Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ЛЮБЫХ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

§ 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + a_{12}y + a_{13}z$$
$$\frac{dy}{dt} = f_2(x) + a_{22}y + a_{23}z \qquad (1.1)$$
$$\frac{dz}{dt} = f_3(x) + a_{32}y + a_{33}z$$

где a_{ij} — постоянные $(i = 1, 2, 3;\ j = 2, 3)$, функции $f_i(x)$ непрерывны и $f_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Кроме того, предполагается [1], что выполнены условия единственности решения в точке равновесия $x = y = z = 0$. Для этого достаточно, например, потребовать, чтобы в как угодно малой окрестности точки $x = 0$ функции $f_i(x)$ удовлетворяли условию $|f_i(x)| < M|x|$, где M — постоянная [1].

Цель настоящей работы — указать достаточные условия, которые следует наложить на функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ для того, чтобы решение $x = y = z = 0$ системы (1.1) было асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

Очевидно, интерес представляет лишь рассмотрение случая, когда $a_{12} \neq 0$ или $a_{13} \neq 0$.

Если $a_{12} = a_{13} = 0$, то для асимптотической устойчивости в большом решения $x = y = z = 0$ достаточно выполнения неравенств

$$xf_1(x) < 0 \qquad \text{при } x \neq 0, \qquad (1.2)$$
$$a_{22} + a_{33} < 0, \quad a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > 0$$

аналогичных условиям Рауза-Гурвица для случая, когда система (1.1) линейна. Асимптотическая устойчивость в большом следует в этом случае непосредственно из вида общего решения, которое здесь очевидно. Итак, в дальнейшем предполагается $a_{12} \neq 0$ или $a_{13} \neq 0$.

Пусть для определенности $a_{12} \neq 0$. Отметим еще следующее.

---

[1] На возможность сформулировать приведенные в статье результаты, не налагая на функции $f_i(x)$ дополнительных ограничений, обеспечивающих единственность решений системы (1.1) при всех начальных данных, мне указал Н. П. Еругин.

Так как нас интересуют лишь случаи, когда система (1.1) обладает единственной точкой равновесия $x = y = z = 0$, то мы исключаем из рассмотрения возможность

$$\Delta_{11} = 0, \quad \Delta_{21} = 0, \quad \Delta_{31} = 0 \tag{1.3}$$

где

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

Действительно, при условиях (1.3) систему (1.1) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x) + a_{12}y + a_{13}z \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x) + (a_{12}y + a_{13}z)\,n_1 \\ \frac{dz}{dt} &= f_3(x) + (a_{12}y + a_{13}z)\,n_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

где n_1, n_2 — соответствующим образом подобранные постоянные. Однако непосредственно видно, что в таком случае всякая точка, лежащая на прямой $x = 0$, $a_{12}y + a_{13}z = 0$, будет для системы (1.5), а следовательно, и для системы (1.1) точкой равновесия. В дальнейшем принимаем для определенности

$$\Delta_{21} \neq 0 \tag{1.6}$$

Рассмотрим отдельно два случая:

$$\frac{a_{12}}{a_{13}} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{31}} \qquad \text{(первый случай)} \tag{1.7}$$

$$\frac{a_{12}}{a_{13}} \neq \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{31}} \qquad \text{(второй случай)} \tag{1.8}$$

§ 2. Рассмотрим первый случай.

Теорема 1. Пусть выполняется условие (1.7) и коэффициенты уравнения

$$-\begin{vmatrix} \dfrac{f_1(x)}{x} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ \dfrac{f_2(x)}{x} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ \dfrac{f_3(x)}{x} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x) = 0 \tag{2.1}$$

при всех $x \neq 0$ удовлетворяют неравенствам

$$a(x) > 0, \quad a(x)\,b(x) - c(x) > 0, \quad c(x) > 0 \tag{2.2}$$

аналогичным условиям Рауза-Гурвица в линейном случае.

