Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ НЕПРЕРЫВНОГО ТОЧЕЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОТРЕЗКА НА САМОГО СЕБЯ, ИМЕЮЩИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

З. Л. Лейбензон
(Киев)

§ 1. Постановка задачи. Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ такая, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$; требуется исследовать поведение последовательности x_n при $n \to \infty$, определяемой рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (0 \leqslant x_0 \leqslant 1) \tag{1.1}$$

Здесь x_0 — первый член последовательности[1] x_n. Будем говорить, что x_n есть вырожденная последовательность, если $x_n = x_{n+1}$ для достаточно больших n. В дальнейшем будем обозначать через z предел последовательности x_n, если он существует, т. е. $z = \lim x_n$ при $n \to \infty$.

Если же предел x_n при $n \to \infty$ не существует, то через l и L будем обозначать нижний и верхний пределы последовательности x_n. Обозначив для краткости $f_2(x) = f[f(x)]$, отметим, что $f(l),\ f_2(l), \ldots, f(L),\ f_2(L), \ldots$ являются предельными точками последовательности x_n и поэтому

$$l \leqslant f(l), f_2(l), \ldots, f(L), f_2(L), \ldots \leqslant L \tag{1.2}$$

Действительно, существует такая подпоследовательность x_{n_i}, что $\lim x_{n_i} = l$ при $i \to \infty$; тогда $\lim x_{n_i+1} = f(l)$ и т. д.

Отметим лемму о монотонности, доказательство которой очевидно.

Лемма. Если $f(x)$ есть неубывающая функция на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и $a \leqslant f(a) \leqslant f(b) \leqslant b$, то для $a \leqslant x_0 \leqslant b$ последовательность x_n монотонно сходится к пределу.

§ 2. Неподвижные точки. Точка z $(0 \leqslant z \leqslant 1)$ называется неподвижной, если $f(z) = z$. Геометрически неподвижные точки соответствуют точкам пересечения графика функции $y = f(x)$ с биссектрисой $y = x$ координатного угла. Если $\lim x_n = z$ при $n \to \infty$, то $f(z) = \lim x_{n+1} = z$ при $n \to \infty$, т. е. z есть неподвижная точка. Как известно [4], неподвижная точка z называется притягивающей, если $|f'(z)| < 1$, или отталкивающей, если $|f'(z)| > 1$.

---

[1] Понятие последовательности x_n в известном смысле аналогично понятию динамической системы [1]. Следует указать, что итерационные процессы исследовались в ином направлении в работах Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова[2] и А. Пуанкаре[3].

Если x близко к неподвижной точке z, то

$$\frac{f(x)-z}{x-z} \approx f'(z)$$

Поэтому, если x_n достаточно близко к z, то в случае отталкивающей точки z

$$|x_{n+1}-z| = |f(x_n)-z| \geqslant (|f'(z)|-\varepsilon)|x_n-z| \qquad (|f'(z)|-\varepsilon>1)$$

и в случае притягивающей точки z

$$|x_{n+1}-z| \leqslant (|f'(z)|+\varepsilon)|x_n-z| \qquad (|f'(z)|+\varepsilon<1)$$

В силу последнего соотношения получается следующее правило для исследования сходимости последовательности x_n.

1. Если z есть притягивающая неподвижная точка $(|f'(z)|<1)$, то для достаточно близких к z значений x_0 последовательность x_n сходится к z. Быстрота сходимости определяется членом геометрической прогрессии со знаменателем, сколь угодно близким к $|f'(z)|$.

Если z есть отталкивающая неподвижная точка, то $\lim x_n = z$ при $n\to\infty$ будет возможно только тогда, когда последовательность x_n вырожденная; если для некоторой последовательности x_n при каком-то n_0 x_{n_0} достаточно близко к z, то $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots$ удаляются от z до тех пор, пока не станет $|x_{n_0+k}-z|>c$, где c зависит только от z.

Если же, кроме того, $f'(z)<-1$ и для некоторой последовательности x_n при каком-то n_0 x_{n_0} близко к z, то $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots$ колеблется вокруг z, одновременно удаляясь от z до тех пор, пока не будет $x_{n_0+k}<z-c$, $x_{n_0+k+1}>z+c$, где c зависит только от z.

