Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ЦЕНТРА И ФОКУСА В ОДНОМ СЛУЧАЕ

А. Ф. Андреев
(Ленинград)

Во всех появившихся в печати за последние годы работах, посвященных проблеме различения центра и фокуса для системы дифференциальных уравнений, содержащих в правых частях линейные члены, рассматривалась система, которая линейным неособенным преобразованием приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = y + X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = -x - Y(x, y) \tag{1}$$

где $X(x, y)$, $Y(x, y)$ — аналитические в начале координат функции, разложения которых в ряды по степеням x, y начинаются членами не ниже второго порядка.

Характеристическое уравнение системы (1) имеет чисто мнимые корни, и потому начало координат для нее только и может быть либо центром, либо фокусом.

Проблема различения этих двух возможных типов расположения интегральных кривых системы (1) разрешена для тех случаев, когда $X(x, y)$, $Y(x, y)$ — полиномы второго порядка [1] или однородные полиномы третьего порядка [2], и для тех, когда $X(x, y) \equiv 0$, а $Y(x, y)$ — многочлен третьей или пятой степени [4].

Однако, как показал Ляпунов в статье *Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения*[1], центр и фокус, наряду с другими топологическими типами расположения интегральных кривых, возможны также для систем, которые линейным неособенным преобразованием могут быть приведены к виду

$$\frac{dx}{dt} = y + X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y) \tag{2}$$

где $X(x, y)$, $Y(x, y)$ — таковы же, что и в системе (1). Характеристическое уравнение системы (2) имеет кратный нулевой корень, которому соответствует непростой элементарный делитель.

Если $X(x, y)$, $Y(x, y)$ суть полиномы второго порядка, то, как показал сам Ляпунов, начало координат для системы (2) не может быть ни центром, ни фокусом.

---

[1] Статья напечатана в книге [3].

Если же $X(x, y)$, $Y(x, y)$ — однородные полиномы третьего порядка, т. е. система (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 \\ \frac{dy}{dt} &= Kx^3 + Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3 \end{aligned} \tag{3}$$

то на основании результатов Ляпунова легко установить следующее:

при условии

$$K \geqslant 0$$

расположение интегральных кривых в окрестности начала координат будет отлично от центра и фокуса,

при условиях

$$K < 0, \qquad 3A + L \neq 0$$

начало координат будет фокусом и, наконец,

при условиях

$$K < 0, \qquad 3A + L = 0 \tag{4}$$

точка (0, 0) будет или центром, или фокусом, однако вопрос о том, какое именно (из этих двух) расположение интегральных кривых имеет место в действительности при том или ином наборе коэффициентов в уравнениях (3), остается открытым.

В настоящей заметке доказывается следующее утверждение. *Для того чтобы начало координат было центром для системы* (3), *необходимо и достаточно, чтобы уравнения* (3), *кроме условий* (4) *удовлетворяли условиям*

$$2A(B + M) + K(C + 3N) = 0 \qquad (B + M)(2A^3 - AKM - K^2N) = 0 \tag{5}$$

Итак, пусть для системы (3) выполнены условия (4). Введем, следуя указанию Ляпунова, новые переменные x_1, y_1, по формулам

$$x_1 = x\sqrt{-K}, \qquad y_1 = y\sqrt{-K}$$

В этих переменных рассматриваемая система принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= y_1 + \frac{A}{-K}x_1^3 + \frac{B}{-K}x_1^2y_1 + \frac{C}{-K}x_1y_1^2 + \frac{D}{-K}y_1^3 \\ \frac{dy_1}{dt} &= -x_1^3 - \frac{3A}{-K}x_1^2y_1 + \frac{M}{-K}x_1y_1^2 + \frac{N}{-K}y_1^3 \end{aligned}$$

Условимся сохранить за переменными прежние обозначения x, y и обозначать буквами A, B, C, ... результат деления соответствующих коэффициентов на величину $-K$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -x^3 - 3Ax^2y + Mxy^2 + Ny^3 \end{aligned} \tag{6}$$

для которой условия (4) выполнены, а условия (5) имеют вид:

$$2A(B + M) = C + 3N \tag{7}$$

$$(B + M)(2A^3 + AM - N) = 0 \tag{8}$$

Докажем, что равенства (7) и (8) суть необходимые и достаточные условия наличия центра для системы (6). Этим, очевидно, сформулированное выше утверждение будет доказано.

