Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

# РАВНОВЕСИЕ УПРУГОЙ ПОЛОЙ СФЕРЫ

**А. И. Лурье**
(Ленинград)

Задача о равновесии упругой полой сферы была впервые рассмотрена примерно сто лет назад в классическом сочинении Ляме по теории криволинейных координат [1]

Решение Ляме построено в сферических координатах. Предполагая, что заданные на внутренней и внешней поверхностях ($R = R_0$ и $R = R_1$) напряжения $\sigma_R$, $\tau_{R\vartheta}$, $\tau_{R\varphi}$ представлены в форме двойных рядов по произведениям присоединенных функций Лежандра $P_n^{(m)}(\cos\vartheta)$ и тригонометрических функций $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ (причем $m = 0, 1, \ldots, n$, а $n = 0, 1, 2, \ldots$), Ляме указывает способ построения двойных рядов, определяющих по этим условиям вектор перемещения, удовлетворяющий уравнениям равновесия теории упругости в перемещениях. Неопределенные коэффициенты, входящие в выражения слагаемых $u_R^{(n, m)}$, $u_\vartheta^{(n, m)}$, $u_\varphi^{(n, m)}$ этих рядов, могут быть определены из системы двенадцати линейных алгебраических уравнений для каждой комбинации $(n, m)$; в частном случае симметрии вращения, т. е. при $m = 0$, число этих уравнений уменьшается до шести. После Ляме задача о равновесии сферы и полой сферы была рассмотрена Вильямом Томсоном в мемуаре 1864 г.; это решение приведено во второй части известного «Трактата по натуральной философии» В. Томсона и П. Тэта [2]. С некоторым видоизменением наиболее простой случай сплошной сферы изложен в курсе Лява [3].

В. Томсон, пользуясь декартовыми координатами, исходит из представления решения уравнений теории упругости в перемещениях через три гармонические функции [1], которые он разыскивает в форме рядов по пространственным гармоническим полиномам $\varphi_n(x, y, z)$. Томсон в противоположность Ляме каждый из таких полиномов определяет целиком по краевым условиям, представляемым в рядах сферических функций Лапласа $Y_n(\vartheta, \varphi)$. Особенно просто доводится до конца в такой форме решение для приводимого теперь во многих учебниках [4] случая сплошной сферы при заданных на ее поверхности перемещениях, несколько более сложным оказывается случай задания напряжений на поверхности. Томсону удалось довести до конца также решение задачи о полой сфере с заданными перемещениями, но для этой же задачи при задании напряжений он ограничился лишь указанием хода составления уравнений, решение которых позволило бы построить указанные выше ряды. Для частного случая симметрии вращения решение для полой сферы при заданных напряжениях было опубликовано в 1942 г. Б. Г. Галеркиным [5]; решение Б. Г. Галеркина, как и решение Ляме, выражено в сферических координатах.

В настоящей работе мы, следуя методу В. Томсона, исходим из решения уравнений теории упругости в форме, предложенной П. Ф. Папковичем; наличие четвертой гармонической функции в этом решении позволяет упростить ход решения и уменьшить объем вычислений; сокращению записей и возможности представить результаты в достаточно отчетливой форме способствует векторная форма, в которой проведено решение с начала до конца. Решение получено как при задании на ограничивающих полую сферу поверхностях перемещений, так и внешних нагрузок. Последний случай, как следует из сказанного выше, повидимому, является новым.

[1] В современной литературе решение уравнений теории упругости в этой форме иногда приписывают Е. Треффтцу.

§ 1. В дальнейшем нам придется все время пользоваться некоторыми свойствами пространственных гармонических функций; поэтому будет уместно здесь их вкратце напомнить.

Декартовы координаты точки обозначаются $x$, $y$, $z$, сферические через $R$, $\vartheta$, $\varphi$, радиус-вектор точки через $\mathbf{R}$, скалярное произведение векторов обозначается точкой, векторное — косым крестом. Пространственная гармоническая функция (вектор) внутри сферы (при $R < R_0$) может быть представлена в форме ряда по пространственным однородным (степени $n$) гармоническим полиномам (полиномам-векторам) $\varphi_n(x, y, z)$ (или $\mathbf{B}_n(x,y,z)$):

$$\varphi_n(x, y, z) = R^n Y_n(\vartheta, \varphi), \qquad \mathbf{B}_n(x, y, z) = R^n \mathbf{Y}_n(\vartheta, \varphi) \tag{1.1}$$

Здесь через $Y_n(\vartheta, \varphi)$ (или $\mathbf{Y}_n(\vartheta, \varphi)$) обозначена поверхностная сферическая функция (вектор) Лапласа $n$-го порядка, представимая в форме

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} P_n^{(m)}(\cos\vartheta)(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi) \tag{1.2}$$

и, следовательно, содержащая $(2n+1)$ постоянных (чисел или векторов) $a_{n0}, \ldots, a_{nm}, b_{n1}; \ldots, b_{nm}$.

Гармоническая вне сферы ($R > R_0$) и обращающаяся в нуль на бесконечности функция (вектор) представима в форме ряда по однородным пространственным гармоническим функциям (векторам) порядка $(-n-1)$, имеющим вид:

$$\varphi_{-n-1} = \frac{1}{R^{n+1}} Y_n(\vartheta, \varphi), \qquad \mathbf{B}_{-n-1} = \frac{1}{R^{n+1}} \mathbf{Y}_n(\vartheta, \varphi) \tag{1.3}$$

Из сказанного следует, что, имея однородный гармонический полином $\varphi_n(x, y, z)$ степени $n$, можно образовать однородную пространственную гармоническую функцию порядка $(-n-1)$

$$\varphi_{-n-1} = \frac{\varphi_n(x, y, z)}{R^{2n+1}} \tag{1.4}$$

и обратно

$$\varphi_n(x, y, z) = R^{2n+1}\varphi_{-n-1}(x, y, z) \tag{1.5}$$

Далее отметим, что значение функций $\varphi_n$ или $\varphi_{-n-1}$ на поверхности сферы $R = R_0$ может быть, как это сразу следует из (1.1) или (1.3), записано в форме

$$R_0^n R^{-n}\varphi_n(x, y, z), \qquad \frac{R^{n+1}}{R_0^{n+1}}\varphi_{-n-1}(x, y, z) \tag{1.6}$$

Эта форма представления поверхностных сферических функций $n$-го порядка будет использована ниже.