Из последнего замечания следует, что если неподвижная точка z есть предельная точка последовательности x_n и $f'(z)<-1$, то по обе стороны от точки z существуют предельные точки последовательности x_n. Отсюда, в частности, получаем следующее утверждение.

2. Если верхний предел L последовательности x_n есть неподвижная точка, то $f'(L)\geqslant -1$.

Теорема 1. Если последовательность x_n не сходится, то отрезок $l<z<L$ содержит неподвижную точку.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Тогда $f(x)-x$ сохраняет знак на отрезке $l<x<L$, например, $f(x)<x$ для $l<x<L$. Отсюда следует, что $f(l)\leqslant l$.

Присоединяя неравенство (1.2), получаем, что $f(l)=l$. Далее $f'(l)\neq 0$, так как в противном случае неподвижная точка l была бы притягивающей и последовательность x_n не расходилась бы, а сходилась к l. Отсюда вытекает, что $f_2'(l)=f'^2(l)>0$.

Таким образом, при достаточно малых приращениях аргумента приращение функции $f_2(x)$ имеет тот же знак, что и приращение аргумента. Отсюда и из непрерывности функции $f(x)$ следует существование такого числа $\varepsilon>0$, что

$$f_2(x)<l, \qquad f(x)<\tfrac{1}{2}(l+L) \qquad \text{при} \quad l-\varepsilon\leqslant x<l \tag{2.1}$$

В силу того, что l есть нижний предел последовательности x_n, существует такое N, что

$$x_n \geqslant l - \varepsilon \quad \text{при } n \geqslant N \tag{2.2}$$

Если бы при каком-то $n_0 \geqslant N$ оказалось, что x_{n_0} меньше, чем l, то согласно (2.1) и (2.2) вся последовательность

$$x_{n_0}, \quad x_{n_0+2} = f_2(x_{n_0}), \quad x_{n_0+4} = f_2(x_{n_0+2}), \ldots$$

не могла бы выйти из отрезка $[l - \varepsilon, l]$ и, кроме того, согласно (2.1) все члены последовательности

$$x_{n_0+1} = f(x_{n_0}), \quad x_{n_0+3} = f(x_{n_0+2}), \ldots$$

были бы меньше $\frac{1}{2}(l + L)$. Таким образом,

$$x_n < \frac{1}{2}(l + L) \qquad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$$

что противоречит тому, что L есть верхний предел последовательности x_n.

Наконец, если все члены последовательности $x_n > l$ при $n > N$, то в силу того что $f(x) < x$, будет иметь место неравенство

$$l < x_{n+1} = f(x_n) < x_n$$

Таким образом, последовательность x_n будет монотонно сходящейся, что противоречит условию теоремы.

Укажем еще одно утверждение, которое понадобится в дальнейшем.

3. Если z есть неподвижная отталкивающая точка, т. е. $|f'(z)| > 1$, то

$$f_2(z') < z' \quad \text{для } z' \lessgtr z, \qquad f_2(z') > z' \quad \text{для } z' \gtrless z \tag{2.3}$$

Для доказательства достаточно заметить, что производная функции $f_2(x) - x$ в точке z равна $f'^2(z) - 1 > 0$ и $f_2(z) - z = 0$.

§ 3. Сопряженная пара точек. Пару точек z_1 и z_2 назовем сопряженной парой точек, если

$$f(z_1) = z_2, \qquad f(z_2) = z_1 \qquad (z_1 \neq z_2) \tag{3.1}$$

Сопряженной паре точек соответствуют две точки графика функции $y = f(x)$, симметрично расположенные относительно биссектрисы $y = x$ координатного угла.

Точки z_1 и $f(z_1)$ образуют сопряженную пару точек тогда и только тогда, когда $f_2(z_1) = z_1$ и $f(z_1) \neq z_1$, т. е. когда z_1 есть неподвижная точка для функции f_2 и не является неподвижной точкой функции f.

