Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ГРУНТОВЫХ ВОД С УЧЕТОМ ИНФИЛЬТРАЦИИ

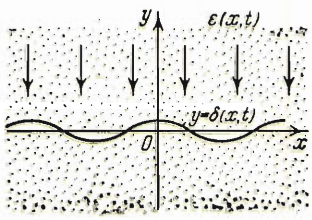
В. К. Белякова

(Москва)

В работах [1—3] решается задача о растекании бугра грунтовых вод, образовавшегося при полосообразном поливе. Здесь дается другой вывод решения задачи об изменении формы свободной поверхности грунтовых вод с учетом инфильтрации

Предположим, что грунтовые воды занимают нижнюю полуплоскость, начальное возвышение свободной поверхности над осью абсцисс невелико и дается формулой (фиг. 1)

$$\delta(x, 0) = f(x) \tag{1}$$



Фиг. 1

В момент $t = 0$ начинается полив с интенсивностью $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$, причем ε — количество жидкости, выпадающее в единицу времени на единицу площади. Рассмотрим вопрос о том, как будет происходить подъем грунтовых вод с течением времени. Обозначим через $\delta(x, t)$ ординату свободной поверхности. На свободной поверхности должно быть выполнено условие

$$k\varphi + \delta(x, t) = 0 \tag{2}$$

где k — коэффициент фильтрации. Если учесть инфильтрацию, то получим условие, которое должно выполняться на поверхности грунтовых вод:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\varepsilon(x, t) \qquad \left(c = \frac{k}{m}\right) \tag{3}$$

где m — пористость. Предполагая возвышение свободной поверхности над осью абсцисс небольшим, будем считать это условие выполняющимся при $y = 0$.

Уравнение свободной поверхности найдем по формуле

$$\delta(x, t) = -\frac{\varphi(x, 0, t)}{k} \tag{4}$$

Решение поставленной задачи, удовлетворяющее начальному условию (1) и граничному условию (3), будем искать в виде

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_1(x, y, t) + \varphi_2(x, y, t)$$

при этом потребуем, чтобы функции φ_1 и φ_2 удовлетворяли условиям

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = 0 \quad \text{при } y = 0, \qquad \varphi_1 = -kf(x) \quad \text{при } t = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = -\varepsilon(x, t) \quad \text{при } y = 0, \qquad \varphi_2 = 0 \quad \text{при } t = 0 \tag{6}$$

Определение функций φ_1 дано в работах [2, 3]. Приведем попутно иной вывод этого решения.

Напишем комплексный потенциал для функции φ_1:

$$W_1(z, t) = \varphi_1(x, y, t) + \psi_1(x, y, t)\, i$$

Тогда условие (5) можно представить в виде

$$\operatorname{Im}\left(-\frac{\partial W_1}{\partial z} + \frac{i}{c}\frac{\partial W_1}{\partial t}\right) = 0 \quad \text{при } y = 0 \tag{7}$$

Предположим сначала, что зависимость от времени функции $W_1(z, t)$ будет периодической, т. е. $W_1(z, t) = W_0(z)\, e^{i\omega t}$. При этом условие (7) можно переписать так:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{dW_0}{dy} + \frac{\omega}{c} W_0\right)_{y=0} = 0$$

Комплексный потенциал W_1 является голоморфной функцией во всей нижней полуплоскости. То же самое можно сказать и относительно W_0. Поэтому W_0 представим в виде

$$W_0(z) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Re}[W_0(\zeta)]\, d\zeta}{z - \zeta}$$

Так как $\operatorname{Im}(z - \zeta) < 0$, пока z находится в нижней полуплоскости, то

$$\frac{1}{z - \zeta} = \int\limits_0^{i\infty} e^{\lambda(\zeta - z)}\, d\lambda$$

Таким образом, функция W_0 приобретает вид:

$$W_0(z) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}[W_0(\zeta)]\, d\zeta \int\limits_0^{i\infty} e^{\lambda(\zeta - z)}\, d\lambda$$

