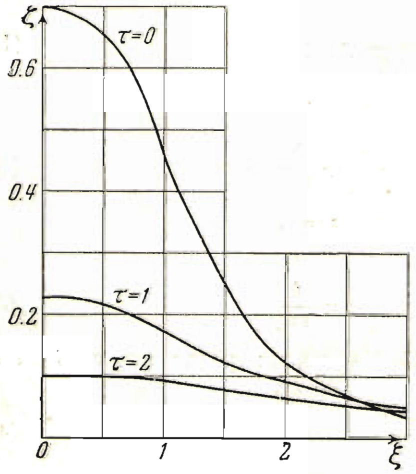
Решение уравнения $\triangle\varphi=0$ при этом начальном условии было получено Я. А. Мачеретом [4] и имеет для данной задачи вид:

$$\varphi(x, y, z, t)=-\frac{\kappa\delta}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{(z-ct)\sqrt{(z-ct)^2+(y+b)^2+(x+a)^2}}{(y+b)(x+a)}-\right.$$
$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{(z-ct)\sqrt{(z-ct)^2+(y-b)^2+(x+a)^2}}{(y-b)(x+a)}-$$
$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{(z-ct)\sqrt{(z-ct)^2+(y+b)^2+(x-a)^2}}{(y+b)(x-a)}+$$
$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\frac{(z-ct)\sqrt{(z-ct)^2+(y-b)^2+(x-a)^2}}{(y-b)(x-a)}\right] \tag{6}$$

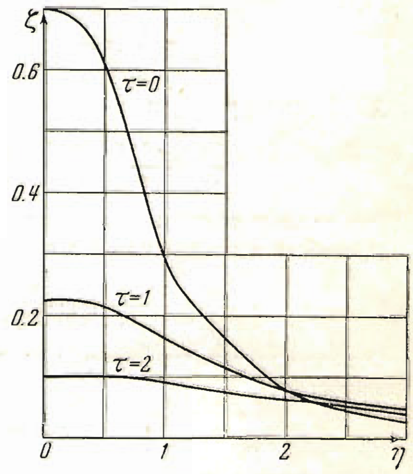
Устремляя сторону прямоугольника b к нулю, получим в пределе поверхность формы

$$z=\frac{Q}{2\pi}\frac{ct}{(y^2+c^2t^2)}\left[\frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+c^2t^2}}-\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+c^2t^2}}\right] \tag{7}$$

Так как в близкие к начальному моменту времени в область движения попадают особенности [3], в полученных выражениях нужно заменять ct на $ct+h$. По-



Фиг. 1



Фиг. 2

лучим растекание некоторых пространственных бугров. При построении кривых $\zeta=\zeta(\xi)$ на фиг. 1 и $\zeta=\zeta(\eta)$ — на фиг. 2 вычисления производились в безразмерных величинах согласно следующим зависимостям, которые получаются из (7), полагая соответственно $y=0$ и $x=0$:

$$\zeta(\xi)=\frac{1}{1+\tau}\left[\frac{\xi+1}{\sqrt{(\xi+1)^2+\sigma(1+\tau)^2}}-\frac{\xi-1}{\sqrt{(\xi-1)^2+\sigma(1+\tau)^2}}\right] \tag{8}$$

$$\zeta(\eta)=\frac{1+\tau}{\eta^2+(1+\tau)^2}\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2\sigma^2+\sigma(1+\tau)^2}} \tag{9}$$

причем

$$\xi=\frac{x}{a},\quad \eta=\frac{y}{h},\quad \sigma=\frac{h}{a},\quad \tau=\frac{ct}{h},\quad \zeta=\frac{\pi hz}{Q} \tag{10}$$

Устремляя в формуле (6) величину b к бесконечности, получим растекание плоского бугра. Можно показать, что пространственные бугры растекаются быстрее плоского. Если сторона a прямоугольника стремится к нулю, формула (7) дает растекание бугра, получающегося от перемещения вверх со скоростью c осесимметричного диполя. Свободная поверхность имеет форму