Тогда для того чтобы решение $x = y = z = 0$ системы (1.1) было асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\varliminf \left[x \left(-a(x) + \frac{\Delta_{21}}{a_{12}} \right) \operatorname{sign} x - \int_0^x xc(x)\,dx \right] = -\infty \qquad \text{при } x \to \pm\infty \tag{2.3}$$

Доказательство. Сделаем предварительно следующее замечание. При любом неособом линейном преобразовании вида

$$x_1 = x, \qquad y_1 = Ax + By + Cz, \qquad z_1 = A_1x + B_1y + C_1z$$

коэффициенты $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ уравнения (2.1) не меняют своей величины. Для всякого значения $x = x_0 \neq 0$ это следует непосредственно из инвариантности коэффициентов характеристического уравнения системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{f_1(x_0)}{x_0}x + a_{12}y + a_{13}z\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{f_2(x_0)}{x_0}x + a_{22}y + a_{23}z\\ \frac{dz}{dt} &= \frac{f_3(x_0)}{x_0}x + a_{32}y + a_{33}z\end{aligned} \tag{2.4}$$

при указанном выше преобразовании и того факта, что при $x = x_0$ преобразование системы (1.1) формально совпадает с преобразованием системы (2.4). Нетрудно проверить непосредственным подсчетом, что неособым линейным преобразованием

$$x_1 = x, \qquad y_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{21}}a_{12}x + a_{12}y + a_{13}z, \qquad z_1 = z \tag{2.5}$$

система (1.1) в рассматриваемом случае приводится к виду

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(x_1) + y_1, \qquad \frac{dy_1}{dt} = \varphi_2(x_1), \qquad \frac{dz_1}{dt} = \varphi_3(x_1) + b_{32}y - \frac{\Delta_{21}}{a_{12}}z_1 \tag{2.6}$$

где функции $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ — линейные комбинации функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$. Так как коэффициенты уравнения

$$-\begin{vmatrix}\dfrac{\varphi_1(x)}{x} - \lambda & 1 & 0\\ \dfrac{\varphi_2(x)}{x} & -\lambda & 0\\ \dfrac{\varphi_3(x)}{x} & b_{32} & -\dfrac{\Delta_{21}}{a_{12}} - \lambda\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\dfrac{\varphi_1(x)}{x} - \lambda & 1\\ \dfrac{\varphi_2(x)}{x} & -\lambda\end{vmatrix}\left(-\frac{\Delta_{21}}{a_{12}} - \lambda\right) = 0 \tag{2.7}$$

совпадают, как указывалось выше, при всех $x \neq 0$ с коэффициентами уравнения (2.1), то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в (2.1) и (2.7), получим

$$\varphi_1(x) = \left(-a(x) + \frac{\Delta_{21}}{a_{12}}\right)x, \qquad \varphi_2(x) = \frac{-c(x)\,a_{12}}{\Delta_{21}}x \tag{2.8}$$

Кроме того, вследствие условий (2.2) уравнение (2.1), а следовательно, и совпадающее с ним уравнение (2.7) имеют все корни λ_j $(j = 1, 2, 3)$ при всех $x \neq 0$ с отрицательными вещественными частями. Следовательно, должны выполняться условия

$$\frac{\Delta_{21}}{a_{12}} > 0 \tag{2.9}$$

$$x\varphi_1(x) < 0, \qquad x\varphi_2(x) < 0 \qquad \text{при } x \neq 0 \tag{2.10}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_1(x) + y, \qquad \frac{dy}{dt} = \varphi_2(x) \tag{2.11}$$

определяющую поведение первых двух координат $x_1 = x(t)$, $y_1 = y(t)$ некоторой траектории системы (2.6). (Для простоты мы обозначаем переменные в (2.11) x, y вместо x_1, y_1.) Кривая

$$y = -\varphi_1(x) \tag{2.12}$$

разбивает плоскость x, y на две части. В области выше кривой (2.12) выполняется неравенство $dx \,/\, dt > 0$, ниже кривой $dx \,/\, dt < 0$. Вследствие (2.10) в полуплоскости $x < 0$, $dx \,/\, dt > 0$, в области $x > 0$, напротив, будет $dy \,/\, dt < 0$.