Примером гармонического пространственного вектора $n$-й степени может служить $\operatorname{grad}\varphi_{n+1}$, тогда как $\operatorname{div}\mathbf{B}_{n+1}$ является пространственной гармонической функцией $n$-й степени, а $\operatorname{rot}\mathbf{B}_{n+1}$ — вектором той же степени; точно так же $\operatorname{grad}\varphi_{-n}$ будет однородным сферическим пространственным вектором порядка $(-n-1)$, $\operatorname{div}\mathbf{B}_{-n}$ (и $\operatorname{rot}\mathbf{B}_{-n}$) — пространственной однородной сферической функцией (вектором) того же порядка.

Из сказанного сразу же следует, что выражение

$$\mathbf{K}(\mathbf{B}_n) = \operatorname{grad} R^{2n+3} \operatorname{div} \frac{\mathbf{B}_n}{R^{2n+1}} \tag{1.7}$$

представляет однородный гармонический пространственный вектор $n$-й степени. Этот вектор имеет основное значение в последующем наряду с другим вектором

$$\mathbf{T}(\mathbf{B}_n) = R^{2n+1} \operatorname{grad} \frac{\operatorname{div} \mathbf{B}_n}{R^{2n-1}} \tag{1.8}$$

также однородным, гармоническим $n$-й степени. Мы будем рассматривать также однородные пространственные гармонические векторы, порядка

$$\mathbf{K}(\mathbf{B}_{-n-1}) = \operatorname{grad} \frac{1}{R^{2n-1}} \operatorname{div} R^{2n+1} \mathbf{B}_{-n-1} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{B}_{-n-1}) = \frac{1}{R^{2n+1}} \operatorname{grad} R^{2n+3} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n-1} \tag{1.10}$$

порядок которых, как указано, $(-n-1)$. Отметим еще, что из теоремы Эйлера об однородных функциях следуют соотношения [1]

$$\mathbf{R}\cdot\operatorname{grad}\varphi_n = n\varphi_n, \qquad (\mathbf{R}\cdot\operatorname{grad})\,\mathbf{B}_n = n\mathbf{B}_n \tag{1.11}$$

имеющие место при любом показателе $n$ однородности функции (вектора) $\varphi_n$ $(\mathbf{B}_n)$. Конечно, соотношение (1.11) выполняется независимо от того, являются ли однородные выражения $\varphi_n$ и $\mathbf{B}_n$ гармоническими или нет.

Из определения вектора $\mathbf{K}(\mathbf{B}_n)$ как градиентного и гармонического следует, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{K}(\mathbf{B}_n) = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{K}(\mathbf{B}_n) = 0 \tag{1.12}$$

для любых (положительных и отрицательных) $n$. Далее, имея в виду, что

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\varphi\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{div}\mathbf{A} \\ \operatorname{grad} R^{2n+1} = (2n+1)\,R^{2n-1}\,\mathbf{R} \\ \operatorname{rot}\varphi\mathbf{A} = \operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{A} + \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A} \end{gathered}$$

и используя (1.11), легко получим соотношения (1.13)

$$\operatorname{rot}\mathbf{T}(\mathbf{B}_n) = (2n+1)\,\mathbf{R}\times\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n, \qquad \operatorname{div}\mathbf{T}(\mathbf{B}_n) = -(2n+1)\,n\operatorname{div}\mathbf{B}_n$$

из которых при замене $n$ на $(-n-1)$ найдем также

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{T}(\mathbf{B}_{-n-1}) &= -(2n+1)\,\mathbf{R}\times\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n \\ \operatorname{div}\mathbf{T}(\mathbf{B}_{-n-1}) &= -(2n+1)(n+1)\operatorname{div}\mathbf{B}_{n-1} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Приведем в раскрытой форме выражения операций $\mathbf{K}$ и $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{K}(\mathbf{B}_n) = -(2n+1)\operatorname{grad}\mathbf{R}\cdot\mathbf{B}_n + 2\mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{B}_n + R^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n \tag{1.15}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{B}_n) = -(2n-1)\,\mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{B}_n + R^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n \tag{1.16}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{B}_{-n-1}) = (2n+1)\operatorname{grad}\mathbf{R}.\mathbf{B}_{-n-1} + 2\mathbf{R}\operatorname{div}B_{-n-1} + R^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_{-n-1} \tag{1.17}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{B}_{-n-1}) = (2n+3)\,\mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{B}_{-n-1} + R^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_{-n-1} \tag{1.18}$$

---

[1] Здесь $(\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad})\,\mathbf{B}$ обозначает производную вектора $\mathbf{B}$ по вектору $\mathbf{A}$.

Исключив из (1.15) и (1.16) вектор $\mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{B}_n$, найдем

$$\operatorname{grad}\mathbf{R}\cdot\mathbf{B}_{-n}=-\frac{1}{2n+1}\mathbf{K}(\mathbf{B}_n)-\frac{2}{4n^2-1}\mathbf{T}(\mathbf{B}_n)+\frac{R^2}{2n-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n \qquad (1.19)$$

и при замене $n$ на $(-n-1)$

$$\operatorname{grad}\mathbf{R}\cdot\mathbf{B}_{-n-1}=\frac{1}{2n+1}\mathbf{K}(\mathbf{B}_{-n-1})-\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}\mathbf{T}(\mathbf{B}_{-n-1})-$$

$$-\frac{R^2}{2n+3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_{-n-1} \qquad (1.20)$$

Эти соотношения имеют первостепенное значение для последующего; с их помощью из выражения негармонического вектора $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n$, который входит существенным образом в решение П. Ф. Папковича, выделяются гармонические слагаемые $\mathbf{K}(\mathbf{B}_n)$ и $\mathbf{T}(\mathbf{B}_n)$, представляющие однородные векторы степени $n$, и негармоническая часть $R^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n$.