Метод разрешения проблемы центра и фокуса, обычно применяемый для уравнений вида (1) и заключающийся в разыскании необходимых и достаточных условий существования не зависящего от t голоморфного и знакоопределенного в окрестности начала координат интеграла системы вида $U(x, y) = c$, не применим в данном случае, ибо, как показал Ляпунов, существование интеграла указанного характера для системы вида (2) является достаточным, но отнюдь не необходимым условием наличия центра. При доказательстве первой части нашего утверждения, а именно необходимости, мы применим метод Ляпунова [1]. Введем подстановку.

$$x = r \operatorname{Cs} \vartheta, \qquad y = -r^2 \operatorname{Sn} \vartheta \tag{9}$$

где функции $\operatorname{Cs} \vartheta$ и $\operatorname{Sn} \vartheta$ связаны соотношением

$$\operatorname{Cs}^4 \vartheta + 2 \operatorname{Sn}^2 \vartheta = 1 \tag{10}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d \operatorname{Cs} \vartheta}{d\vartheta} = -\operatorname{Sn} \vartheta, \qquad \frac{d \operatorname{Sn} \vartheta}{d\vartheta} = \operatorname{Cs}^3 \vartheta$$

при начальных данных $\operatorname{Cs} 0 = 1$, $\operatorname{Sn} 0 = 0$. Этими условиями $\operatorname{Cs} \vartheta$ и $\operatorname{Sn} \vartheta$ определяются как однозначные и непрерывные для всех вещественных значений ϑ функции, периодические с периодом $2\omega = \pi^{-1/2}\Gamma^2(1/4)$ (где $\Gamma(z)$ — гамма-функция), причем $\operatorname{Cs} \vartheta$ — четная функция, а $\operatorname{Sn} \vartheta$ — нечетная. В данном случае они следующим образом выражаются через эллиптические функции Якоби при модуле $k = 1/\sqrt{2}$:

$$\operatorname{Cs} \vartheta = \operatorname{cn} \vartheta, \qquad \operatorname{Sn} \vartheta = \operatorname{sn} \vartheta \operatorname{dn} \vartheta$$

Из (9) и (10) следует

$$x^4 + 2y^2 = r^4$$

В новых переменных система (6) приобретает вид:

$$\frac{dr}{dt} = r^3 A \operatorname{Cs}^2 \vartheta\, (1 - 5 \operatorname{Sn}^2 \vartheta) - r^4 \operatorname{Sn} \vartheta \operatorname{Cs} \vartheta\, (B \operatorname{Cs}^4 \vartheta + M \operatorname{Sn}^2 \vartheta) + $$
$$+ r^5 \operatorname{Sn}^2 \vartheta\, (C \operatorname{Cs}^4 \vartheta + N \operatorname{Sn}^2 \vartheta) - r^6 D \operatorname{Sn}^3 \vartheta \operatorname{Cs}^3 \vartheta$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = r - r^2 5A \operatorname{Sn} \vartheta \operatorname{Cs}^3 \vartheta + r^3 (2B - M) \operatorname{Sn}^2 \vartheta \operatorname{Cs}^2 \vartheta -$$
$$- r^4 (2C - N) \operatorname{Sn}^3 \vartheta \operatorname{Cs} \vartheta + r^5 2D \operatorname{Sn}^4 \vartheta$$

Исключая из этой системы переменное t, приходим к уравнению

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{r^2 R(r, \vartheta)}{1 + r\theta(r, \vartheta)} \tag{11}$$