Рассматривая поведение последовательности x_n в окрестности сопряженной пары точек, совершенно аналогично неподвижным точкам можно ввести понятие притягивающей или отталкивающей сопряженной пары точек. В частности, имеем лемму.

Лемма 1. Пусть $|f'(z_1)||f'(z_2)| < 1$, где z_1 и z_2 — сопряженная пара точек. Если x_0 достаточно близко к z_1 или z_2, то последовательность x_n при $n \to \infty$ колеблется, неограниченно приближаясь попеременно к z_1 и z_2.

Дальше в этом параграфе будем предполагать, что всякая неподвижная точка z является отталкивающей, т. е. $|f'(z)|>1$.

Любая невырожденная последовательность x_n расходится, так как согласно правилу она могла бы сходиться только к не отталкивающей неподвижной точке. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть любая неподвижная точка z является отталкивающей, т. е. $|f'(z)|>1$. Если l и L суть нижний и верхний пределы невырожденной последовательности x_n, то существует такая сопряженная пара точек z_1 и z_2, что $l \leqslant z_1$, $z_2 \leqslant L$.

Доказательство. Пусть x_n — невырожденная последовательность и L и l — верхний и нижний пределы x_n. Предположим, что теорема неверна, т. е. не существует сопряженной пары точек, заключенной между l и L.

Согласно (1.2)

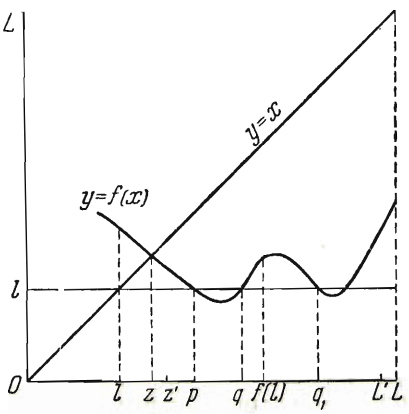
$$l \leqslant f(l), \qquad f(L) \leqslant L$$

Очевидно, что доказательство теоремы в случаях $f(L)<L$ и $f(l)>l$ можно проводить аналогично. Поэтому достаточно рассмотреть случаи $f(L)<L$ и $f(L)=L$, $f(l)=l$.

В случае $f(L)=L$, $f(l)=l$ согласно утверждению 2 § 2 и условию теоремы $f'(L)>1$. Поэтому в случае $f(L)=L$, $f(l)=l$, если $L' \lessapprox L$, т. е. L' близко к L и $L'<L$, то

$$f(L')<L', \qquad f(l) \leqslant L', \qquad f_2(L')-L' \leqslant 0 \tag{3.2}$$

Поэтому в случаях $f(L)<L$ и $f(L)=L$, $f(l)=l$ можно указать $L' \leqslant L$, удовлетворяющее неравенствам (3.2), при этом $L'=L$ в случае $f(L)<L$ [здесь неравенства (3.2) следуют из (1.2)] и $L' \lessapprox L$ в случае $f(L)=L$, $f(l)=l$.



Фиг. 1

Теперь можно рассматривать одновременно случаи $f(L)<L$ и $f(L)=L$, $f(l)=l$.

Из теоремы 1 следует, что L' можно выбрать так, чтобы на интервале $l<x<L'$ существовала неподвижная точка. Обозначим через z наибольшую среди таких неподвижных точек (фиг. 1). Так как $f(L')<L'$, то

$$f(x)<x \leqslant L \qquad \text{п} \quad z<x \leqslant L' \tag{3.3}$$

Предполагая, что теорема неверна, докажем следующую лемму, которая будет в дальнейшем многократно применяться при доказательстве теоремы от противного.

Лемма 2. Если $z<a \leqslant b \leqslant L'$ и

$$f(x) \geqslant l \qquad \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{3.4}$$

то функция $f_2(x)-x$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ не обращается в нуль и поэтому сохраняет знак.

Действительно, если $f_2(x)-x=0$ при каком-то x на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, то $x>z$ и согласно (3.3) и (3.4) $l\leqslant f(x)<x\leqslant L$. Тогда $f(x)$ и x образуют сопряженную пару точек, заключенную между l и L, но это противоречит предположению, что теорема неверна. Итак, лемма 2 доказана.