**§ 2.** Напомним теперь, что решение уравнений теории упругости для вектора перемещения $\mathbf{u}$ в форме П. Ф. Папковича записывается в виде

$$\mathbf{u}=\frac{4(m-1)}{m}\mathbf{B}-\operatorname{grad}\mathbf{R}\cdot\mathbf{B}-\operatorname{grad}B^\circ \qquad (2.1)$$

где $\mathbf{B}$ — гармонический вектор, $B^\circ$ — гармоническая функция. Представляем их в форме рядов по однородным гармоническим векторам $\mathbf{B}_n$ (однородным гармоническим функциям $\overset{\circ}{B}_{n-1}$)

$$\mathbf{B}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{B}_n,\qquad B^\circ=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overset{\circ}{B}_{n-1} \qquad (2.2)$$

В соответствии с этим будем иметь

$$\mathbf{u}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{u}_n,\qquad \mathbf{u}_n=\frac{4(m-1)}{m}\mathbf{B}_n-\operatorname{grad}\mathbf{R}\cdot\mathbf{B}_n-\operatorname{grad}\overset{\circ}{B}_{n-1} \qquad (2.3)$$

Теперь при помощи (1.19) или, что то же, (1.20) можно написать

$$\mathbf{u}_n=\mathbf{U}_n-\left\{\frac{1}{2n-1}R^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n+\operatorname{grad}\overset{\circ}{B}_{n-1}\right\} \qquad (2.4)$$

где $\mathbf{U}_n$ — гармоническая часть $\mathbf{u}_n$ — определяется соотношением

$$\mathbf{U}_n=\frac{4(m-1)}{m}\mathbf{B}_n+\frac{1}{2n+1}\mathbf{K}(\mathbf{B}_n)+\frac{2}{4n^2-1}\mathbf{T}(\mathbf{B}_n) \qquad (2.5)$$

Здесь $n$ принимает все целочисленные (положительные, отрицательные, нуль) значения.

Выражение вектора $\mathbf{u}$ запишется в форме

$$\mathbf{u}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{U}_n-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{R^2}{2n-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n+\operatorname{grad}B_{n-1}^{(\circ)}\right] \qquad (2.6)$$

Во второй сумме заменим индекс суммирования $n$ на $n+2$. Имеем

$$\mathbf{u}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{u}_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{U}_n-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{R^2}{2n+3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_{n+2}+\operatorname{grad}B_{n+1}^{(0)}\right) \tag{2.7}$$

Отметим, что слагаемые под знаком суммы представляют: первое — произведение $R^2$ на однородный гармонический вектор $n$-го порядка, а второе — однородный гармонический вектор того же порядка.

Перейдем теперь к решению указанных выше краевых задач.

**§ 3.** Пусть на поверхностях $R=R_0$ и $R=R_1$, ограничивающих полую сферу, заданы перемещения

$$(\mathbf{u})_{R=R_0}=\mathbf{u}^{(0)},\qquad (\mathbf{u})_{R=R_1}=\mathbf{u}^{(1)} \tag{3.1}$$

Эти краевые данные представим в форме рядов по поверхностным сферическим функциям Лапласа

$$\mathbf{u}^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{Y}_n^{(0)}(\vartheta,\varphi),\qquad \mathbf{u}^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{Y}_n^{(0)}(\vartheta,\varphi) \tag{3.2}$$

и построим гармонический внутри нашей области (полой сферы) вектор $\mathbf{V}$, который на поверхностях $R=R_0$ и $R=R_1$ принимает те же значения (3.2), что искомый вектор перемещения $\mathbf{u}$:

$$(\mathbf{V})_{R=R_0}=\mathbf{u}^{(0)},\qquad (\mathbf{V})_{R=R_1}=\mathbf{u}^{(1)} \tag{3.3}$$

Вектор $\mathbf{V}$ легко построить. Полагаем

$$\mathbf{V}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{V}_n \tag{3.4}$$

откуда и из (2.7) следует, что

$$(\mathbf{u}_n)_{R=R_0}=(\mathbf{V}_n)_{R=R_0},\qquad (\mathbf{u}_n)_{R=R_1}=(\mathbf{V}_n)_{R=R_1} \tag{3.5}$$

На поверхности $R=R_0$ слагаемые этого ряда, представляющие поверхностные сферические векторы порядка $n$, согласно (1.6) будут

$$R_0^{\,n}(R^{-n}\mathbf{V}_n),\qquad R_0^{\,-n-1}(R^{n+1}\mathbf{V}_{-n-1}).$$

Поэтому на основании (3.2) и (3.3) получаем два уравнения:

$$\begin{aligned}R_0^{\,n}(R^{-n}\mathbf{V}_n)+R_0^{\,-n-1}(R^{n+1}\mathbf{V}_{-n-1})&=\mathbf{Y}_n^{(0)}(\vartheta,\varphi)\\ R_1^{\,n}(R^{-n}\mathbf{V}_n)+R_1^{\,-n-1}(R^{n+1}\mathbf{V}_{-n-1})&=\mathbf{Y}_n^{(1)}(\vartheta,\varphi)\end{aligned} \tag{3.6}$$

решение которых дает

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_n&=\frac{R_0^{\,n+1}\mathbf{Y}_n^{(0)}-R_1^{\,n+1}\mathbf{Y}_n^{(1)}}{R_0^{\,2n+1}-R_1^{\,2n+1}}\,R^n\\ \mathbf{V}_{-n-1}&=-\frac{R_1^{\,n}\mathbf{Y}_n^{(0)}-R_0^{\,n}\mathbf{Y}_1^{(1)}}{R_0^{\,2n+1}+R_1^{\,2n+1}}\left(\frac{R_0R_1}{R}\right)^{n+1}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Отметим, что, заменив в выражении $\mathbf{V}_n$ индекс $n$ на $(-n-1)$, получим $\mathbf{V}_{-n-1}$, если условимся считать $\mathbf{Y}_{-n-1}^{(0)}$ и $\mathbf{Y}_{-n-1}^{(1)}$ соответственно равными $\mathbf{Y}_n^{(0)}$ и $\mathbf{Y}_n^{(1)}$.