Обращаясь к рассмотрению функции W_1 и положив $\omega = c\lambda$, получим

$$W_1(z, t) = W_0 e^{i\omega t} = W_1(z, t) = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Re}[W_0(\zeta)]\, d\zeta}{z - \zeta - cti}$$

Отделяя вещественную часть, находим

$$\varphi_0 = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{Re}[W_0(\zeta)]\,(y - ct)\, d\zeta}{(x - \zeta)^2 + (y - ct)^2} = \frac{k}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\zeta)\,(y - ct)}{(x - \zeta)^2 + (y - ct)^2}$$

Обращаясь к определению функции φ_2, предположим сначала, что $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Тогда, положив

$$\Phi_2 = \varphi_2 + cE(t) \qquad \left(E(t) = \int\limits_0^t \varepsilon(t)\, dt\right)$$

условие (6) перепишем в виде

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = 0 \quad \text{при } y = 0$$

Таким образом, определение φ_2 сводится к предыдущей задаче; имеем

$$\varphi_2 = -c\int\limits_0^t \varepsilon\, dt + \frac{c}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{E(t)\,(y - ct)\, d\zeta}{(x - \zeta)^2 + (y - ct)^2}$$

Для потенциала скоростей φ получим выражение

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{[kf(\zeta) + cE(t)]\,(y - ct)\, d\zeta}{(x - \zeta)^2 + (y - ct)^2} - cE(t)$$

Форма свободной поверхности определится уравнением

$$\delta(x, t) = \frac{kt}{m\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-\zeta)^2 + c^2t^2} \left\{ f(\xi) + \frac{E(t)}{m} \right\} d\zeta + \frac{E(t)}{m} \tag{8}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (8) переходит в уравнение свободной поверхности, полученное в работах [2] и [3].

Если теперь предположить, что $\varepsilon = \varepsilon(x)$, то аналогичным образом можно найти формулы для потенциала скоростей и формы свободной поверхности. Действительно, в этом случае условие (3), если ввести функцию

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(\zeta)\, d\zeta}{z - \zeta}$$

принимает вид:

$$\operatorname{Im}\left[\frac{\partial(W + iF)}{dz} + i\frac{1}{c}\frac{\partial(W + iF)}{dt}\right] = 0 \quad \text{при } y = 0$$

Решая задачу при этом условии, находим комплексный потенциал:

$$W(z, t) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}[(W(\zeta) + iF(\zeta)]\, d\zeta}{z - \zeta - cti} - iF(z)$$

Для потенциала скоростей имеем

$$\varphi(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kf(\zeta)(y - ct)\, d\zeta}{(x-\zeta)^2 + (y - ct)^2} - \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}[iF(\zeta)]\, d\zeta}{z - \zeta - cti} + iF(z)\right\} \tag{9}$$

Уравнение свободной поверхности будет

$$\delta(x, t) = \frac{kt}{\pi m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(x-\zeta)^2 + (ct)^2} + \frac{1}{k}\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}[iF(\zeta)]\, d\zeta}{x - \zeta - cti} + iF(x)\right\}$$

Рассмотрим движение грунтовых вод в слое конечной глубины (фиг. 2). В это случае, кроме условия (3), должно быть выполнено еще граничное условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } y = -H \tag{10}$$

Предположим, что форма свободной поверхности в начальный момент времени представлялась периодической функцией с периодом, равным $2l$.

Предполагая далее функцию $\varepsilon(x, t)$ также периодической по x с тем же периодом $2l$, разложим ее в тригонометрический ряд:

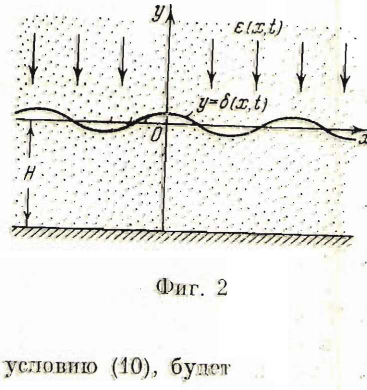
$$\varepsilon(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(t) \cos\frac{\pi n x}{l}$$