Так как $|f'(z)|>1$, то согласно (2.3)

$$f_2(z')-z'>0 \qquad \text{при } z' \not> z \tag{3.5}$$

Последнее неравенство и неравенство $f_2(L')-L'\leqslant 0$ показывают, что функция $f_2(x)-x$ на отрезке $z'\leqslant x\leqslant L'$ не сохраняет знак. Согласно лемме 2 неравенство (3.4) не выполняется в одной из точек отрезка $z'\leqslant x\leqslant L'$.

Так как $f(z)=z>l$, то существует между точками z и L' такая точка p, что $f(p)=l$ и на отрезке $z'\leqslant x\leqslant p\,(z'\not> z)$ неравенство (3.4) будет выполняться (фиг. 1).

Согласно лемме 2 разность $f_2(x)-x$ сохраняет знак на отрезке $z'\leqslant x\leqslant p$. Поэтому из неравенства (3.5) получаем, что $f_2(p)-p>0$, и так как $f(p)=l$, то $f(l)>p$. Мы получили неравенства

$$l<z<p<f(l)\leqslant L'$$

В случае $f(L)=L$, $f(l)=l$ теорема уже доказана, так как в этом случае $f(l)=l$, что противоречит доказанному неравенству $f(l)>l$.

Согласно (1.2)

$$f[f(l)]=f_2(l)\geqslant l \tag{3.6}$$

Так как $f(p)=l$, то существует такое q, что

$$p\leqslant q\leqslant f(l), \quad f(q)=l$$

и неравенство (3.4) при $q\leqslant x\leqslant f(l)$ выполняется (фиг. 1). Далее имеем

$$f_2(q)-q=f(l)-q\geqslant 0$$

и, применяя лемму 2 к отрезку $[q, f(l)]$, получаем, что

$$f_2[f(l)]-f(l)>0$$

С другой стороны

$$f_2(L')-L'\leqslant 0$$

Эти два неравенства показывают, что $f_2(x)-x$ не сохраняет знак на отрезке $f(l)\leqslant x\leqslant L'$.

Согласно лемме 2 неравенство (3.4) не выполняется в одной из точек отрезка $f(l)\leqslant x\leqslant L'$. Поэтому и в силу (3.6) существует такое q_1, что

$$f(l)\leqslant q_1\leqslant L'; \qquad f(q_1)=l$$

и неравенство (3.4) для $f(l)\leqslant x\leqslant q_1$ выполнено (фиг. 1).

Применяя лемму 2 к отрезку $[f(l), q_1]$ и пользуясь доказанным неравенством $f_2[f(l)]-f(l)>0$, получаем, что $f_2(q_1)-q_1>0$. Но, с другой стороны, $f(q_1)=l$ и $f_2(q_1)-q_1=f(l)-q_1\leqslant 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. Отсюда получаем следующий вывод. Колебание любой невырожденной последовательности не меньше минимальной разности $|z_2-z_1|$, где z_1 и z_2 образуют сопряженную пару точек.

§ 4. Специальный класс уравнений. В конкретных задачах, которые рассматриваются ниже, функция $f(x)$ обладает следующими дополнительными свойствами:

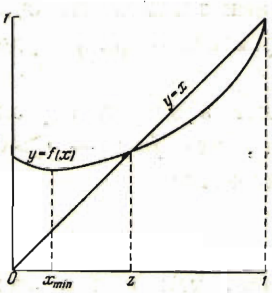
1° точка $x=1$ является неподвижной ($f(1)=1$) и $f'(1)>1$;

2° кроме $x=1$, имеется еще одна и только одна неподвижная точка z;

3° функция $f(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеет не более одной точки экстремума $x_{\min}$;

4° имеется не более чем одна сопряженная пара точек z_1 и z_2.

Предполагая, что функция $f(x)$ обладает этими четырьмя свойствами, проведем более детальное исследование поведения последовательности x_n.



Фиг. 2

Очевидно, что наибольшим значением $f(x)$ является $f(1)=1$, а наименьшим $f(x_{\min})$.