Теперь, основываясь на (2.7) и (3.5), можем записать краевые условия (3.1) в виде

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_0{}^n R^n \left(\mathbf{U}_n - \mathbf{V}_n - \operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)}\right) &= R_0{}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{R_0{}^n R^{-n}}{2n+3} \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_1{}^n R^n \left(\mathbf{U}_n - \mathbf{V}_n - \operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)}\right) &= R_1{}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{R_1{}^n R^{-n}}{2n+3} \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Как и выше [см. (3.6)], выделяем справа и слева слагаемые, представляющие поверхностные сферические функции одинакового порядка $n$; приходим к соотношениям

$$\frac{R_0{}^n}{R^n}\left[\mathbf{U}_n - \mathbf{V}_n - \operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)}\right] + \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n+1}\left[\mathbf{U}_{-n-1} - \mathbf{V}_{-n-1} - B_{-n}^{(0)}\right] =$$

$$= \frac{R_0{}^2}{2n+3}\left(\frac{R_0}{R}\right)^n \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2} - \frac{R_0{}^2}{2n-1}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{n+1} \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} \tag{3.9}$$

$$\frac{R_1{}^n}{R^n}\left[\mathbf{U}_n - \mathbf{V}_n - \operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)}\right] + \left(\frac{R}{R_1}\right)^{n+1}\left[\mathbf{U}_{-n-1} - \mathbf{V}_{-n-1} - \operatorname{grad} B_{-n}^{(0)}\right] =$$

$$= \frac{R_1{}^2}{2n+3}\left(\frac{R_1}{R}\right)^n \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2} - \frac{R_1{}^2}{2n-1}\left(\frac{R}{R_1}\right)^{n+1} \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} \tag{3.10}$$

из которых сразу же находим величины в квадратных скобках:

$$\mathbf{U}_n - \mathbf{V}_n - \operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)} = \frac{R_0{}^{2n+3} - R_1{}^{2n+3}}{R_0{}^{2n+1} - R_1{}^{2n+1}} \frac{\operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2}}{2n+3} -$$

$$- \frac{R_0{}^2 - R_1{}^2}{R_0{}^{2n+1} - R_1{}^{2n+1}} \frac{R^{2n+1}}{2n-1} \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} \tag{3.11}$$

$$\mathbf{U}_{-n-1} - \mathbf{V}_{-n-1} - \operatorname{grad} B_{-n}^{(0)} = - \frac{R_0{}^2 - R_1{}^2}{R_0{}^{2n+1} - R_1{}^{2n+1}} \frac{1}{2n+3}\left(\frac{R_0 R_1}{R}\right)^{2n+1} \times$$

$$\times \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2} - \frac{(R_0 R_1)^2 \left(R_0{}^{2n-1} - R_1{}^{2n-1}\right)}{R_0{}^{2n+1} - R_1{}^{2n+1}} \frac{1}{2n-1} \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} \tag{3.12}$$

Заметим, что (3.12) получается из (3.11) путем замены $n$ на $(-n-1)$. В дальнейшем для сокращения письма приводится лишь одна из такой пары формул, обозначенная номером, снабженным звездочкой; вторая формула пары получится, как сказано, заменой $n$ на $(-n-1)$.

В (3.11) каждое слагаемое левой и правой частей представляет однородный пространственный гармонический вектор $n$-й степени, а в (3.12) — такой же вектор $(-n-1)$ порядка. Можно приравнять в (3.11) градиентный вектор $\operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)}$ также градиентному вектору, стоящему справа:

$$\operatorname{grad} B_{n-1}^{(0)} = - \frac{R_0{}^{2n+3} - R_1{}^{2n+3}}{R_0{}^{2n+1} - R_1{}^{2n+1}} \frac{1}{2n+3} \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2} \tag{3.13*}$$

Об этом упрощении, которое достигается введением в решение П. Ф. Папковича четвертой гармонической функции, упоминалось выше.

Соотношения (3.11) и (3.12) теперь принимают вид:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{V}_n - \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{R^{2n+1}}{2n-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} \tag{3.14*}$$

или после замены $\mathbf{U}_n$ его значением (2.5)

$$\frac{4(m-1)}{m} \mathbf{B}_n + \frac{1}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \frac{2}{4n^2-1} \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) + \tag{3.15*}$$

$$+ \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{R^{2n+1}}{2n-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} = \mathbf{V}_n$$

Из этой пары соотношений гармонический вектор $\mathbf{B}_n$ должен быть выражен через построенный выше гармонический вектор $\mathbf{V}_n$. Но прежде чем обратиться к решению этой задачи, заметим, что по (3.13)*, (3.14)* и (3.4) выражению (2.7) можно придать вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n+3} - R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2} \right] - \tag{3.16}$$

$$- (R_0^2 - R_1^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{R^{2n+1}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1}$$

Изменив в первой сумме индекс суммирования $n+2$ на $n$, а во второй $(-n+1)$ на $n$, получим также

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left[ R^2 - \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} \left( \frac{R_0 R_1}{R} \right)^{2n-3} \right] \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n \tag{3.17}$$

Величина в квадратных скобках под знаком суммы при $R = R_0$ и $R = R_1$ обращается в нуль. По (3.3) и (3.1) это подтверждает выполнение краевых условий. Из (3.17) следует далее, что знания самого вектора $\mathbf{B}_n$ не требуется; достаточно найти его дивергенц. Для этого возвратимся к (3.15); тогда, применив (1.12) и (1.13), получим после вычисления операции div над (3.15):

$$\left( \frac{4(m-1)}{m} - \frac{2n}{2n-1} \right) \operatorname{div} \mathbf{B}_n - \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \frac{(2n+1)n}{2n-1} R^{2n-1} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} = \operatorname{div} \mathbf{V}_n \tag{3.18*}$$

Здесь было использовано, что

$$\operatorname{div} R^{2n+1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} = (2n+1) R^{2n-1} \mathbf{R} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} =$$

$$= -(2n+1) n R^{2n-1} \operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1}$$

причем последнее равенство написано на основании (1.11).