Покажем сначала, что через каждую точку плоскости xy проходит единственная интегральная кривая[1] системы (2.11). Рассмотрим точку $p(x_p, y_p)$, отличную от начала координат. Пусть сначала точка p не лежит на кривой (2.12). Тогда существует окрестность U точки p, в которой выполняется неравенство

$$|y + \varphi_1(x)| > \varepsilon \tag{2.13}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Разделив второе уравнение (2.11) на первое, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x) + y} \tag{2.14}$$

Очевидно, правая часть (2.14) в окрестности U удовлетворяет условиям Липшица по y. Действительно,

$$\left| \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x) + y_2} - \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x) + y_1} \right| = \frac{|\varphi_2(x)|\,|y_2 - y_1|}{|\varphi_1(x) + y_1|\,|\varphi_1(x) + y_2|} < \frac{M}{\varepsilon^2} |y_2 - y_1|$$

где M — максимум модуля $\varphi_2(x)$ в окрестности U, что и доказывает выполнение свойства единственности решения (2.14) в точке p. Предположим теперь, что единственность нарушается в точке p, лежащей на кривой (2.12). Обозначим символами $f_1(p, t)$, $f_2(p, t)$ какие-либо две траектории системы (2.11), проходящие через точку p в момент времени $t = 0$. Не нарушая общности, предположим, что $x_p > 0$ и траектории $f_1(p, t)$ и $f_2(p, t)$ различны выше кривой (2.12). (В остальных возможных случаях рассуждения аналогичны.) Так как выше кривой (2.12) $dx \,/\, dt > 0$, то прямая $x = x_0$, где $0 < x_0 < x_p$, пересекается траекториями $f_1(p, t)$ и $f_2(p, t)$ в двух различных точках q_1 и q_2. Пусть $y_{q_2} > y_{q_1}$. Обозначим через $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения отрезков траекторий $f_1(p, t)$ и $f_2(p, t)$ на интервале $x_0 < x < x_p$. Тогда разность $\Delta y(x) = y_2(x) - y_1(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d(\Delta y)}{dx} = \frac{-\varphi_2(x)\,\Delta y}{(\varphi_1(x) + y_1)(\varphi_2(x) + y_2)} \tag{2.15}$$

---

[1] Это утверждение не исключает возможности существования вдоль одной и той же интегральной кривой фазовой плоскости xy различных движений $x = x(t)$, $y = y(t)$, имеющих общую начальную точку $p(x_p, y_p)$ при $t = 0$.

Но вследствие (2.10) в области $x > 0$ все время, пока обе траектории $f_1(p, t)$ и $f_2(p, t)$ идут выше кривой (2.12) и пока $\Delta y > 0$, будет

$$\frac{d(\Delta y)}{dx} > 0 \tag{2.16}$$

Так как по предположению точка p есть точка, в которой траектории $f_1(p, t)$ и $f_2(p, t)$ впервые после точек q_1 и q_2 пересекают кривую (2.12), то неравенство (2.16) выполняется на всем интервале $x_0 < x < x_p$, что противоречит предположению $\Delta y(x_0) > 0$ и $\Delta y(x_p) = 0$. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение. (Выполнение единственности решения в точке $x = y = 0$ предполагается по условиям задачи.)

Покажем теперь, что при выполнении условия (2.3) имеет место $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для всех решений системы (2.11). Рассмотрим траекторию $f(p, t)$ системы (2.11). Не уменьшая общности доказательства, примем, что точка p лежит выше кривой (2.12) и $x_p > 0$. Покажем, что наступит такой момент $t = t_1$, когда траектория $f(p, t)$ пересечется с кривой (2.12). Действительно, вследствие (2.10), (2.8) и (2.3) выполняется по крайней мере одно из условий:

$$\underline{\lim}\, \varphi_1(x) = -\infty \qquad \text{при } x \to \infty \tag{2.17}$$

или

$$\lim \int_0^x -\varphi_2(x)\, dx = \infty \qquad \text{при } x \to \infty \tag{2.18}$$

