Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С. Н. Шиманов

(Свердловск)

1. В работе [1] И. Г. Малкина рассмотрен вопрос об устойчивости тривиального решения $x = y = 0$ системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = h(x)\,x + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx + cy \tag{1.1}$$

где a, b, c — постоянные; функция $h(x)\,x$ непрерывна при всех значениях ее аргумента и такова, что обеспечена единственность решения в каждой точке плоскости. Им было показано, что если выполнены условия

$$h(x) + c < 0, \qquad h(x)\,c - ab > 0 \tag{1.2}$$

то тривиальное решение $x = y = 0$ системы (1.1) будет асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

При этом предполагалось, что функция $h(x)$ удовлетворяет дополнительному ограничению. А именно, предполагалось, что

$$h(x)\,c - ab > \varepsilon \qquad \text{при } |x| > \eta \tag{1.3}$$

где ε — положительное сколь угодно малое число, а η — достаточно большое число.

Условия (1.2) представляют собой условия Рауза-Гурвица, если функцию $h(x)$ рассматривать как постоянную величину.

Когда $h(x) = \mathrm{const}$, условий (1.2) достаточно для асимптотической устойчивости решения $x = y = 0$.

Когда же $h(x)$ — функция от x, для сохранения асимптотической устойчивости решения $x = y = 0$ надо ввести дополнительное условие (1.2) или, как показал Н. П. Еругин в работе [2], надо ввести более слабое условие

$$\int_0^x [h(x)\,c - ab]\,x\,dx \to \infty \qquad \text{при } |x| \to \infty \tag{1.4}$$

Н. П. Еругин также показал, что функцию $h(x)$ можно освободить от требования, обеспечивающего единственность решения в каждой точке плоскости.

Е. А. Барбашин в работе [3] рассмотрел вопрос об асимптотической устойчивости при любых начальных возмущениях решения $x = 0$ нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка вида

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\,\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = 0$$

где a — постоянная, функции f и φ непрерывны, а f имеет непрерывную производную при всех значениях аргументов.

В настоящей заметке рассматривается аналогичный вопрос для уравнения третьего порядка вида

$$\frac{d^3x}{dt^3} + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + b\,\frac{dx}{dt} + cx = 0 \tag{1.5}$$

где b, c — постоянные, функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по x при всех значениях ее аргументов. Так же как и в работе [3], здесь строится функция Ляпунова по методу И. Г. Малкина [1].

2. *Теорема*. Если $b > 0$, $c > 0$, а функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$f(x, y) > \frac{c}{b} \tag{2.1}$$

$$y \frac{\partial f}{\partial x} \leqslant 0 \tag{2.2}$$

при всех значениях аргументов, то тривиальное решение уравнения (1.5) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Доказательство. Заменим уравнение (1.5) эквивалентной системой уравнений

$$\frac{dz}{dt} = -f(x, y) z - by - cx, \qquad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dx}{dt} = y \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение функцию V:

$$2V = (bz + cy)^2 + b(cx + by)^2 + J(x, y) \tag{2.4}$$

где

$$J(x,y) = c\left[2b\int_0^y f(x, y)\, y\, dy - cy^2\right]$$

Функция V определенно положительна, так как $b > 0$, $c > 0$ и $J(x, y) > 0$ в силу неравенства (2.1).

Найдем производную по времени от V; в силу (2.3)

$$\frac{dV}{dt} = -b(f(x, y)\, b - c)\, z^2 + bcy\int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}\, y\, dy \tag{2.5}$$

Очевидно, что

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad \text{при } |z| \neq 0, \qquad \frac{dV}{dt} \leqslant 0 \quad \text{при } |z| = 0 \tag{2.6}$$

Рассмотрим далее область

$$V(x, y, z) \leqslant l, \qquad |y| \leqslant N \tag{2.7}$$

где l и N — некоторые постоянные.

Эта область ограничена, так как при $|y| \leqslant N$ из первого неравенства $V \leqslant l$ следует ограниченность координат x и z точек области (2.7).

Пусть $P(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка фазового пространства. Возьмем произвольную траекторию γ системы (2.3), заданную уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и выходящую из точки P. Выберем постоянные l и N настолько большими, чтобы точка P была внутри области (2.7), т. е. чтобы имели место неравенства $V(x_0, y_0, z_0) < l$, $|y_0| < N$. Тогда все точки траектории γ будут при $t > 0$ оставаться внутри области (2.7), т. е. будут иметь место неравенства

$$V(x(t), y(t), z(t)) < l, \qquad |y(t)| < N \quad \text{при } t > 0 \tag{2.8}$$

В самом деле, если какая-нибудь точка γ покидает область (2.7), то найдется такое значение $t = T$, при котором точка $(x(T), y(T), z(T))$ будет на границе (2.7). При этом одно из неравенств (2.8) (или оба сразу) обратится в равенство. Но первое неравенство не может обратиться в равенство в силу условия (2.6), согласно которому