Во второе соотношение пары (3.18)* входят $\operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1}$ и $\operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2}$, поэтому после замены $n+2$ на $n$ и, значит, $(-n-1)$ на $(-n+1)$, в него войдут те же неизвестные $\operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1}$ и $\operatorname{div} \mathbf{B}_n$, что и в первое соотношение этой пары.

Из этих двух уравнений с двумя неизвестными выражаем $\operatorname{div} \mathbf{B}_n$ через $\operatorname{div} \mathbf{V}_n$ и $\operatorname{div} \mathbf{V}_{-n+1}$, который будет стоять в правой части второго соотношения (3.18)* после указанной замены.

Проделав это не очень громоздкое вычисление, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_n = \frac{1}{\Delta_n}\left[\frac{4(m-1)}{m} - \frac{2(n-1)}{2n-1}\right]\operatorname{div} \mathbf{V}_n + \tag{3.19}$$

$$+\frac{1}{\Delta_{-n+1}}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}\frac{(2n+1)n}{2n-1}R^{2n-1}\operatorname{div} \mathbf{V}_{-n+1}$$

Здесь $\Delta_n$ — определитель упомянутой системы двух уравнений; он равен

$$\Delta_n = \left[\frac{4(m-1)}{m} - \frac{2n}{2n-1}\right]\left[\frac{4(m-1)}{m} - \frac{2(n-1)}{2n-1}\right] - \tag{3.20}$$

$$-\frac{(R_0^2-R_1^2)^2(R_0R_1)^{2n-3}}{(R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3})(R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1})}\cdot\frac{(n-1)n(2n-3)(2n+1)}{(2n-1)^2}$$

Заметим также, что

$$\Delta_n = \Delta_{-n+1} \tag{3.21}$$

Как и следовало ожидать, $\operatorname{div} \mathbf{B}_n$ оказался однородной гармонической функцией степени $(n-1)$.

Достойна быть отмечена простота, с которой удалось получить $\operatorname{div} \mathbf{B}_n$ из соотношений (3.18)*; на первый взгляд могло представиться, что эта задача свелась к решению бесконечной системы.

Остается подставить найденное значение $\operatorname{div} \mathbf{B}_n$ в (3.17). Сумма в этой формуле разобьется на две суммы, соответствующие двум слагаемым в (3.19); объединив эти суммы в одну путем замены индекса суммирования, получим в окончательном виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\Delta_n}\left\{\left(\frac{4(m-1)}{m} - \frac{2(n-1)}{2n-1}\right)\left[R^2 - \frac{R_0^{2n-1}-R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}} + \right.\right.$$

$$\left.+\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\left(\frac{R_0R_1}{R}\right)^{2n-3}\right]\operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{V}_n -$$

$$-\frac{(R_0^2-R_1^2)(R_0R_1)^{2n-3}}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\frac{(2n-3)(n-1)}{2n-1}\left[R^2 - \frac{R_0^{2n-1}-R_1^{2n-1}}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}(R_0R_1)^2 - \right.$$

$$\left.\left.-\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}R^{2n+1}\right]\operatorname{grad}\frac{\operatorname{div} \mathbf{V}_n}{R^{2n-1}}\right\} \tag{3.22}$$

Искомый вектор перемещения представлен через гармонический вектор $\mathbf{V}$, определяемый непосредственно по краевым условиям.

**§ 4.** Переходим к рассмотрению случая заданных на поверхностях $R = R_0$ и $R = R_1$ внешних нагрузок. Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{P}_r$, равный напряжению на площадке любой сферической поверхности $R = \mathrm{const}$; проекции этого вектора на оси сферической системы координат представляют составляющие тензора напряжений $\sigma_R$, $\tau_{R\vartheta}$, $\tau_{R\varphi}$. Вектор $\mathbf{P}_r$ связан с вектором перемещения $\mathbf{u}$ соотношением [3, стр. 145]

$$\frac{1}{2G} R\mathbf{P}_r = \frac{1}{m-2} \mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{R} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} \tag{4.1}$$

Из (2.1) следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{2(m-2)}{m} \operatorname{div} \mathbf{B}, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{4(m-1)}{m} \operatorname{rot} \mathbf{B} \tag{4.2}$$

Представляя далее искомый вектор $\mathbf{u}$ в форме ряда (2.3) и применив правило вычисления операции $(\mathbf{R} \cdot \operatorname{grad})$ над вектором с показателем порядка однородности $n$, получим

$$(\mathbf{R} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} = \left[\frac{4(m-1)}{m} n\mathbf{B}_n + \frac{n}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \frac{2n}{4n^2-1} \mathbf{T}(\mathbf{B}_n)\right] - \\ - \left\{\frac{n}{2n-1} R^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n + (n-2) \operatorname{grad} B_{n-1}^{(0)}\right\} \tag{4.3}$$

В выражение $R\mathbf{P}_r$ входят еще (4.1) и (4.2) векторы $\mathbf{R} \operatorname{div} \mathbf{B}$ и $\mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}$. Первый выражаем по (1.16). Вычисляя второй, заметим, что

$$\operatorname{grad} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{R} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} + \mathbf{B} + \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} \tag{4.4}$$