В случае (2.17) наше утверждение очевидно, ибо при движении точки $f(p, t)$ в рассматриваемой области $y(t) < y_p$. Рассмотрим случай (2.18). Так как в рассматриваемой области $\varphi_1(x) < 0$, $y(t) > 0$, $y(t) < y_p$, то из (2.14) получим

$$\frac{dy}{dx} \leqslant \frac{\varphi_2(x)}{y_p}$$

или после интегрирования

$$y(t) - y_p \leqslant \frac{1}{y_p} \int_{x_p}^{x} \varphi_2(x)\, dx \tag{2.19}$$

Если предположить, что при всех значениях $t > 0$ точка $f(p, t)$ остается в области выше кривой (2.12), т. е. $y(t) > -\varphi_1(x(t))$ или вследствие первого из неравенств (2.10) $y(t) > 0$, то при (2.18) и (2.19) это возможно, лишь если величина $x(t)$ остается ограниченной. В рассматриваемой области $x(t)$, $y(t)$ суть монотонные функции времени и, если справедливо наше предположение, ограниченные. Но в таком случае точка $f(p, t)$ при $t \to \infty$ приближалась бы к некоторой точке q, отличной от начала координат. Так как вследствие второго неравенства (2.10) система (2.11) не может обладать особыми точками, отличными от начала координат, то наше предположение приводит к противоречию. Противоречие исчезает, если траектория $f(p, t)$ пересекает кривую (2.12), что и следовало доказать.

При дальнейшем движении точки $f(p, t)$ в области ниже кривой (2.12) $dx/dt < 0$ и, следовательно, траектория либо примыкает к началу координат при $t \to \infty$, либо пересекает полуось $x = 0$, $y < 0$.

Рассматривая аналогично предыдущему поведение $f(p, t)$ в области ниже кривой (2.12) и $x < 0$, убедимся, что она либо примыкает при $t \to \infty$ к началу координат, либо пересекает полуось $x = 0$, $y > 0$.

Нетрудно проверить также, что рассматриваемая траектория $f(p, t)$ при некотором значении $t < 0$ пересекается с полуосью $x = 0$, $y > 0$.

Таким образом, достаточно рассматривать случай, когда траектория $f(p, t)$ пересекает ось $x = 0$, $y > 0$ в точках $A = f(p, t_1)$ и $B = f(p, t_2)$. Покажем, что при $t_2 > t_1$ будет $y_A > y_B$. Действительно, вычислим производную для функции

$$v(x, y) = \frac{1}{2} y^2 - \int_0^x \varphi_2(x)\, dx$$

В силу (2.11) получим

$$\frac{dv}{dt} = -\varphi_1(x)\, \varphi_2(x) \tag{2.20}$$

Вследствие (2.10) производная dv/dt есть знакоотрицательная функция, обращающаяся в нуль лишь на оси $x = 0$.

Следовательно, $v(A) > v(B)$, что вследствие $dv/dy = y > 0$ при $y > 0$ и доказывает неравенство $y_A > y_B$.

Таким образом, отрезок траектории $f(p, t)$ при $t > t_2$ попадает внутрь замкнутой области, ограниченной отрезком AB и другой траектории BA, которую не может покинуть ни при каких $t > t_2$. Итак, всякая положительная полутраектория системы (2.11) ограничена и система не имеет периодических решений. Вследствие (2.10) $v(x, y)$ есть определенно положительная функция. Но наличие такой функции, имеющей знакоотрицательную производную dv/dt (2.20), обеспечивает устойчивость решения $x = y = 0$ по Ляпунову [2]. Следовательно, ω — предельное множество траектории $f(p, t)$ — должно совпадать с точкой $x = y = 0$ (теорема (1.3) работы [3]), т. е. $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Рассмотрим теперь систему (2.6). По доказанному при выполнении условия (2.3) $x_1(t) \to 0$, $y_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, и $\varphi_3(x_1(t)) \to 0$ при $t \to \infty$. А тогда из третьего уравнения системы (2.6) ввиду того, что $\Delta_{21}/a_{12} > 0$, следует, что и $z_1(t) \to 0$, так как

$$z_1(t) = z_1 \exp\left(-\frac{\Delta_{21} t}{a_{12}}\right)\left[c + \int_0^t (\varphi_3(x_1(t)) + b_{32} y_1(t)) \exp\left(\frac{\Delta_{21} t}{a_{12}}\right) dt\right]$$

Итак, достаточность условия (2.3) доказана.

