Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

СЛУЧАЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСКОПА

Ю. В. Линник, В. С. Новоселов

(Ленинград)

§ 1. О распределении вероятностей решения системы дифференциальных уравнений. 1. В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений, в правые части которых входят некоторые случайные функции, описывающие случайные процессы.

Случайный процесс будем понимать согласно установившейся математической терминологии [1] как вектор-функцию $u = \{u_i(v_1, \ldots, v_r)\}$ $(i = 1,\ldots,n)$ со случайными значениями, причем для любого набора аргументов $v_{1k}, \ldots, v_{rk}$ $(k = 1,\ldots,s)$ величины $u_i(v_{1k}, \ldots, v_{rk})$ образуют ns-мерную случайную величину, для которой должно быть задано ns-мерное распределение вероятностей. Будем рассматривать непрерывные процессы, для которых при близких значениях аргументов вероятность больших уклонений векторных функций мала. Позднее будет дана строгая формулировка требуемой нами непрерывности. Пусть в системе (1.1)

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i[x_j, A_k(t), t] + S_i[x_j, A_k(t), t] \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

функция $A_k(t)$ $(k = 1,\ldots,l)$ описывает l-мерный случайный процесс. Обозначая через $a_k(t)$ математическое ожидание $A_k(t)$, получим

$$A_k(t) = a_k(t) + b_k(t)$$

где математическое ожидание случайных функций $b_k(t)$ равно нулю. Далее

$$S(x_j, A_k(t), t) = \{S_i[x_j, A_k(t), t]\} \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

n-мерная случайная вектор-функция, которая при заданных значениях аргументов описывает n-мерный случайный процесс указанного выше типа. Пусть начальные данные системы (1.1) случайны и задаются некоторым совокупным распределением с плотностью вероятности

$$P\{\xi_i^\circ \leqslant x_i^\circ - y_i^\circ < \xi_i^\circ + d\xi_i^\circ\} = f(\xi_1^\circ, \ldots, \xi_n^\circ)\, d\xi^\circ$$
$$d\xi^\circ = d\xi_1^\circ\, d\xi_2^\circ \ldots d\xi_n^\circ \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

Здесь y_i° означает математическое ожидание для x_i°. Решение системы (1.1) будет некоторым n-мерным случайным процессом $x(t) = \{x_i(t)\}$ $i = 1,\ldots,n$). Задача заключается в изучении распределения вероятностей n-мерного процесса уклонений решения системы (1.1) от $y_i(t)$, где $y_i(t)$ $(i = 1,\ldots,n)$ означает решение (1.1) при

$$x_i^\circ = y_i^\circ, \qquad A_k(t) = a_k(t), \qquad S_i[x_j, A_k(t), t] = 0$$

2. Рассматривая конечный промежуток времени и предполагая, что вероятные значения $\max|b_k(t)/a_k(t)|$ и $\max|(x_i-y_i)/y_i|$ на этом промежутке малы, т. е. малы соответствующие дисперсии, можно считать

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i[x_j,\ a_k(t)]+\varphi_i(t)+S_i[x_j,\ A_k(t),\ t] \qquad (i,j=1,\ldots,n) \tag{1.2}$$

где случайные функции $\varphi_i(t)$ равны

$$\varphi_i(t)=\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{\partial X_i}{\partial A_k}\right)b_k(t) \qquad \begin{pmatrix}x_i=y_i(t)\\ A_i=a_j(t)\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Процесс, описываемый функциями $S_i[x_j,\ A_k(t),\ t]$, можно рассматривать как набор случайных поверхностей, про которые предполагаем, что с вероятностью единица они имеют ограниченные частные производные $\partial S_i/\partial x_j$ и $\partial S_i/\partial A_k$; тогда, принимая во внимание это предположение, можно ограничиться в системе (1.2) главной частью функций S_i, т. е. рассматривать систему

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i[x_j,\ a_k(t),\ t]+\varphi_i(t)+S_i(t) \qquad (i,j=1,\ldots n) \tag{1.4}$$

где

$$S_i(t)=S_i[y_j(t),\ a_k(t),\ t]$$

В силу предположения, что вероятные значеняи $\max|(x_i-y_i)/y_i|$ на рассматриваемом конечном промежутке малы, систему (1.4) можно линеаризировать; получим

$$\frac{dz_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}X_{ij}(t)\,z_j+F_i(t) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.5}$$