$$V(x(T), y(T), z(T)) \leqslant V(x_0, y_0, z_0) < l$$

Второе же неравенство могло бы обратиться в равенство лишь тогда, когда множество

$$V(x, y, z) \leqslant l, \qquad |y| = N \tag{2.9}$$

[граница (2.7)] не пустое. Но в последнем случае можно выбрать N настолько большим, что для точек (2.9) будет иметь место условие

$$zN = \frac{dy}{dt} N < 0$$

так как координата z точек (2.9) удовлетворяет неравенству

$$-N - F(x, N) \leqslant bz \leqslant -N + F(x, N)$$

$$F(x, N) = \left| \sqrt{l - J(x, N) - b(cx + bN)^2} \right|$$

где подкоренное выражение принимает положительные значения, не превосходящие $l > 0$. Согласно этому условию интегральная кривая, попавшая на множество (2.9), при $N > 0$ пересекает его в сторону убывания y, а при $N < 0$ — в сторону возрастания y. Таким образом, показано, что траектория γ расположена внутри области (2.7) при $t > 0$.

Далее, невозрастающая и неотрицательная функция $V(x(t), y(t), z(t))$ имеет определенный предел V_0 такой, что[1]

$$V(x(t), y(t), z(t)) \geqslant V_0$$

Допустим пока, что $V_0 \neq 0$. Так как область (2.7) ограничена, то существует по крайней мере одна ω-предельная точка $Q(x_1, y_1, z_1)$ траектории γ, т. е. такая точка, что можно указать последовательность чисел $t_1, \ldots, t_n$, обладающую свойством, что $\lim t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$\lim Q_n(x(t_n), y(t_n), z(t_n)) = Q(x_1, y_1, z_1) \quad \text{при } n \to \infty$$

Так как $V(x, y, z)$ является непрерывной функцией, то мы должны иметь $V(x_1, y_1, z_1) = V_0$ для любой такой ω-предельной точки.

Покажем теперь, что в любой ω-предельной точке Q производная от функции V по времени равна нулю. В самом деле, если $dV / dt < 0$ в точке Q, то все траектории, выходящие из точки Q, должны попасть при $t > 0$ в область $V < V_0$. Но известно [4], что совокупность ω-предельных точек траектории γ состоит из целых траекторий, поэтому существует среди полутраекторий, выходящих из Q, такая ω-предельная полутраектория $x = x^\circ(t)$, $y = y^\circ(t)$, $z = z^\circ(t)$, для которой

$$V(x^\circ(t), y^\circ(t), z^\circ(t)) < V_0$$

Но тогда найдется $m(t)$ такое, что при $n > m(t)$ будет иметь место условие

$$V(x(t_n + t), y(t_n + t), z(t_n + t)) < V_0$$

что противоречит выбору V_0 как нижней грани $V(x(t), y(t), z(t))$ при $t \to \infty$. Таким образом, $dV / dt = 0$ в точке Q. Так как точка Q была произвольной ω-предельной точкой траектории γ, то приходим к выводу, что совокупность всех ω-предельных точек этой траектории, состоящая из целых траекторий, расположена на плоскости $z = 0$.

Однако единственная положительная полутраектория системы (2.7), которая остается на плоскости $z = 0$, где $dV / dt \leqslant 0$, есть точка $x = y = z = 0$.

В самом деле, пусть траектория

$$x = x^*(t), \qquad y = y^*(t), \qquad z = z^*(t) \qquad \text{при } t > 0$$

расположена на плоскости $z = 0$.

Тогда $z^*(t) \equiv 0$. Но из первых двух уравнений при этом следует, что $y^*(t)$ и $z^*(t)$ постоянны. Единственное же положение равновесия системы есть точка $x = y = z = 0$.

---

[1] Повторяем соответствующие рассуждения Е. А. Барбашина из работы [3].

Таким образом, число V_0 может быть только нулем. Ясно теперь, что

$$\lim x(t) = 0, \quad \lim y(t) = 0, \quad \lim z(t) = 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим, в частности, уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3} + f\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

где $f(y)$ — непрерывная функция.

Если $b > 0$, $c > 0$, а функция $f(y)$ удовлетворяет условию

$$f(y)\,b - c > 0$$

то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Поступила 23 II 1953

Уральский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.
2. Еругин Н. П. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып, 5, 1952.
3. Барбашин Е. А. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
4. Барбашин Е. А. К теории обобщенных динамических систем. Ученые записки МГУ, вып. 135, стр. 110—134, 1949.