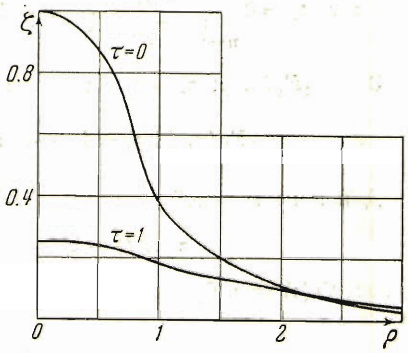
$$z(r,\ t) = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{ct}{[r^2 + c^2t^2]^{3/2}} \tag{11}$$

Дифференцированием полученного решения по z можно найти новые решения, соответствующие перемещению вдоль оси z со скоростью c мультиполей. График свободной поверхности полученного согласно (11) течения дан на фиг. 3. При этом ct заменено на $ct+h$ и вычисление кривых $\zeta = \zeta(\rho)$ велось в безразмерных величинах по формуле

$$\zeta(\rho) = \frac{1+\tau}{[\rho^2 + (1+\tau)^2]^{3/2}}$$

Здесь обозначено

$$\left(\zeta = \frac{2\pi z h^2}{Q},\quad \rho = \frac{r}{h},\quad \tau = \frac{ct}{h}\right) \tag{12}$$



Фиг. 3

2. Пусть теперь возвышение уровня грунтовых вод имеется только внутри круга радиуса a, т. е.

$$F(x,\ y) = \begin{cases} \delta & \text{при } r < a \\ 0 & \text{при } r > a \end{cases}$$

Форма свободной поверхности определится следующим уравнением

$$z(r,\ t) = \tag{13}$$

$$= \frac{\delta}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)!}{4^m m!\,(m+1)!}\left(\frac{a}{ct}\right)^{2m+2}\left(1+\frac{r^2}{c^2t^2}\right)^{-2m-3/2} F\left[-m-\frac{1}{2},\ -m;\ 1,\ -\left(\frac{r}{ct}\right)^2\right]$$

где $F(\alpha,\ \beta;\ \rho,\ z)$ — гипергеометрическая функция. Для малых r и больших t уравнение свободной поверхности можно записать в виде

$$z(r,\ t) =$$

$$= \frac{\delta}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)!}{4^m m!\,(m+1)!}\left(\frac{a}{ct}\right)^{2m+2}\left(1+\frac{r}{c^2t^2}\right)^{-2m-3/2}\left[1+\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n(2m+1)!}{4^n(2m-2n+1)!}\left(\frac{r}{ct}\right)^{2n}\right]$$

Отсюда для изменения максимальной ординаты ($r=0$) в зависимости от времени имеем

$$z(0,\ t) = \delta\left[1 - \frac{ct}{\sqrt{a^2+c^2t^2}}\right] \tag{14}$$

Аналогично тому, как это сделано Л. А. Галиным в работе [2], можно получить выражение для свободной поверхности грунтового потока при наличии водоупора. (За водоупор принимаем плоскость $z=0$, условие на свободной поверхности сносим на плоскость $z=h$.)

Для рассмотренного выше случая будем иметь

$$z(r,\ t) = a\delta\int_0^{\infty} J_1(\alpha a)\,J_0(\alpha r)\exp[-ct\alpha\,\mathrm{th}\,\alpha h]\,d\alpha$$

Если начальный бугор имеет форму

$$z(x, y, 0) = \delta e^{-(px^2+qy^2)}$$

то

$$z(x, y, t) = \frac{\delta}{\pi \sqrt{pq}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2}{p^2} + \frac{\beta^2}{q^2}\right) - ct\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\mathrm{th}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}h\right] \cos\alpha x \cos\beta y \, d\alpha \, d\beta.$$

Если $p = q$, для бесконечно глубокой жидкости получим, для малых r и t:

$$z(r, t) = \delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right)(2\sqrt{p}\,ct)^n {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}n, 1, -pr^2\right) e^{-pr^2} \tag{15}$$

Здесь ${}_1F_1(\alpha, \beta; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция

$${}_1F_1(\alpha, \beta; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!} z^2 + \cdots$$