Здесь

$$z_i=x_i+y_i,\quad X_{ij}(t)=\left[\frac{\partial}{\partial x_j}X_i(x_s,\ a_k(t),\ t)\right]_{x_s=y_s(t)},\quad F_i(t)=\varphi_i(t)+S_i(t)$$

Как известно [2], решение системы (1.5) дается в виде

$$\begin{Vmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{Vmatrix}=Z(t)\begin{Vmatrix}z_1^\circ\\ \vdots\\ z_n^\circ\end{Vmatrix}+\int_{t_0}^{t}Z(t)\,Z^{-1}(u)\,F(u)\,du \tag{1.6}$$

где $Z(t)=\|z_{\lambda\mu}(t)\|$ $(\lambda,\mu=1,\ldots,n)$ — нормальная фундаментальная матрица решений однородной системы для (1.5), а $F(u)$ — одностолбцовая матрица с элементами $F_i(u)$.

В формуле (1.6) $F_i(t)$ представляют собой n-мерный случайный процесс; кривые, составляющие процесс, будем считать непрерывными с вероятностью единица.

Может случиться, что в качестве некоторых b_k будут служить z_i° $(i=1,\ldots,n)$, тогда вектор-функцию $\Phi(t)=\{\varphi_i(t)\}$ можно представить в виде суммы двух вектор-функций $\Phi(t)=\Phi_1(t)+\Phi_2(t)$, где $\Phi_1(t)$ не зависит от z_i°, а $\Phi_2(t)$ зависит от z_i°. Имеем

$$\Phi_2(t)=\Psi_2(t)\,z^\circ,\qquad z^\circ=\{z_i^\circ\}\qquad (i=1,\ldots,n)$$

где матрица $\Psi_2(t)$ равна

$$\Psi_2(t) = \left\| \left(\frac{\partial X_i}{\partial A_{k\rho}} \right)_{x_j,\, A_j} \right\|, \qquad A_{k\rho} = y_\rho{}^\circ + z_\rho{}^\circ \qquad \begin{pmatrix} x_j = y_j(t) \\ A_j = a_j(t) \end{pmatrix} \qquad (i,\ \rho = 1, \ldots, n)$$

Далее

$$\Phi_1(t) = \Psi_1(t)\, B(t)$$

где $B(t)$ — вектор-функция с элементами $b_s(t)$ $(s = 1, \ldots, m;\ m \leqslant l)$; матрица $\Psi_1(t)$ имеет n строчек и m столбцов и будет равна

$$\Psi_1(t) = \left\| \left(\frac{\partial X_i}{\partial A_{ks}} \right)_{x_j,\, A_j} \right\|, \qquad A_{ks} = a_s(t) + b_s(t) \qquad \begin{pmatrix} x_j = y_j(t) \\ A_j = a_j(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ s = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Решение (1.6) можно записать в виде

$$z = \int_{t_0}^{t} [Z_1(t, u)\, B(u) + Z_2(t, u)\, S(u) + Z_3(t, u)\, z^\circ]\, du \tag{1.7}$$

где

$$z = \{z_i(t)\} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$Z_1(t, u) = Z(t)\, Z^{-1}(u)\, \Psi_1(u), \qquad Z_2(t, u) = Z(t)\, Z^{-1}(u)$$

$$Z_3(t, u) = Z(t) \left[Z^{-1}(u)\, \Psi_2(u) + \frac{1}{t - t_0} I \right]$$

Здесь I — единичная матрица.

Будем считать процессы $B(t)$, $S(t)$ и z° статистически независимыми, а процессы $B(t)$ и $S(t)$ кроме того и вероятностно установившимися (стационарными по А. Я. Хинчину [1]). Процесс $Q = \{q_\mu(t)\}$ $(\mu = 1, \ldots, s)$ называется стационарным, если корреляционная матрица процесса

$$r = \| r_{\mu\nu} \|, \qquad r_{\mu\nu} = E\,[q_\mu(t + \tau)\, q_\nu(t)] \qquad (\mu,\ \nu = 1, \ldots, s)$$

где E означает математическое ожидание, не зависит от t. Будем считать корреляционные матрицы непрерывными, что обеспечит в данном случае непрерывность процессов. В этих предположениях формула (1.7) позволяет изучить распределение вероятности n-мерного процесса $z = \{z_i(t)\}$ по известным процессам $B(t)$, $S(t)$ и z°.

Следует заметить, что все наши рассуждения будут легко обобщаться на тот случай, когда вероятностно неустановившийся процесс $S(t)$ представлен в виде произведения некоторой матрицы, зависящей от времени, на процесс, вероятностно установившийся.