Поэтому функция $f(x)$ принимает все свои значения на отрезке $[x_{\min}, 1]$. В силу этого всегда можно считать, что в последовательности x_n первый член $x_0 \geqslant x_{\min}$.

Рассмотрим несколько возможных случаев.

1. Пусть $f'(z)>0$, т. е. функция $f(x)$ в точке z возрастает. Тогда $x_{\min} < z$.

В этом случае $f(x_{\min}) > x_{\min}$ (фиг. 2).

Таким образом, функция $f(x)$ не убывает на отрезке $x_{\min} \leqslant x \leqslant 1$ и переводит этот отрезок в самого себя:

$$x_{\min} < f(x_{\min}) \leqslant f(1) = 1$$

Применяя лемму о монотонности к этому отрезку, получаем, что любая последовательность x_n монотонно сходится к z.

2. Пусть $f'(z) < -1$. Тогда обе неподвижные точки z и 1 являются отталкивающими, и поэтому всякая невырожденная последовательность x_n является расходящейся, существует сопряженная пара точек z_1 и z_2, колебание любой невырожденной последовательности не меньше $|z_2 - z_1|$ (теорема 2).

3. Пусть $f'(z) < 0$, и если существует сопряженная пара точек z_1 и z_2, то пусть $f'(z_1) f'(z_2) > 0$.

Из условия $f'(z) < 0$ следует, что $x_{\min} > z$; условие $f'(z_1) f'(z_2) > 0$ означает, что ни одна точка из сопряженной пары не может лежать на отрезке $x_{\min} \leqslant x \leqslant 1$.

Покажем, что в этом случае имеет место неравенство

$$f[f(x_{\min})] = f_2(x_{\min}) < x_{\min} \tag{4.1}$$

Действительно, вблизи точки $x=1$, как это следует из условия 1°, которому удовлетворяет функция $f(x)$, $f_2(x) < x$.

Если бы неравенство (4.1) не выполнялось, то на отрезке $[x_{\min}, 1]$ существовала бы точка z, где $f_2(z) = z$, т. е. точка, принадлежащая сопряженной паре точек, что невозможно.

Исследуем теперь поведение последовательности x_n. Из доказанного следует, что отрезок $[f(x_{\min}), z]$ (фиг. 3) отображается функцией $f(x)$

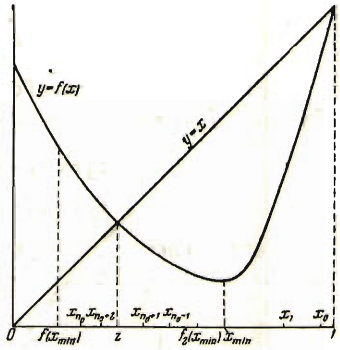
монотонно в отрезок $[z, x_{\min}]$, а отрезок $[z, x_{\min}]$, очевидно, отображается на отрезок $[f(x_{\min}), z]$.

Таким образом, как только член последовательности попадает на отрезок $[f(x_{\min}), z]$, то последующие члены последовательности будут поочередно попадать в отрезки $[z, x_{\min}]$ и $[f(x_{\min}), z]$.

С другой стороны, легко видеть, что всегда найдется такое n_0, что $x_0 > x_1 > \cdots > x_{n_0-1} > x_{n_0}$ и $x_{n_0} \leqslant z$, т. е. x_{n_0} находится на отрезке $[f(x_{\min}), z]$.

Рассмотрим функцию $f_2(x)$. На отрезке $[f(x_{\min}), z]$ она не убывает и переводит его в самого себя. В силу леммы о монотонности последовательность

$$x_{n_0},\ x_{n_0+2} = f_2(x_{n_0}),\ x_{n_0+4} = f_2(x_{n_0+2}), \ldots$$



Фиг. 3

будет монотонно сходящейся последовательностью. Рассуждая аналогично относительно отрезка $[z, x_{\min}]$, получим, что последовательность

$$x_{n_0+1},\ x_{n_0+3} = f_2(x_{n_0+1}), \ldots$$

также монотонно сходится.