и, значит,

$$\operatorname{grad} \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_n = (n+1) \mathbf{B}_n + \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}_n$$

Применим далее соотношение (1.19). По проведении всех этих преобразований приведем выражение вектора $R\mathbf{P}_r$ к виду

$$R\mathbf{P}_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R\mathbf{P}_r^{(n)}, \quad \frac{R\mathbf{P}_r^{(n)}}{2G} = \mathbf{Q}_r^{(n)} - (n-2)\left[\frac{R^2}{2n-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_n + \operatorname{grad} B_{n-1}^{(0)}\right] \tag{4.5}$$

Здесь $\mathbf{Q}_r^{(n)}$ — однородный пространственный гармонический вектор:

$$\mathbf{Q}_r^{(n)} = \frac{2(m-1)}{m} (n-1) \mathbf{B}_n + \frac{n-2+2/m}{2n+1} \mathbf{K}(\mathbf{B}_n) + \\ + \frac{2}{4n^2-1}\left[n\left(1 - \frac{2}{m}\right) - 2 + \frac{1}{m}\right] \mathbf{T}(\mathbf{B}_n) \tag{4.6}$$

Таким образом, выражение вектора $R\mathbf{P}_r$ подобно выражению (2.7) вектора $\mathbf{u}$ мы представили в форме

$$\frac{R\mathbf{P}_r}{2G} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{R\mathbf{P}_r^{(n)}}{2G} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{Q}_r^{(n)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\left(\frac{R^2}{2n+3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2} + \operatorname{grad} \operatorname{div} B_{n+1}^{(0)}\right) \tag{4.7}$$

Значения вектора $R\mathbf{P}_r$ заданы на поверхностях $R = R_0$ и $R = R_1$:

$$R_0 (\mathbf{P}_r)_{R=R_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n^{(0)}, \qquad R_1 (\mathbf{P}_r)_{R=R_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Y}_n^{(1)} \tag{4.8}$$

Теперь, подобно тому как это было сделано в п. 3, введем в рассмотрение гармонический внутри полой сферы вектор $\mathbf{\Pi}_r$, принимающий на поверхностях те же значения (4.8), что и вектор $R\mathbf{P}_r$:

$$(\mathbf{\Pi}_r)_{R=R_0} = R_0 (\mathbf{P}_r)_{R=R_0}, \qquad (\mathbf{\Pi}_r)_{R=R_1} = R_1 (\mathbf{P}_r)_{R=R_1} \tag{4.9}$$

Полагая [ср. (3.5)] теперь

$$\mathbf{\Pi}_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} \tag{4.10}$$

получим подобно (3.7)

$$\mathbf{\Pi}_r^{(n)} = \frac{R_0^{n+1}\mathbf{Y}_n^{(0)} - R_1^{n+1}\mathbf{Y}_n^{(1)}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^n \tag{4.11*}$$

Краевые условия (4.8) теперь могут быть записаны в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_0^n R^{-n}\left[\mathbf{Q}_r^{(n)} - \frac{1}{2G}\mathbf{\Pi}_r^{(n)} - n \operatorname{grad} B_{n-1}^{(0)}\right] = \\ = R_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nR_0^n R^{-n}}{2n+3} \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_1^n R^{-n}\left[\mathbf{Q}_r^{(n)} - \frac{1}{2G}\mathbf{\Pi}_r^{(n)} - n \operatorname{grad} B_{n-1}^{\circ}\right] = \\ = R_1^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nR_1^n R^n}{2n+3} \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2} \tag{4.12}$$

Задача, к которой свелось определение вектора $\mathbf{P}_r$ по краевым условиям (4.8), оказалась полностью аналогичной рассмотренной в п. 3 задаче определения вектора $\mathbf{u}$ по условиям (3.1); чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить запись условий (4.12) и (3.8). Поэтому остается лишь повторить выкладки § 3. Получим вместо (3.13)* и (3.14)*

$$\operatorname{grad} B_{n+1}^{(0)} = -\frac{1}{2n+3}\frac{R_0^{2n+3} - R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{n+2} \tag{4.13*}$$

$$\mathbf{Q}_r^{(n)} = \frac{1}{2G}\mathbf{\Pi}_r^{(n)} + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}}\frac{n+1}{2n-1} R^{2n+1} \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_{-n+1} \tag{4.14*}$$

а вместо (3.17), (3.19)

$$\frac{R\mathbf{P}_r}{2G} = \frac{\mathbf{\Pi}_r}{2G} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n-2}{2n-1}\left[R^2 - \frac{R_0^{2n-1} - R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}} + \right. \\ \left. + \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n-3} - R_1^{2n-3}}\left(\frac{R_0 R_1}{R}\right)^{2n-3}\right] \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{B}_n \tag{4.15}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_n = -\frac{1}{2GD_n}\left\{\frac{2\left[m(n-1)^2 + (m-2)(n-1) + m - 1\right]}{(2n-1)\,m} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} + \right. \\ \left. + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2n-1}\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_0^{2n+1} - R_1^{2n+1}} R^{2n-1} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}_r^{(-n+1)}\right\} \tag{4.16}$$

где обозначено [ср. (3.20)]

$$D_n = D_{-n+1} = \frac{1}{(2n-1)^2} \times$$

$$\times \left\{(n-2)(n-1)n(n+1)(2n-3)(2n+1)\frac{(R_0^2-R_1^2)^2(R_0R_1)^{2n-3}}{(R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3})(R_0^{2n-1}-R_1^{2n-1})} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{m^2}[mn^2-(m-2)n+(m-1)][m(n-1)^2+(m-2)(n+1)+m-1]\right\} \qquad (4.17)$$