3. Для определения вероятностных характеристик искомого процесса вычислим его корреляционную матрицу. Употребляя обозначения И. А. Лаппо-Данилевского [3], получим

$$R_{\mu\nu}(t, \tau) = E \Big[\int_{t_0}^{t+\tau} \{ Z_1(t + \tau, u_1)\, B(u_1) + Z_2(t + \tau, u_1)\, S(u_1) +$$

$$+ Z_3(t + \tau, u_1)\, z^\circ \}_\mu\, du_1 \int_{t_0}^{t} \{ Z_1(t, u_2)\, B(u_2) + Z_2(t, u_2)\, S(u_2) + Z_3(t, u_2)\, z^\circ \}_\nu\, du_2 \Big]$$

В силу статистической независимости процессов $B(t)$, $S(t)$ и z° имеем

$$R_{\mu\nu}(t,\tau)=E\Big[\int\limits_{t_0}^{t+\tau}\{Z_1(t+\tau,u_1)B(u_1)\}_\mu du_1\int\limits_{t_0}^{t}\{Z_1(t,u_2)B(u_2)\}_\nu du_2\Big]+$$
$$+E\Big[\int\limits_{t_0}^{t+\tau}\{Z_2(t+\tau,u_1)S(u_1)\}_\mu du_1\int\limits_{t_0}^{t}\{Z_2(t,u_2)S(u_2)\}_\nu du_2\Big]+$$
$$+E\Big[\int\limits_{t_0}^{t+\tau}\{Z_3(t+\tau,u_1)z^\circ\}_\mu du_1\int\limits_{t_0}^{t}\{Z_3(t,u_2)z^\circ\}_\nu du_2\Big]$$

Обозначим элементы корреляционных матриц для процессов $B(t)$, $S(t)$ и z° соответственно r^1_{ij}, r^2_{ij} и r^3_{ij}. Так как процессы $B(t)$ и $S(t)$ предполагаются вероятностно установившимися (стационарными), то будем иметь

$$r^1_{ij}(u_1-u_2)=E[b_i(u_1)b_j(u_2)] \qquad (i,j=1,\ldots,m)$$
$$r^2_{ij}(u_1-u_2)=E[S_i(u_1)S_j(u_2)] \qquad (i,j=1,\ldots,n)$$

Величины r^3_{ij} будут постоянными. Тогда для корреляционной матрицы искомого процесса получим выражение

$$R(t,\tau)=\int\limits_{t_0}^{t+\tau}du_1\int\limits_{t_0}^{t}[Z_1(t+\tau,u_1)r_1(u_1-u_2)Z_1^*(t,u_2)+ \tag{1.8}$$
$$+Z_2(t+\tau,u_1)r_2(u_1-u_2)Z_2^*(t,u_2)+Z_3(t+\tau,u_1)r_3Z_3^*(t,u_2)]\,du_2$$

где $r_s=\|r^s_{ij}\|$, а Z_s^* обозначает сопряженную матрицу для Z_s.

Будем считать входные процессы $B(t)$, $S(t)$ и z° гауссовыми, тогда и $\{z_i(t)\}$ будет процессом Гаусса, причем корреляционная матрица $R(t,\tau)$ его полностью описывает. Действительно, пусть требуется получить распределение вероятностей процесса $z=\{z_i(t)\}$ $(i=1,\ldots,n)$ в моменты времени $t_1<t_2<\ldots<t_r$. Это дает rn-мерный вектор

$$\begin{matrix} z_1(t_1), & z_1(t_2),\ldots,z_1(t_r)\\ z_2(t_1), & z_2(t_2),\ldots,z_2(t_r)\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ z_n(t_1) & z_n(t_2),\ldots,z_n(t_r)\end{matrix}$$

При помощи корреляционной матрицы $R(t,\tau)$ можно построить корреляционную матрицу для этого rn-мерного вектора. Имеем

$$E[z_i(t_\alpha)z_j(t_\beta)]=E[z_i(t_\alpha-t_\beta+t_\beta)z_j(t_\beta)]=R_{ij}(t_\beta,\ t_\alpha-t_\beta)$$

Отсюда получается корреляционная матрица

$$\Lambda=\|\Lambda_{ij}\| \qquad (i,j=1,\ldots,rn)$$

для рассматриваемого rn-мерного вектора и плотность его распределения

$$f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{rn})=[2^{rn}\pi^{rn}D(\Lambda)]^{-1/2}\exp\Big(-\frac{1}{2D(\Lambda)}\sum_{i,j=1}^{rn}\Delta_{ij}\xi_i\xi_j\Big) \tag{1.9}$$

где $D(\Lambda)$ — определитель матрицы Λ, а Δ_{ij} — алгебраические дополнения ее элементов. При $r=1$ и $t_1=t$ имеем n-мерную плотность распределения вероятностей для $z=\{z_i(t)\}$ в данный момент.