где

$$R(r, \vartheta) = A \operatorname{Cs}^2 \vartheta\, (1 - 5 \operatorname{Sn}^2 \vartheta) - r \operatorname{Sn} \vartheta \operatorname{Cs} \vartheta\, (B \operatorname{Cs}^4 \vartheta + M \operatorname{Sn}^2 \vartheta) +$$
$$+ r^2 \operatorname{Sn}^2 \vartheta\, (C \operatorname{Cs}^4 \vartheta + N \operatorname{Sn}^2 \vartheta) - r^3 D \operatorname{Sn}^3 \vartheta \operatorname{Cs}^3 \vartheta$$

$$\theta(r, \vartheta) = -5A \operatorname{Sn} \vartheta \operatorname{Cs}^3 \vartheta + r (2B - M) \operatorname{Sn}^2 \vartheta \operatorname{Cs}^2 \vartheta -$$
$$- r^2 (2C - N) \operatorname{Sn}^3 \vartheta \operatorname{Cs} \vartheta + r^3 2D \operatorname{Sn}^4 \vartheta$$

Правая часть уравнения (11) при достаточно малых r может быть разложена в ряд

$$R_2(\vartheta)\,r^2+R_3(\vartheta)\,r^3+R_4(\vartheta)\,r^4+\cdots$$

с периодическими относительно ϑ коэффициентами $R_k(\vartheta)$ (целыми рациональными функциями от $\mathrm{Cs}\,\vartheta$ и $\mathrm{Sn}\,\vartheta$).

В частности, первые пять функций $R_k(\vartheta)$ таковы:

$$\begin{aligned}
R_2(\vartheta) &= A\,\mathrm{Cs}^2\vartheta\,(1-5\,\mathrm{Sn}^2\vartheta)\\
R_3(\vartheta) &= \mathrm{Sn}\,\vartheta\,\mathrm{Cs}\,\vartheta\,[(5A^2-B)+(2B-M-10A^2)\,\mathrm{Sn}^2\vartheta-25A^2\,\mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}^4\vartheta]\\
R_4(\vartheta) &= \mathrm{Sn}^2\vartheta\,\{N\,\mathrm{Sn}^2\vartheta+[A\,(3B-4M)+C]\,\mathrm{Cs}^4\vartheta+\\
&\qquad +5A\,(5A^2-2B+M)\,\mathrm{Cs}^8\vartheta-125\,A^3\,\mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}^8\vartheta\}\\
R_5(\vartheta) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sn}^3\vartheta\,\mathrm{Cs}^3\vartheta\,\{[2A\,(4N-3C)+M\,(2B-M)-2D]+\\
&\qquad +[10A\,(2C-N)+5A^2\,(12B-11M)+(2B-M)^2]\,\mathrm{Cs}^4\vartheta+\\
&\qquad +25A^2\,[10A^2-3\,(2B-M)]\,\mathrm{Cs}^8\vartheta-1250\,A^4\,\mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}^8\vartheta\}
\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}
R_6(\vartheta) &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sn}^4\vartheta\,\mathrm{Cs}^2\vartheta\,\{2\,[3AD-CM-N\,(B-M)]+\\
&\qquad +[5A^2\,(11N-12C)-3A\,(2B-M)^2+10AM\,(2B-M)-\\
&\qquad -20AD-2\,(2B-M)\,(2C-N)]\,\mathrm{Cs}^4\vartheta+5A\,[10A^2\,(9B-7M)+\\
&\qquad +3\,(2B-M)^2+15A\,(2C-N)]\,\mathrm{Cs}^8\vartheta+250\,A^3\,[5A^2-\\
&\qquad -2\,(2B-M)]\,\mathrm{Cs}^{12}\vartheta-6250\,A^5\,\mathrm{Sn}^2\vartheta\,\mathrm{Cs}^{12}\vartheta\}
\end{aligned}$$