Потенциал скоростей φ будем искать в виде

$$\varphi = T(t)\, Y(y) \cos\frac{\pi n x}{l}$$

Так как φ удовлетворяет уравнению $\triangle\varphi = 0$, то

$$Y'' - a_a{}^2 Y = 0 \qquad \left(a_n = \frac{\pi n}{l}\right)$$



Фиг. 2

Решением этого уравнения, удовлетворяющим условию (10), будет

$$Y = \operatorname{ch}[a_n(y + H)]$$

Для определения функции T из условия (3) имеем уравнение

$$T' + ca_n \operatorname{th}(a_n H)\, T = -\frac{c\varepsilon_n(t)}{\operatorname{ch}(a_n H)}$$

Решая его, находим

$$T = e^{-b_n t} + \frac{c}{\operatorname{ch}(a_n H)}\, e^{-b_n t} \int_0^t \varepsilon_n(\tau)\, e^{b_n \tau} d\tau \qquad \left(b_n = \frac{c\pi n}{l} \operatorname{th}(a_n H)\right)$$

Так как уравнение $\Delta\varphi = 0$ и условия (3) и (10) являются линейными, то решение можно написать в виде

$$\varphi = \sum_{a=0}^{\infty} C_n \left(e^{-b_n t} + \frac{c}{\operatorname{ch}(a_n H)}\, e^{-b_n t} \int_0^t \varepsilon_n(\tau)\, e^{b_n \tau} d\tau\right) \operatorname{ch}[a_n(y+H)] \cos\frac{\pi n x}{l}$$

Остается удовлетворить начальному условию (1) $\varphi = -kf(x)$ при $t = 0$, т. е.

$$-kf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{ch}(a_a \cdot H) \cos\frac{\pi n x}{l} \tag{11}$$

Выражение (11) представляет собой разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ и служит для определения коэффициентов C_n.

Уравнение свободной поверхности будет

$$\delta = -\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(e^{-b_n t} + \frac{c}{\operatorname{ch}(a_n H)}\, c^{-b_n t} \int_0^t \varepsilon_n(\tau)\, e^{b_n \tau} d\tau\right) \operatorname{ch}(a_n H) \cos\frac{\pi n x}{l}$$

В том случае, когда уравнение свободной поверхности при $t = 0$ не является периодической функцией, тогда, подобно тому как это делается в работе [2], можно искать решение в форме интеграла Фурье.

Получим следующие выражения для потенциала скоростей:

$$\varphi = \int_0^{\infty} \cos\alpha x\, d\alpha \int_0^{\infty} A_0(\omega)\, e^{-c\omega \operatorname{th}(\omega H)\, t} \left(1 + \int_0^t \varepsilon(\tau, x)\, e^{c\omega \operatorname{th}(\omega H)} d\tau\right) \operatorname{ch}[\omega(y+H)] \cos\alpha\omega\, d\omega$$

Для свободной поверхности

$$\delta = -\frac{1}{k} \int_0^{\infty} \cos\alpha x\, d\alpha \int_0^{\infty} A_0(\omega)\, e^{-c\omega \operatorname{th}(\omega H) t} \left(1 + \int_0^t \varepsilon(\tau, x)\, e^{c\omega \operatorname{th}(\omega H)} d\tau\right) \operatorname{ch}(\omega H) \cos\alpha\omega\, d\omega$$

$$A_0(\omega) = -\frac{2k}{\pi \operatorname{ch}\omega H} \int_0^{\infty} f(\beta) \cos\omega\beta\, d\beta$$

где $f(x)$ — уравнение свободной поверхности при $t = 0$.

Поступила 30 I 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. О динамике грунтовых вод при поливах. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
2. Галин Л. А. Некоторые задачи неустановившегося движения грунтовых вод. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
3. Кочина Н. Н. Плоская задача о растекании бугра грунтовых вод в слое бесконечной глубины. ПММ, т. XV, вып. 6, 1951.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. I. ОГИЗ, 1948.