Замечание 1. Если процесс $S(t)$ полностью разрывной, т. е. представляет собой бесконечно частые независимые воздействия, и если дисперсия ограничена, то корреляционная матрица для этого процесса существует и отлична от нуля только при нулевом аргументе; тогда

$$\int_{t_0}^{t+\tau} du_1 \int_{t_0}^{t} Z_2(t+\tau, u_1)\, r_2(u_1-u_2)\, Z_2^*(t, u_2)\, du_2 = 0$$

Такие случайные возмущения не сказываются на решении. Однако подобные возмущения могут оказать влияние при бесконечной дисперсии.

Замечание 2. Для того чтобы процесс $z(t)$ был вероятностно установившимся, необходимо и достаточно, чтобы $\partial R(t, \tau) / \partial t = 0$.

4. Почти во всех случаях исследования корреляционные функции не определяются чисто теоретическим путем, а должны быть выведены из экспериментальных данных по предварительной графической записи случайных воздействий. Здесь возможно применение способов, разработанных для исследования случайных шумов в радиотехнике [4].

Если случайная «сила» экспериментально записана в виде $S_i(t)$ для достаточно большого промежутка $[t_0, T]$, то величины

$$\frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T} S_\mu(t+\tau)\, S_\nu(t)\, dt$$

будут согласно эргодической теореме близки к $r_{\mu\nu}(\tau)$. Эргодическая теорема справедлива при некоторых общих ограничениях, на которых мы не останавливаемся.

§ 2. Вероятности уклонения движения гироскопа от регулярной прецессии. 1. Пусть θ — угол нутации, ψ — угол прецессии, φ — угол собственного вращения гироскопа, тогда кинетическая энергия последнего равна

$$T = \frac{1}{2}\left[A(\dot\theta^2 + \dot\psi^2 \sin^2\theta) + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2\right]$$

где A и C — моменты инерции гироскопа. Отсюда уравнения Лагранжа для гироскопа при действии случайных сил имеют вид:

$$\begin{gathered}
A\ddot\theta - A\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\,\dot\psi\sin\theta = mgl\sin\theta + M_\theta \\
\frac{d}{dt}\left[A\dot\psi\sin^2\theta + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\cos\theta\right] = M_\psi \\
C\frac{d}{dt}(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = M_\varphi
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где моменты M_θ, M_ψ и M_φ являются случайными функциями и пусть зависят только от переменных θ, $\dot\theta$, $\dot\psi$, $\dot\varphi$, t. В уравнениях (2.1) m — масса гироскопа, l — расстояние центра тяжести от неподвижной точки.

Систему (2.1) преобразуем к виду

$$\begin{gathered}
\ddot\theta = \dot\psi^2\sin\theta\cos\theta - \frac{C}{A}(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\,\dot\psi\sin\theta + \frac{mgl}{A}\sin\theta + \frac{M_\theta}{A} \\
\ddot\psi = \frac{C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\cos\theta - 2A\cos\theta\,\dot\psi\dot\theta}{A\sin\theta} + \frac{M_\psi}{A\sin^2\theta} \\
\frac{d}{dt}(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = \frac{M_\varphi}{C}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Система (2.2) при начальных данных θ_0, $\dot\theta_0 = 0$, $\dot\psi_0$, $\dot\varphi_0$, удовлетворяющих условию

$$(A - C)\,\dot\psi_0^2 \cos\theta_0 - C\dot\varphi_0\dot\psi_0 + mgl = 0 \tag{2.3}$$

и при $M_\theta = M_\psi = M_\varphi = 0$ имеет единственное решение:

$$\theta = \theta_0, \qquad \dot\psi = \dot\psi_0, \qquad \dot\varphi = \dot\varphi_0 \tag{2.4}$$

Мы исключили лишь случай $\sin\theta_0 = 0$. Решение (2.4) носит название регулярной прецессии гироскопа, а (2.3) называется условием регулярной прецессии. Пусть характеристики гироскопа равны

$$A = A_{\text{ср}} + b_1, \qquad C = C_{\text{ср}} + b_2, \qquad ml = (ml)_{\text{ср}} + b_3$$