Будем искать функцию $r(\vartheta)$, удовлетворяющую уравнению (11), под видом ряда

$$r=c+u_2(\vartheta)\,c^2+u_3(\vartheta)\,c^3+\cdots\tag{13}$$

считая здесь величину c произвольной постоянной, а $u_k(\vartheta)$ не зависящими от c функциями ϑ. Подставляя (13) в (11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c в левой и правой частях получающегося равенства, найдем для определения функций $u_k(\vartheta)$ следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
&\frac{du_2}{d\vartheta}=R_2,\qquad \frac{du_3}{d\vartheta}=2u_2R_2+R_3\\
&\frac{du_4}{d\vartheta}=(u_2^2+2u_3)\,R_2+3u_2R_3+R_4\\
&\frac{du_5}{d\vartheta}=2\,(u_2u_3+u_4)\,R_2+3\,(u_2^2+u_3)\,R_3+4u_2R_4+R_5\\
&\frac{du_6}{d\vartheta}=(u_3^2+2u_2u_4+2u_5)\,R_2+(u_2^3+6u_2u_3+3u_4)\,R_3+\\
&\qquad +(6u_2^2+4u_3)\,R_4+5u_2R_5+R_6\quad \text{и т. д.}
\end{aligned}\tag{14}$$

где R_k даны формулами (12). При наличии у системы (6) центра в начале координат все функции $u_k(\vartheta)$ $(k=2,3,4,\ldots)$ должны быть периодическими.

Последовательное интегрирование уравнений (14) дает[1]

$$u_2(\vartheta) = A \operatorname{Sn}\vartheta \operatorname{Cs}^3\vartheta$$

$$u_3(\vartheta) = -\frac{1}{4}\left[7A^2 \operatorname{Cs}^{10}\vartheta - \left(7A^2 + \frac{2}{3}B - \frac{1}{3}M\right)\operatorname{Cs}^6\vartheta - M \operatorname{Cs}^2\vartheta\right]$$

$$u_4(\vartheta) = -\operatorname{Sn}\vartheta\left[8A^3 \operatorname{Cs}^{13}\vartheta - \left(8A^3 + \frac{2}{3}A(2B - M)\right)\operatorname{Cs}^9\vartheta -\right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{2}N - A(B - M)\right)\operatorname{Cs}^5\vartheta + \frac{1}{2}N \operatorname{Cs}\vartheta\right] + \frac{1}{21}\left[C + 3N - 2A(B + M)\right]\vartheta$$

Легко видеть, что $u_2(\vartheta)$ и $u_3(\vartheta)$ суть периодические функции, а $u_4(\vartheta)$ будет периодической лишь при условии (7), которое представляет собой первое необходимое условие существования центра для системы (6). Считая это условие выполненным, получим далее

$$u_5(\vartheta) = -\frac{1}{16}\operatorname{Sn}^2\vartheta\left[663A^4 \operatorname{Cs}^{16}\vartheta - \left(663A^4 + 78A^2(2B - M)\right)\operatorname{Cs}^{12}\vartheta +\right.$$
$$+ \left(144A^2B - 90A^2M - 72AN + (2B - M)^2\right)\operatorname{Cs}^8\vartheta - \left(20A^2(B + M) -\right.$$
$$\left.\left. - 72AN - 6BM + 3M^2 + 2D\right)\operatorname{Cs}^4\vartheta + \left(4A^2(B + M) + 2BM + 2M^2 + 2D\right)\right]$$

т. е. $u_5(\vartheta)$ — функция периодическая. Что же касается функции $u_6(\vartheta)$ то интегрирование соответствующего уравнения дает для нее выражение

$$u_6(\vartheta) = v(\vartheta) + l(B + M)(2A^3 + AM - N)\int \operatorname{Cs}^2\vartheta\, d\vartheta$$

где $v(\vartheta)$ — целая рациональная функция от $\operatorname{Cs}\vartheta$ и $\operatorname{Sn}\vartheta$, а l — отличная от нуля постоянная, не зависящая от параметров задачи.