Если пределы этих последовательностей одинаковы, то $\lim x_n = z$; если же эти пределы различны, то $\lim x_{2n} = z_1$ при $n \to \infty$ и $\lim x_{2n+1} = z_2$ при $n \to \infty$.

Подведем итог исследованию поведения последовательности x_n в случае, когда $f(x)$ удовлетворяет условиям 1°—4°:

1) если $f'(z) > 0$, то последовательность x_n монотонна и $\lim x_n = z$;

2) если $f'(z) < -1$, то существует сопряженная пара точек z_1 и z_2, всякая невырожденная последовательность расходится и ее колебание не меньше $|z_2 - z_1|$;

3) если $f'(z) < 0$ и $f'(z_1) f'(z_2) > 0$ для сопряженной пары точек z_1 и z_2 (если она существует), то:

а) либо последовательность x_n сходится к z, колеблясь вокруг z;

б) либо x_{2n} и x_{2n+1} монотонно сходятся к z_1 и z_2, где z_1 и z_2 образуют сопряженную пару точек.

Для проверки выполнения на примерах свойства 3° функции $f(x)$ воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3. Если $f(1) = 1$ и для любого k уравнение $f(x) = k$ имеет не более двух решений, то $f(x)$ имеет не более одной точки экстремума.

§ 5. Примеры. Рассмотрим следующие примеры уравнений в конечных разностях, которые встречаются на практике при анализе прерывных систем автоматического регулирования.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = x + c(1 - bx)(1 - x)$$

Здесь

$$x_{n+1} = x_n + c(1 - bx_n)(1 - x_n)$$

Будем предполагать, что

$$b > 1, \qquad 0 < c \leqslant 1, \qquad 1 - 2\sqrt{c} \leqslant c(b-1) \leqslant 1 + 2\sqrt{c}$$

В силу этого $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$. Здесь $f'(x) = 1 - c(1 - bx) - bc(1 - x)$. Функция $f(x)$ имеет две неподвижные точки $z = 1$ и $z = b^{-1}$, причем

$$f'(1) = 1 + c(b-1) > 1, \qquad f'(b^{-1}) = 1 - c(b-1)$$

Далее, $f(x)$ имеет не более одной точки экстремума. Сопряженные пары точек функции $f(x)$ находим из системы уравнений

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1 + c(1 - bz_1)(1 - z_1) \\ z_1 &= z_2 + c(1 - bz_2)(1 - z_2) \end{aligned} \qquad (z_1 \neq z_2)$$

Решая систему, получаем, что если $c(b-1) \leqslant 2$, то сопряженных пар точек нет. Если $c(b-1) > 2$, то существует единственная сопряженная пара точек

$$z_{1,2} = \frac{cb + c - 2 \pm \sqrt{c^2(b-1)^2 - 4}}{2bc}$$

причем

$$f'(z_1) f'(z_2) = 5 - c^2(b-1)^2$$

Таким образом, функция $f(x)$ удовлетворяет условиям § 4. Для анализа поведения последовательности воспользуемся результатом § 4.

Последовательность x_n монотонно сходится к b^{-1}, если $f'(b^{-1}) > 0$, т. е. $c(b-1) < 1$. Согласно правилу 1 § 2 быстрота сходимости определяется знаменателем $q = f'(b^{-1}) = 1 - c(b-1)$ геометрической прогрессии. Пусть $1 < c(b-1) \leqslant 2$. Тогда $f'(b^{-1}) < 0$ и не существует сопряженной пары точек. Поэтому получаем случай 3а результата § 4 и последовательность x_n при $n \to \infty$ сходится к b^{-1}, колеблясь вокруг b^{-1}.

Пусть $2 < c(b-1) < \sqrt{5}$. Тогда $f'(b^{-1}) < -1$, сопряженная пара точек z_1 и z_2 существует и $f'(z_1) f'(z_2) > 0$.