Докажем необходимость условия (2.3). Рассмотрим снова систему (2.11). Покажем, что при выполнении неравенств

$$\varphi_1(x) > -M, \qquad \int_0^x \varphi_2(x)\, dx > -M \qquad \text{при } x \neq 0 \tag{2.21}$$

где M — достаточно большое число, система (2.11) имеет траекторию, уходящую в бесконечность при возрастании t (условия (2.21) соответствуют, очевидно, нарушению (2.3) при $x > 0$). В самом деле, пусть точка p имеет координаты $x_p = 0$, $y_p = 2M + 2$. Все время, пока точка $f(p, t)$ будет находиться в области $y > 2M$, для ее координаты $y(t)$ выполняется неравенство

$$y(t) > y_p + \frac{1}{M}\int\limits_0^x \varphi_2(x)\,dx > 2M + 2 - 1 > 2M + 1 \tag{2.22}$$

Справедливость неравенства (2.22) для $y > 2M$ следует из (2.21) и оценки

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_2(x)}{y + \varphi_1(x)} \geqslant \frac{\varphi_2(x)}{2M - M} = \frac{\varphi_2(x)}{M} \tag{2.23}$$

получающейся непосредственно из (2.14). Неравенство (2.22) и доказывает наше утверждение. В самом деле, прежде чем траектория $f(p, t)$ попадет на прямую $y = 2M$, она должна пересечь прямую $y = 2M + 1$, но для нашей траектории $f(p, t)$ это невозможно, так как все время, пока $y(t) > 2M$, вследствие (2.22) $y(t) > 2M + 1$. Таким образом, траектория $f(p, t)$ не может пересечь прямую $y = M$ в направлении к оси $y = 0$, т. е. не может вследствие (2.21) пересечь кривую (2.12). Таким образом, все время $dx / dt > 0$, откуда уже нетрудно получить, что $x(t) \to \infty$ при возрастании времени. Но в таком случае и система (2.6) будет обладать траекторией, уходящей в бесконечность при возрастании времени. Так как неособое линейное преобразование системы уравнений (1.1) в систему (2.6) не нарушает топологической картины поведения траекторий, то на основании изложенного выше можно считать теорему 1 полностью доказанной.

§ 3. Рассмотрим второй случай.

Теорема 2. Рассмотрим уравнение (2.1). Если выполняется (1.8), то для того чтобы решение $x = y = z = 0$ системы (1.1) было асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях, достаточно выполнения условий

$$\lim \int\limits_0^x c(x)\,x\,dx = \infty \qquad \text{при } x \to \pm\infty \tag{3.1}$$

$$4k_2 c(x)(a(x) - k_1) - \left[\frac{c(x)(1 + k_2)}{k_1} + k_2(a(x) - k_1)k_1 - k_2 b(x)\right]^2 > 0 \tag{3.2}$$

при всех $x \neq 0$. Здесь k_1, k_2 — положительные постоянные числа.

Примечание. Заметим, что в случае, когда функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ линейны, условия теоремы (3.1) и (3.2) эквивалентны условиям Рауза-Гурвица, т. е. являются тогда необходимыми и достаточными. В самом деле, пусть система (1.1) линейная и коэффициенты ее характеристического уравнения (2.1) удовлетворяют условиям Рауза-Гурвица

$$a > 0, \qquad ab - c > 0, \qquad c > 0 \tag{3.3}$$

Покажем, что можно подобрать такие числа $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, чтобы выполнялись условия (3.1), (3.2) теоремы. Однако в линейном случае условие (3.1) есть очевидное следствие третьего неравенства (3.3). Для выполнения неравенства (3.2) достаточно подобрать такие числа k_1 и k_2 ($0 < k_1 < a$, $0 < k_2$), чтобы соблюдалось равенство