Выражение (4.16) для $\operatorname{div}\mathbf{B}_n$ подставляем в (4.15); находим значение вектора напряжения $\mathbf{P}_r$ через гармонический вектор $\mathbf{\Pi}_r$, определяемый согласно (4.10) и (4.11) по краевым данным [ср. (3.22)]:

$$R\mathbf{P}_r = \mathbf{\Pi}_r + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n-2}{D_n^*}\left\{2\left[(n-1)^2+\frac{m-2}{m}(n-1)+\frac{m-1}{m}\right]\times\right.$$

$$\times\left[R^2 - \frac{R_0^{2n-1}-R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}} + \frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\left(\frac{R_0R_1}{R}\right)^{2n-3}\right]\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(n)} -$$

$$-(n-1)(n+1)(2n+3)\left[R^2 - \frac{R_0^{2n-1}-R_1^{2n-1}}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}(R_0R_1)^2 - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{(R_0^2-R_1^2)R^{2n+1}}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}\right]\frac{(R_0^2-R_1^2)(R_0R_1)^{2n-3}}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\operatorname{grad}\frac{\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(n)}}{R^{2n-1}}\right\} \qquad (4.18)$$

Здесь обозначено

$$D_n^* = (2n-1)^2 D_n \qquad (4.19)$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках под знаком суммы при $R=R_0$ и $R=R_1$ обращается в нуль; таким образом, решение удовлетворяет краевым условиям.

В задаче п. 3 получение формулы (3.22) завершало решение задачи; в рассматриваемом же случае формула (4.18) дает лишь значение напряжения на площадке $R=\text{const}$, т. е. напряжений $\sigma_R$, $\tau_{R\vartheta}$, $\tau_{R\varphi}$. Для разыскания остальных напряжений нужно еще найти вектор перемещения $\mathbf{u}$. Это вычисление будет проведено ниже (§ 5), а пока сделаем еще два замечания.

Во-первых, следует отметить, что сумма нормальных напряжений [см. (4.2)]

$$\sigma_R + \sigma_\vartheta + \sigma_\varphi = 2G\frac{m+1}{m-2}\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{4G(m+1)}{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{div}\mathbf{B}_n \qquad (4.20)$$

сразу же находится по (4.16):

$$\sigma_R + \sigma_\vartheta + \sigma_\varphi =$$

$$= -\frac{2(m+1)}{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2n-1}{D_n^*}\left\{\left[(n-1)^2+\frac{m-2}{m}(n-1)+\frac{m-1}{m}\right]2\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(n)} - \right.$$

$$\left. - \frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}(R_0^2-R_1^2)(R_0R_1)^{2n-3}\operatorname{div}\frac{\mathbf{\Pi}_r^{(n)}}{R^{2n-1}}\right\} \qquad (4.21)$$

Во-вторых, внешние силы, приложенные к сфере, должны удовлетворять условиям статики: должен обращаться в нуль их главный вектор

$$\mathbf{V} = \iint\limits_{\Sigma_0} [R_0^2 (\mathbf{P}_r)_{R=R_0} - R_1^2 (\mathbf{P}_r)_{R=R_1}]\, do^* = 0 \tag{4.22}$$

и их главный момент

$$\mathbf{M} = \iint\limits_{\Sigma_0} \mathbf{r} \times [R_0^3 (\mathbf{P}_r)_{R=R_0} - R_1^3 (\mathbf{P}_r)_{R=R_1}]\, do^* = 0 \tag{4.23}$$

Интегрирование здесь производится по поверхности единичной сферы $\Sigma_0$, через

$$\mathbf{r} = \frac{1}{R_0}\mathbf{R}_0 = \frac{1}{R_1}\mathbf{R}_1$$

обозначен радиус-вектор точки поверхности $\Sigma_0$, а через $do^*$ — элемент площади на ней.

Согласно известному свойству поверхностных сферических функций в интеграле (4.22) выпадут после подстановки согласно (4.8) поверхностных значений вектора $\mathbf{P}_r$ все слагаемые, кроме $\mathbf{Y}_0^{(1)}$ и $\mathbf{Y}_0^{(0)}$, а в интеграле (4.23) все, кроме $\mathbf{Y}_1^{(0)}$ и $\mathbf{Y}_1^{(1)}$. Получим вместо (4.22)

$$\mathbf{V} = \iint\limits_{\Sigma_0} (R_0 \mathbf{Y}_0^{(0)} - R_1 \mathbf{Y}_1^{(1)})\, do^* =$$

$$= (R_0 - R_1) \iint\limits_{\Sigma_0} \mathbf{\Pi}_r^{(0)}\, do^* = 4\pi (R_0 - R_1)\, \mathbf{\Pi}_r^{(0)} = 0 \tag{4.24}$$

Мы воспользовались здесь выражением (4.11) для $n = 0$. Итак

$$\mathbf{\Pi}_r^{(0)} = 0 \tag{4.25}$$

т. е. в разложении в ряд гармонической функции $\mathbf{\Pi}_r$ должно отсутствовать постоянное слагаемое. Аналогично преобразуем выражение (4.23):

$$\mathbf{M} = \iint\limits_{\Sigma_0} \mathbf{r} \times [R_0^2 \mathbf{Y}_1^{(0)} - R_1^2 \mathbf{Y}_1^{(1)}]\, do^*$$

Сомножитель при $\mathbf{r}$ под знаком интеграла представляет на поверхности единичной сферы вектор, который внутри этой сферы по (4.11) равен

$$R\,(R_0^2 \mathbf{Y}_1^{(0)} - R_1^2 \mathbf{Y}_1^{(1)}) = (R_0^3 - R_1^3)\, \mathbf{\Pi}_r^{(1)}$$

Поэтому, преобразуя поверхностный интеграл в интеграл по объему единичной сферы, получим

$$\mathbf{M} = (R_0^3 - R_1^3) \iint\limits_{\Sigma_0} \mathbf{r} \times \mathbf{\Pi}_r^{(1)}\, do^* = (R_0^3 - R_1^3) \iiint \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_r^{(1)}\, d\tau$$

Но $\mathbf{\Pi}_r^{(1)}$ — вектор, линейно зависящий от координат, и, значит, $\operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_r^{(1)}$ — постоянный вектор. Получаем

$$\mathbf{M} = \frac{4\pi}{3} (R_0^3 - R_1^3) \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}_r^{(1)} = 0$$

т. е. вектор $\mathbf{\Pi}_r^{(1)}$ должен быть градиентным:

$$\mathbf{\Pi}_r^{(1)} = \operatorname{grad} H \tag{4.26}$$

где $H$ — некоторая квадратичная форма от $x$, $y$, $z$.