Для максимальной ординаты имеем

$$z(0, t) = \delta\left[1 - \sqrt{\pi p}\, ct e^{pc^2t^2}\{1 - \Phi(ct\sqrt{p})\}\right] \tag{16}$$

причем $\Phi(z)$ есть функция вероятности:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du$$

3. Пусть начальная форма свободной поверхности будет

$$z = \delta \cos\alpha x \cos\beta y$$

Это некоторое приближение к случаю, когда поливу подвергается ряд полей, разделенных промежутками. (Под полями образуются бугры грунтовых вод, между ними — впадины.)

Свободная поверхность примет вид:

$$z = \delta e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,ct} \cos\alpha x \cos\beta y \tag{17}$$

Здесь δ — малая величина. Можно искать решение задачи в виде ряда по степеням δ, используя граничное условие (2). Подобно тому, как это делает Л. А. Галин, находим первое приближение φ_1 из (3). Второе приближение φ_2 получаем из уравнения (2), подставляя φ_1 в квадратичные члены; имеем

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + c\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{1}{m}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right]_{z=0}$$

Дальнейшие приближения получаются аналогично. Для последней задачи, ограничиваясь двумя приближениями, получим форму свободной поверхности:

$$z = \delta e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,ct} \cos\alpha x \cos\beta y + \frac{\delta^2}{4}\left\{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(1 - e^{-2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,ct}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2\left(e^{-2\beta ct} - e^{-2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,ct}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \beta} \cos 2\beta y + \frac{\beta^2\left(e^{-2\alpha ct} - e^{-2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,ct}\right)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha} \cos 2\alpha x\right\} \tag{18}$$

4. Рассмотрим теперь растекание бугра грунтовых вод при наличии испарения с интенсивностью ε. Аналогично тому, как это делает Б. Б. Девисон в работе [5] при отсутствии испарения, получим, линеаризируя условие на свободной поверхности:

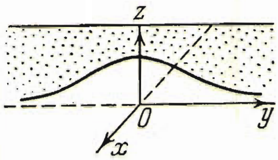
$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = c\varepsilon \tag{19}$$

Будем считать, что $\varepsilon = \varepsilon(x, y, t)$. Считая наружную поверхность водопроницаемого массива плоской (фиг. 4), положим

$$\varepsilon = \varkappa + \lambda z(x, y, t)$$

где $\varkappa$ и λ определяются из опыта [6]. Используя условие (19), сведем задачу к решению уравнения Лапласа $\triangle\varphi = 0$ при граничном условии

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{c\lambda}{k}\varphi\right)_{z=0} = c\varkappa \qquad (20)$$



Фиг. 4

и начальном

$$\varphi(x, y, 0) = -kF(x, y) \qquad (21)$$

Так как условие (20) выполняется во всем нижнем полупространстве, выражение для потенциала скорости примет вид:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{k\varkappa}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t/m}) + e^{-\lambda t/m}\varphi_0(x, y, z - ct)$$

где φ_0 — решение уравнения Лапласа при начальном условии (21) и граничном (3) (испарение отсутствует). Уравнение свободной поверхности имеет вид:

$$z(x, y, t) = z_0(x, y, -ct)\, e^{-\lambda t/m} + \frac{\varkappa}{\lambda}(e^{-\lambda t/m} - 1)$$

Поступила 4 XII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Некоторые вопросы неустановившегося движения грунтовых вод. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
2. Кочина Н. Н. Плоская задача о растекании бугра грунтовых вод в слое бесконечной глубины. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
3. Кочин Н. Е. К теории волн Коши-Пуассона. Собр. соч., т. 11. Изд. АН СССР, М. — Л., 1949.
4. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы. ОНТИ, М.—Л., 1937.
5. Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды (Б. Б. Девисон — «Движение грунтовых вод»). Изд. АН СССР, М. — Л., 1938.
6. Крылов М. М. К изучению динамики балансов грунтовых вод в целях гидрогеологического прогноза. Известия АН УзССР, вып. 2, 1947.