Здесь имеем случай 3б результата § 4, т. е. последовательность x_n колеблется, попеременно приближаясь к z_1 и z_2. Пусть $c(b-1) > \sqrt{5}$. Тогда $f'(b^{-1}) < -1$. На основании случая 2 результата § 4 получаем, что колебание любой невырожденной последовательности x_n не меньше

$$|z_2 - z_1| = \frac{\sqrt{c^2(b-1)^2 - 4}}{bc}$$

Пример 2. Пусть функция $f(x)$ и последовательность x_n определяются равенствами

$$f(x) = x + c(1 - bx)\left(1 - \frac{x + f(x)}{2}\right)$$

$$x_{n+1} = x_n + c(1 - bx_n)\left(1 - \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)$$

Кроме того, числа c и b предполагаем выбранными таким образом, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Для функции $f'(x)$ получаем уравнение

$$f'(x) = \frac{1 - bc\{1 - {}^1/_2[x + f(x)]\} - {}^1/_2 c(1 - bx)}{1 + {}^1/_2 c(1 - bx)}$$

Функция $f(x)$ имеет две неподвижные точки $z = 1$ и $z = b^{-1}$, причем

$$f'(1) = \frac{2 + c(b-1)}{2 - c(b-1)} > 1, \qquad f'(b^{-1}) = 1 - c(b-1)$$

Для любого k уравнение $f(x) = k$ есть квадратное уравнение относительно x и поэтому имеет не более двух решений. Согласно лемме 3 функция $f(x)$ имеет не более одной точки экстремума.

Сопряженные пары точек удовлетворяют системе уравнений:

$$z_2 - z_1 = c(1 - bz_1)\left[1 - \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)\right] \qquad (5.1)$$

$$(z_1 \neq z_2)$$

$$z_1 - z_2 = c(1 - bz_2)\left[1 - \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)\right] \qquad (5.2)$$

Из этих уравнений следует, что $z_1 \neq 1$, $z_2 \neq 1$,

$$\frac{z_2 - z_1}{1 - {}^1/_2(z_1 + z_2)} = c(1 - bz_1) = -c(1 - bz_2),$$

$$1 - bz_1 = -(1 - bz_2) \quad \text{или} \quad z_2 = \frac{2}{b} - z_1$$

Подставляя полученное выражение для z_2 в уравнение (5.1), получаем

$$(2 + c - cb)(1 - bz_1) = 0$$

Если $2 + c - cb = 0$, то, как легко видеть, $f(x)$ есть линейная функция. Исключая этот простой случай $2 + c - cb = 0$, получим $1 - bz_1 = 0$, $z_1 = z_2 = b^{-1}$.

Таким образом, сопряженная пара точек отсутствует.

Применяя результат § 4 и пользуясь отсутствием сопряженной пары точек, получаем, что в нашем примере возможны только случаи 1 и 3а поведения последовательности x_n.

Пусть $c(b - 1) < 1$, т. е. $f'(b^{-1}) > 0$. Здесь последовательность x_n при $n \to \infty$ монотонно сходится к b^{-1}.

Пусть $c(b - 1) > 1$, т. е. $f'(b^{-1}) < 0$. Здесь имеем случай 3а § 4 и последовательность x_n сходится к b^{-1}, колеблясь вокруг b^{-1}.

Пример 3. Пусть функция $f(x)$ и последовательность x_n определяются равенствами

$$\frac{f(x)}{1 - af(x)} - \frac{x}{1 - ax} = c(1 - bx)\left(1 - \frac{x + f(x)}{2}\right)$$

$$\frac{x_{n+1}}{1 - ax_{n+1}} - \frac{x_n}{1 - ax_n} = c(1 - bx_n)\left(1 - \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)$$

где $0 < a < \frac{1}{2}$, $c > 0$, $b > 1$.

Предполагаем, что a, b и c такие числа, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$. Далее,

$$f'(x) = \frac{(1 - ax)^{-2} - bc\{1 - {}^1/_2[x + f(x)]\} - {}^1/_2 c(1 - bx)}{[1 - af(x)]^{-2} + {}^1/_2 c(1 - bx)}$$

Как и в предыдущих примерах, имеются две неподвижные точки $z = 1$ и $z = b^{-1}$, причем

$$f'(1) = \frac{2 + c(1 - a)^2(b - 1)}{2 - c(1 - a)^2(b - 1)} > 1, \qquad f'\left(\frac{1}{b}\right) = 1 - c\left(1 - \frac{a}{b}\right)^2(b - 1)$$

Докажем, что $f(x)$ имеет не более одной точки экстремума.