$$c(1 + k_2) + k_2(a - k_1)k_1^2 - k_1k_2b = 0 \tag{3.4}$$

Обозначим левую часть последнего равенства $F(k_1, k_2)$. Очевидно, при всяком фиксированном значении k_1 можно указать столь малое по модулю число $k_2 > 0$, что будет $F(k_1, k_2) > 0$. С другой стороны, так как a, b, c — в линейном случае постоянные числа, то вследствие (3.3) можно указать такое достаточно малое число $\varepsilon > 0$, что будет выполняться неравенство

$$ab - c > 4\varepsilon \tag{3.5}$$

Но тогда можно подобрать такое число $\varepsilon_1 > 0$, что при всех значениях k_1, удовлетворяющих неравенству

$$a - \varepsilon_1 < k_1 < a \tag{3.6}$$

будем иметь

$$c - k_1b < -3\varepsilon \tag{3.7}$$

При таких значениях k_1 получим оценку

$$F(k_1, k_2) = c(1 + k_2) + k_2(a - k_1)k_1^2 - k_1k_2b < k_2\left(-3\varepsilon + \frac{c}{k_2} + \varepsilon_1a^2\right) \tag{3.8}$$

Выбираем теперь k_2 и ε_1 такими, чтобы было

$$\frac{c}{k_2} < \varepsilon, \qquad a^2\varepsilon_1 < \varepsilon \tag{3.9}$$

что, очевидно, не нарушает справедливости предшествующих оценок. Подставляя (3.9) в (3.8), получим $F(k_1, k_2) < -\varepsilon k_2 < 0$.

Таким образом, при некотором фиксированном значении k_1 ($0 < k_1 < a$) функция $F(k_1, k_2)$ меняет знак при изменении k_2 на интервале $(0, \infty)$. Функция $F(k_1, k_2)$ непрерывна по k_2 и, следовательно, существует такое значение $k_2 > 0$, при котором $F(k_1, k_2) = 0$, т. е. выполняется (3.4), а этого, как указывалось выше, достаточно для выполнения условия (3.2).

Предположим теперь, что для линейной системы (1.1) выполняются условия (3.1) и (3.2). Тогда на основании утверждения теоремы имеет место асимптотическая устойчивость решения $x = y = z = 0$ при всех начальных возмущениях. Однако в линейном случае это возможно лишь при выполнении условий Рауза-Гурвица. Итак, утверждение об эквивалентности условий (3.1) и (3.2) с условиями (3.3) в линейном случае доказано.

Докажем теорему 2. Неособым линейным преобразованием

$$x_1 = x, \qquad y_1 = \Delta_{11}x + \Delta_{21}y + \Delta_{31}z \tag{3.10}$$

$$z_1 = (-k_1)\left[\left(a_{13} - \frac{a_{12}\Delta_{31}}{\Delta_{21}}\right)z - \left(k_1 + a_{33} - \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{21}}a_{32}\right)x\right] +$$

$$+ \left[\frac{a_{32}}{\Delta_{21}}\left(a_{13} - \frac{a_{12}\Delta_{31}}{\Delta_{21}}\right) - \frac{a_{12}}{\Delta_{21}}\left(k_1 + a_{33} - \frac{a_{32}}{\Delta_{21}}\Delta_{31}\right)\right](\Delta_{11}x + \Delta_{21}y + \Delta_{31}z) \tag{3.11}$$

где величины Δ_{ij} даны формулами (1.3), приведем систему (1.1), как это нетрудно проверить непосредственным подсчетом, к виду

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \psi_1(x_1) + c_{12}y_1 + c_{13}z_1\\ \frac{dy_1}{dt} &= \psi_2(x_1)\\ \frac{dz_1}{dt} &= \psi_3(x_1) - k_1 z_1\end{aligned} \tag{3.12}$$

где функции $\psi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ — линейные комбинации с постоянными коэффициентами функций $f_j(x)$ $(j = 1, 2, 3)$ и x.