Из исследований Ляпунова вытекает, что

$$\int \operatorname{Cs}^2\vartheta\, d\vartheta = w(\vartheta) + g\vartheta \qquad \left(g = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

где $w(\vartheta)$ — многочлен от $\operatorname{Cs}\vartheta$ и $\operatorname{Sn}\vartheta$. Таким образом, $u_6(\vartheta)$ будет периодической лишь при условии (8), которое и представляет собой второе необходимое условие существования центра для системы (6). Первая часть утверждения доказана.

Докажем теперь, что условия (7) и (8) являются достаточными условиями для того, чтобы система (6) имела в начале координат центр. Рассмотрим отдельно два случая.

1. $B+M=0$. Из равенства (7) следует, что тогда и $C+3N=0$. Но при этих условиях уравнение траекторий системы (6) является уравнением в полных дифференциалах; его общий интеграл будет

$$2y^2 + x^4 + 4Ax^3y + 2Bx^2y^2 - 4Nxy^3 + Dy^4 = c \tag{15}$$

Левая часть этого интеграла есть определенно-положительная в окрестности начала координат функция.

---

[1] Постоянные интегрирования здесь положены равными нулю. Можно было бы искать функции $u_k(\vartheta)$ с нулевыми начальными данными (Ляпунов доказал, что выбор последних не влияет на существо дела), однако это нарушило бы имеющийся у нас в выражениях для $u_k(\vartheta)$ закон убывания показателей у функций $\operatorname{Cs}\vartheta$, облегчающий контроль над правильностью выкладок.

Поэтому кривые (15) при достаточно малых x, y будут замкнутыми кривыми и, следовательно, точка $(0,0)$ будет центром.

2. $B+M\neq 0$. Из равенства (8) следует, что в этом случае

$$N = 2A^3 + AM \tag{16}$$

Преобразуем систему (6) посредством подстановки $x = x_1 - Ay_1$, $y = y_1$. В новых переменных будем иметь систему

$$\frac{dx_1}{dt} = y_1 + (B - 3A^2)\,x_1^2 y_1 + (6A^3 - 2AB + AM + C)\,x_1 y_1^2 + \\ + (A^2B - A^2M - 3A^4 + D - AC + AN)\,y_1^3$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -x_1^3 + (M + 3A^2)\,x_1 y_1^2 + (N - 2A^3 - AM)\,y_1^3$$

которая при выполнении условий (7) и (16) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= y_1 + (B - 3A^2)\,x_1^2 y_1 + (5A^4 - A^2(B - M) + D)\,y_1^3 \\ \frac{dy_1}{dt} &= -x_1^3 + (M + 3A^2)\,x_1 y_1^2 \end{aligned} \tag{17}$$

Особенностью этой последней системы является то, что она не изменяется при замене x_1 на $-x_1$ и t на $-t$, равно как и при замене y_1 на $-y_1$ и t на $-t$. Это означает, что поле направлений системы (17) симметрично относительно обеих осей, из чего следует, что картина расположения интегральных кривых системы (17), а значит, и системы (6) имеет две оси симметрии. Но в окрестности начала координат исследуемые траектории либо спирали, либо замкнутые кривые. Из соображений симметрии мы с необходимостью должны заключить, что в действительности имеет место последнее.

Итак, при выполнении условий (7) и (8) начало координат является для системы (6) центром, в противном случае — фокусом. Утверждение доказано полностью.

Поступила 31 I 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахарников Н. А. Об условиях Фроммера существования центра. ПММ, т. XII, вып. 5, 1948.
2. Сахарников Н. А. Решение проблемы центра и фокуса в одном случае. ПММ, т. XIV, вып. 6, 1950.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, 1950.
4. Куклес И. С. О необходимых и достаточных условиях наличия центра. ДАН СССР, т. XLII, № 4, 1944; О некоторых случаях отличия фокуса от центра. ДАН СССР, т. XLII, № 5, 1944.