Согласно лемме 3 достаточно доказать, что для любого числа k $(0 \leqslant k \leqslant 1)$ уравнение $f(x) = k$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеет не более двух решений.

Но $f(x) = k$ сводится к уравнению 3-й степени относительно x и сумма его корней равна

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2 - k > 3$$

Следовательно, на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеется не более двух корней. Для доказательства того, что $f(x)$ удовлетворяет условиям § 4, теперь остается проверить, что функция $f(x)$ имеет не более одной сопряженной пары точек.

Сопряженные точки определяем как решения системы уравнений

$$\frac{z_2}{1-az_2}-\frac{z_1}{1-az_1}=c(1-bz_1)\left(1-\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
$$\frac{z_1}{1-az_1}-\frac{z_2}{1-az_2}=c(1-bz_2)\left(1-\frac{z_1+z_2}{2}\right) \qquad (z_1\neq z_2)$$

Эти уравнения решаются так же, как в примере 2.

Если $c(b-1)(1-a/b)^2\leqslant 2$, то не существует сопряженной пары точек. Если же $c(b-1)(1-a/b)^2>2$, то имеется сопряженная пара точек

$$z_{1,2}=\frac{1}{b}\pm\frac{1}{a}\sqrt{\left(1-\frac{a}{b}\right)^2-\frac{2}{c(b-1)}}$$

Далее, пользуясь выражением для $f'(x)$, находим

$$f'(z_1)f'(z_2)=$$
$$=\frac{c^2(b-1)^2-\left[c(b-1)\left(1-\frac{a}{b}\right)^2-2\right]\left[2c^2(b-1)\left(\frac{b}{a}-1\right)+4c^2(b-1)^2+\frac{c}{b-1}\frac{b^2}{a^2}\right]}{c^2(b-1)^2-\left[c(b-1)\left(1-\frac{a}{b}\right)^2-2\right]\left[2c^2(b-1)\left(\frac{b}{a}-1\right)+\frac{c}{b-1}\frac{b^2}{a^2}\right]}=$$
$$=R(a,\ b,\ c)$$

Применим результат § 4. Пусть $c(1-a/b)^2(b-1)<1$.

Здесь $f'(b^{-1})>0$, т. е. имеет место случай 1 результата § 4 и последовательность x_n монотонно сходится к b^{-1}.

Пусть $1<c(1-a/b)^2(b-1)\leqslant 2$. Тогда $f'(b^{-1})<0$ и нет сопряженной пары точек. Здесь имеем случай 3 б результата § 4 и последовательность x_n сходится к b^{-1}, колеблясь вокруг b^{-1}. Пусть

$$2<c\left(1-\frac{a}{b}\right)^2(b-1), \qquad R(a,\ b,\ c)>0$$

Тогда $f'(b^{-1})<-1$, сопряженная пара точек z_1 и z_2 существует и $f'(z_1)f'(z_2)=$ $=R(a,b,c)>0$. Здесь имеем случай 3 в результата § 4. Пусть, наконец,

$$c\left(1-\frac{a}{b}\right)^2(b-1)>2, \qquad R(a,\ b,\ c)<0$$

В этом случае оценим минимум колебаний последовательности x_n. Так как $f'(b^{-1})<-1$, то на основании случая 2 результата § 4 колебание любой невырожденной последовательности x_n не меньше

$$|z_2-z_1|=\frac{2}{a}\sqrt{\left(1-\frac{a}{b}\right)^2-\frac{2}{c(b-1)}}$$

Поступила 11 VI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений, стр. 346—348. Гостехиздат, 1949.
2. Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М. Записки кафедри математичноï фiзики, т. II, стр. 191—200. Изд. АН УССР, 1937.
3. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, 1947.
4. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного, стр. 127. Гостехиздат, 1948.