Покажем, что при условиях теоремы $c_{12} \neq 0$ и $c_{13} \neq 0$. В самом деле как указывалось выше, коэффициенты уравнения

$$-\begin{vmatrix}\frac{\psi_1(x)}{x} - \lambda & c_{12} & c_{13}\\ \frac{\psi_2(x)}{x} & -\lambda & 0\\ \frac{\psi_3(x)}{x} & 0 & -k_1 - \lambda\end{vmatrix} = 0 \tag{3.13}$$

совпадают с коэффициентами уравнения (2.1), т. е. имеем, в частности,

$$c(x) = -\frac{\psi_2(x)}{x} k_1 c_{12} \tag{3.14}$$

и вследствие условия (3.1) из (3.14) следует $c_{12} \neq 0$.

Если предположить $c_{13} = 0$, то, возвращаясь в первом уравнении (3.12) к старым переменным x, y, z, получим

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + c_{12}(\Delta_{21}y + \Delta_{31}z) \tag{3.15}$$

Сравнивая коэффициенты в (3.15) и первом уравнении (1.1), имеем

$$a_{12} = c_{12}\Delta_{21}, \qquad a_{13} = c_{12}\Delta_{31} \tag{3.16}$$

что противоречит (1.8). Итак, действительно $c_{12} \neq 0$ $c_{13} \neq 0$. Но тогда, так как преобразование $y_2 = c_{12}y_1$ и $z_2 = c_{13}z_1$ в этом случае не является особым и не меняет существенно вида системы (3.12), получаем следующий результат.

Неособым линейным преобразованием

$$x_1 = x, \qquad y_1 = Ax + By + Cz, \qquad z_1 = A_1x + B_1y + C_1z$$

в рассматриваемом случае систему (1.1) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \varphi_1(x_1) + y_1 + z_1,\\ \frac{dy_1}{dt} &= \varphi_2(x_1),\\ \frac{dz_1}{dt} &= \varphi_3(x_1) - k_1 z_1\end{aligned} \tag{3.17}$$

где, как и выше, функции $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ — линейные комбинации функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и x, а k_1 — любое наперед заданное положительное число.

Запишем уравнение

$$-\begin{vmatrix} \frac{\varphi_1(x)}{x}-\lambda & 1 & 1 \\ \frac{\varphi_2(x)}{x} & -\lambda & 0 \\ \frac{\varphi_3(x)}{x} & 0 & -k_1-\lambda \end{vmatrix} = \tag{3.18}$$

$$= \lambda^3 + \left(k_1 - \frac{\varphi_1(x)}{x}\right)\lambda^2 + \left(-k_1\frac{\varphi_1(x)}{x} - \frac{\varphi_3(x)}{x} - \frac{\varphi_2(x)}{x}\right)\lambda + (-k_1)\frac{\varphi_2(x)}{x} = 0$$

Вследствие указанной выше инвариантности коэффициентов $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ уравнения (2.1) при проведенных преобразованиях получим, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в уравнениях (3.18) и (2.1), такие формулы для $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x(k_1 - a(x)) \\ \varphi_2(x) &= -\frac{c(x)}{k_1}x \\ \varphi_3(x) &= x\left[(a(x) - k_1)k_1 + \frac{c(x)}{k_1} - b(x)\right] \end{aligned} \tag{3.19}$$

Рассмотрим функцию

$$v(x_1, y_1, z_1) = -\int_0^{x_1}\varphi_2(x)\,dx + \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}z_1^2k_2 \quad (k_2 > 0)$$

Вследствие условий (3.1), (3.2) и формулы (3.19) для $\varphi_2(x)$ функция $v(x_1, y_1, z_1)$ есть определенная положительная функция, обладающая свойством

$$\lim v(x_1, y_1, z_1) = \infty \quad \text{при } r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \to \infty \tag{3.20}$$

В самом деле, (3.20) есть следствие (3.1). Определенная положительность $v(x_1, y_1, z_1)$ следует из того факта, что вследствие (3.1)

$$c(x) = -k_1x^{-1}\varphi_2(x)$$

принимает на интервале $(0, \infty)$ и на интервале $(-\infty, 0)$ положительные значения.