где величины b_i случайны, независимы и задаются законом Гаусса

$$P(\alpha_i \leqslant b_i < \alpha_i + d\alpha_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} \exp\left(-\frac{\alpha_i^2}{2\sigma_i^2}\right) d\alpha_i{}^\circ$$

Начальные данные при $t = 0$ также случайны, независимы и равны

$$\theta_0 + z_1{}^\circ, \qquad \dot\theta_0 + z_2{}^\circ, \qquad \dot\theta_0 = 0, \qquad \dot\psi_0 + z_3{}^\circ, \qquad \dot\varphi_0 + z_4{}^\circ$$

для $z_i{}^\circ$ задана плотность вероятностей также в виде закона Гаусса

$$P(\xi_i \leqslant z_i{}^\circ < \xi_i{}^\circ + d\xi_i{}^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta_i} \exp\left(-\frac{\xi_i{}^{\circ 2}}{2\sigma_i^2}\right) d\xi_i{}^\circ$$

Будем предполагать выполнение условия регулярной прецессии для средних значений величин, т. е.

$$(A_{\text{ср}} - C_{\text{ср}})\,\dot\psi_0^2 \cos\theta_0 - C_{\text{ср}}\,\dot\varphi_0\dot\psi_0 + (ml)_{\text{ср}}\, g = 0 \tag{2.5}$$

Предположим далее, что $M_\varphi = 0$. Изучим в этом случае вероятности уклонения движения гироскопа от регулярной прецессии.

2. Систему (2.2) можно записать в виде:

$$\ddot\theta = \dot\psi^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{C_{\text{ср}} + b_2}{A_{\text{ср}} + b_1}\,[\dot\varphi_0 + z_4{}^\circ + (\dot\psi_0 + z_3{}^\circ)\cos(\theta_0 + z_1{}^\circ)]\,\dot\psi\sin\theta + {}$$
$$+ \frac{[(ml)_{\text{ср}} + b_3]g}{A_{\text{ср}} + b_1}\sin\theta + \frac{M_\theta}{A_{\text{ср}} + b_1}$$

$$\ddot\psi = \frac{(C_{\text{ср}} + b_2)\,[\dot\varphi_0 + z_3{}^\circ + (\dot\psi_0 + z_3{}^\circ)\cos(\theta_0 + z_1{}^\circ)]\,\dot\theta - 2\,(A_{\text{ср}} + b_1)\cos\theta\,\dot\psi\dot\theta}{(A_{\text{ср}} + b_1)\sin\theta} + {}$$
$$+ \frac{M_\psi}{(A_{\text{ср}} + b_1)\sin^2\theta}$$

Полагая $\theta = x_1$, $\dot\theta = x_2$, $\dot\psi = x_3$, получим и $F_1 = 0$

$$F_2 = \left[\frac{C_{\text{ср}}}{A_{\text{ср}}^2}(\dot\varphi_0 + \dot\psi_0\cos\theta_0)\,\dot\psi_0\sin\theta_0 - \frac{(ml)_{\text{ср}}g}{A_{\text{ср}}^2}\right] b_1 -$$
$$- \frac{1}{A_{\text{ср}}}(\dot\varphi_0 + \dot\psi_0\cos\theta_0)\,\dot\psi_0\sin\theta_0 b_3 + \frac{g}{A_{\text{ср}}}\sin\theta_0 b_3 +$$
$$+ \frac{C_{\text{ср}}}{A_{\text{ср}}}\dot\psi_0^2\sin^2\theta_0 z_1{}^\circ - \frac{C_{\text{ср}}}{A_{\text{ср}}}\dot\psi_0\sin\theta_0\cos\theta_0 z_3{}^\circ - \frac{C_{\text{ср}}}{A_{\text{ср}}}\dot\psi_0\sin\theta_0 z_4{}^\circ + S_2(t)$$

где

$$S_2(t) = \frac{M_\theta(t, \theta_0, \dot\psi_0, \dot\varphi_0)}{A_{\text{ср}}}$$

Или в новых обозначениях

$$F_2 = g_1 b_1 + g_2 b_2 + g_4 z_1{}^\circ + g_5 z_3{}^\circ + g_6 z_4{}^\circ + S_2(t)$$

Далее имеем

$$F_3 = S_3(t), \qquad S_3(t) = \frac{M_\psi(t, \theta_0, \psi_0, \varphi_0)}{A_{\text{ср}} \sin^2\theta_0}$$