Менять знак на указанном интервале $c(x)$, однако, не может, так как при обращении $c(x)$ в нуль нарушается условие (3.2).

Вычислим производную dv/dt; в силу уравнений (3.17) имеем

$$\frac{dv}{dt} = -\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1) - z_1(\varphi_2(x_1) - k_2\varphi_3(x_1)) - k_1k_2z_1^2 \tag{3.21}$$

Подставляя в (3.21) значения $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ из (3.19), получим

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= x_1^2\left[\frac{c(x_1)}{k_1}(k_1 - a(x_1))\right] + \\ &+ x_1z_1\left[\frac{c(x_1)}{k_1} + (k_1(a(x_1) - k_1) + \frac{c(x_1)}{k_1} - b(x_1))k_2\right] - k_1k_2z_1^2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Для того чтобы функция dv/dt была определенно отрицательной, достаточно выполнения неравенства

$$4k_2 c(x_1)(a(x_1) - k_1) - \left[\frac{c(x_1)(1+k_2)}{k_1} + k_2(a(x_1) - k_1)k_1 - k_2 b(x_1)\right]^2 > 0$$

где $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, что совпадает с условием (3.2) теоремы.

Так как $dv/dt < 0$, то вследствие (3.20) всякая положительная полутраектория системы (3.17) ограничена. Но в таком случае наличие определенно положительной функции $v(x_1, y_1, z_1)$, имеющей определенно отрицательную производную по времени, очевидно, обеспечивает асимптотическую устойчивость решения $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ системы (3.17), или, что то же самое, устойчивость в большом решения $x = y = z = 0$ системы (1.1). Действительно, если предположить противное, то траектория $f(p, t)$ системы (3.17) при $t > 0$ должна оставаться в области

$$r^2 \leqslant x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leqslant R^2 \tag{3.23}$$

где r и R — постоянные числа.

Пусть $-\varepsilon < 0$ — максимум функции dv/dt в области (3.23). Тогда

$$v(t) - v(0) < -\varepsilon t$$

что вследствие продолжимости траектории $f(p, t)$, находящейся при всех $t > 0$ в области (3.23), на интервал $(0, \infty)$ противоречит определенной положительности функции $v(x_1, y_1, z_1)$. Теорема доказана.

В качестве примера применения теоремы 2 рассмотрим уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + f(x) = 0 \tag{3.24}$$

Как показал Е. А. Барбашин [4], для асимптотической устойчивости в большом решения $x = 0$ уравнения (3.24) достаточно выполнения условий

$$f(0) = 0, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad xf(x) > 0$$
$$\lim \int_0^x f(x)\,dx = \infty \qquad \text{при } |x| \to \infty \tag{3.25}$$

$$ab - f'(x) > 0 \tag{3.26}$$

Рассмотрим один частный случай, когда уравнение

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{3.27}$$

имеет действительные корни λ_1, λ_2. Полагая в условиях теоремы $k_1 = (\max|\lambda_1|, |\lambda_2|)$, после простых выкладок получим, что для асимптотической устойчивости при любых начальных возмущениях решения $x = 0$ уравнения (3.24) достаточно выполнения условий (3.25) и неравенства

$$\frac{f(x)}{x} < b(\max|\lambda_1|, |\lambda_2|)\frac{4k_2}{(1+k_2)^2} \tag{3.28}$$

Так как правая часть (3.28) достигает наибольшего значения при $k_2 = 1$, то условие (3.28) принимает вид:

$$\frac{f(x)}{x} < b\,(\max|\lambda_1|,\ \ |\lambda_2|) \tag{3.29}$$

Итак, для устойчивости решения $x = 0$ в большом достаточно выполнения условий (3.25) и (3.29). Условие (3.29) не накладывает ограничения на $f'(x)$, однако сокращает интервал возможного изменения функции $f(x)$.

Аналогичным образом, подбирая числа k_1, k_2, можно получить достаточные условия, подобные (3.25) и (3.29), и в случае, когда уравнение (3.27) имеет комплексные корни.

Поступила 18 XII 1952 Уральский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
3. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950.
4. Барбашин Е. А. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.