Вычисляя $\{X_{ij}\}$, находим

$$X_{11} = 0, \qquad X_{12} = 1, \qquad X_{13} = 0$$

$$X_{21} = -\psi_0{}^2 \sin^2\theta_0, \qquad X_{22} = 0, \qquad X_{23} = 2\dot\psi_0 \sin\theta_0 \cos\theta_0 - \frac{C_{\text{ср}}}{A_{\text{ср}}}(\dot\varphi_0 + \dot\psi_0 \cos\theta_0) \sin\theta_0$$

$$X_{31} = 0, \qquad X_{32} = \frac{C_{\text{ср}}(\dot\varphi_0 + \dot\psi_0 \cos\theta_0) - 2A_{\text{ср}} \cos\theta_0 \dot\psi_0}{A_{\text{ср}} \sin\theta_0}, \qquad X_{33} = 0$$

При этом, вычисляя X_{21}, следует учесть условия (2.5).

Линейные уравнения (1.4) для нашего случая будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= az_1 + cz_3 + F_2(t) \\ \frac{dz_3}{dt} &= b z_2 + F_3(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

где положено $a = X_{21}$, $b = X_{22}$ и $c = X_{23}$. Характеристическое уравнение системы (2.6) имеет корни

$$0, \qquad \pm ik, \qquad i = \sqrt{-1}, \qquad k = \sqrt{-(a + bc)}$$

$$k = \sqrt{\dot\psi_0{}^2 \sin^2\theta_0 + \left[\frac{C_{\text{ср}}}{A_{\text{ср}}}(\dot\varphi_0 + \dot\psi_0 \cos\theta_0) - 2\dot\psi_0 \cos\theta_0\right]^2}$$

Нормальная фундаментальная матрица

$$Z = Z(t)$$

решений однородной системы найдется в виде

$$Z = \left\| \begin{matrix} \dfrac{bc + a\cos kt}{a + bc} & \dfrac{1}{k}\sin kt & -\dfrac{c(1 - \cos kt)}{a + bc} \\ -\dfrac{ak \sin kt}{a + bc} & \cos kt & -\dfrac{ck \sin kt}{a + bc} \\ -\dfrac{ab(1 - \cos kt)}{a + bc} & \dfrac{b}{k}\sin kt & \dfrac{a + bc\cos kt}{a + bc} \end{matrix} \right\|$$

Обратная матрица $Z^{-1} = Z^{-1}(t)$ имеет вид:

$$Z^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{bc + a\cos kt}{a + bc} & -\frac{1}{k}\sin kt & -\frac{c(1-\cos kt)}{a+bc} \\ \frac{ak}{a+bc}\sin kt & \cos kt & \frac{ck}{a+bc}\sin kt \\ -\frac{ab}{a+bc}(1-\cos kt) & -\frac{b}{k}\sin kt & \frac{a+bc\cos kt}{a+bc} \end{Vmatrix}$$

Легко убедиться, что

$$Z_2(t, u) = Z(t)\, Z^{-1}(u) = Z(t-u)$$

Далее мы имеем

$$\Psi_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Vmatrix}, \qquad b_4 = z_4^\circ$$

$$r^1 = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{Vmatrix}, \qquad \Psi = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g_4 & 0 & g_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$S = \begin{Vmatrix} 0 \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{Vmatrix}, \qquad z^\circ = \begin{Vmatrix} z_1^\circ \\ z_2^\circ \\ z_3^\circ \end{Vmatrix}, \qquad r^3 = \begin{Vmatrix} \delta_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3^2 \end{Vmatrix}$$

Корреляционная матрица r^2 также предполагается известной, она может быть определена опытным путем, как указывалось в § 1. Будем иметь

$$r^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22}^2(u_1 - u_2) & r_{23}^2(u_1 - u_2) \\ 0 & r_{23}^2(u_1 - u_2) & r_{33}^2(u_1 - u_2) \end{Vmatrix}$$

Отсюда легко вычисляются $Z_1(t, u)$ и $Z_3(t, u)$ и по формуле (1.8) рассчитывается корреляционная матрица искомого процесса; тогда (1.9) дает плотность распределения вероятностей для уклонения движения гироскопа от регулярной прецессии.

Поступила 26 I 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинчин А. Я. Теория корреляции стационарных стохастических процессов. Успехи математ. наук, вып. 5, 1938.
2. Немыцкий В. В. и Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГТТИ, 1949.
3. Лаппо-Данилевский И. А. Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений. Ленинград, 1934.
4. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. Успехи матем. наук, т. VII, вып. 5, 1951.