§ 5. Переходим к составлению выражения вектора перемещения $\mathbf{u}$. Вычисление ведется в следующей последовательности. В формуле (4.13)* выражаем вектор $\mathbf{Q}_r^{(n)}$ согласно соотношениям (4.6), (1.15) и (1.6) через $\mathbf{B}_n$, причем $\operatorname{grad} \mathbf{R}\cdot\mathbf{B}_n$ заменим по (4.4).

Получим соотношение, связывающее $\mathbf{B}_n$, $\mathbf{R}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}_n$ и операции над $\operatorname{div}\mathbf{B}_n$:

$$-n\left(n-3+\frac{4}{m}\right)\mathbf{B}_n-\left(n-2+\frac{2}{m}\right)\mathbf{R}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}_n+\frac{2}{m}\mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{B}_n+$$

$$+\frac{n-2}{2n-1}R^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n=\frac{\Pi_r^{(n)}}{2G}+\frac{n+1}{2n-1}\,\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}R^{2n+1}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_{-n+1} \quad (5.1)$$

Совершив операцию rot над обеими частями этого выражения, получим

$$\frac{2(m-1)}{m}(n-1)\operatorname{rot}\mathbf{B}_n+2\left(\frac{n-2}{2n-1}-\frac{1}{m}\right)\mathbf{R}\times\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n=$$

$$=\frac{1}{2G}\operatorname{rot}\Pi_r^{(n)}+\frac{(n+1)(2n+1)}{2n-1}\,\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}\,R^{2n-1}\mathbf{R}\times\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_{-n+1} \quad (5.2)$$

Выражение вектора $\mathbf{u}$ имеет вид (2.3); заменив $\operatorname{grad}\mathbf{R}\cdot\mathbf{B}$ по (4.4), а $\operatorname{grad} B_{n-1}^{(0)}$ по (4.13)*, можем написать также

$$\mathbf{u}_n=-\left(n-3+\frac{4}{m}\right)\mathbf{B}_n-\mathbf{R}\times\operatorname{rot}\mathbf{B}_n+\frac{1}{2n-1}\,\frac{R_0^{2n-1}-R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n \quad (5.3)$$

Из этого выражения при помощи (5.1) и (5.2) исключим $\mathbf{B}_n$ и $\operatorname{rot}\mathbf{B}_n$. Тогда $\mathbf{u}_n$ выразится только через $\operatorname{div}\mathbf{B}_n$ и $\operatorname{div}\mathbf{B}_{-n+1}$.

В членах, содержащих последнюю величину, заменим при суммировании индекс $n$ на $(-n+1)$.

Получим выражение

$$\mathbf{u}=\frac{1}{2G}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\Pi_r^{(n)}-\frac{1}{n(n-1)}\mathbf{R}\times\operatorname{rot}\Pi_r^{(n)}\right]-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left[R^2-\frac{R_0^{2n-1}-R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}+\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\left(\frac{R_0R_1}{R}\right)^{2n-3}\right]\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n+$$

$$+2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}\left[\frac{2n+m-1}{m(n-1)}R^2+(2n-3)\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\left(\frac{R_0R_1}{R}\right)^{2n-3}\right]\times$$

$$\times\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{B}_n+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}\left[\frac{2}{m}\{n(m-4)-2m+2\}-\right.$$

$$\left.-(n-2)(2n-3)\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\left(\frac{R_0R_1}{R}\right)^{2n-3}\right]\mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{B}_n \quad (5.4)$$

Задачу можно считать решенной, так как значение $\operatorname{div}\mathbf{B}_n$ было выше найдено через $\Pi_r^{(n)}$ и $\Pi_r^{(-n+1)}$, т. е. через исходные данные.

Остается сделать подстановку, заменив $\operatorname{div}\mathbf{B}_n$ (5.4) его значением согласно формуле (4.16)*.

Найдем

$$2G\mathbf{u} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\Pi_r^{(n)}}{n} - \frac{\mathbf{R}\times\operatorname{rot}\Pi_r^{(n)}}{n(n-1)}\right] +$$

$$+\frac{2}{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{D_n^*}\left[m(n-1)^2+(m-2)(n-1)+m-1\right]\left[R^2-\frac{R_0^{2n-1}-R_1^{2n-1}}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}+\right.$$

$$\left.+\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\left(\frac{R_0R_1}{R}\right)^{2n-3}\right]\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi_r^{(n)}+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{D_n^*}\,\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}(R_0R_1)^{2n-3}\times$$

$$\times\left[R^2-\frac{R_0^{2n-1}-R_1^{2n-1}}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}(R_0R_1)^2-\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}R^{2n+1}\right]\operatorname{grad}\frac{\operatorname{div}\Pi_r^{(n)}}{R^{2n-1}}-$$

$$-\frac{4}{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{nD_n^*}\left[m(n-1)^2+(m-2)(n-1)+m-1\right]\left[\frac{2n+m-1}{m(n-1)}R^2+\right.$$

$$\left.+(2n-3)\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\left(\frac{R_0R_1}{R}\right)^{2n-3}\right]\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi_r^{(n)}+$$

$$+2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(n-2)(2n-3)}{D_n^*}\,\frac{(R_0^2-R_1^2)(R_0R_1)^{2n-3}}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\left[\frac{2n+m-1}{mn}R^2+\right.$$

$$\left.+(2n+1)\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}R^{2n+1}\right]\operatorname{grad}\frac{\operatorname{div}\Pi_r^{(n)}}{R^{2n-1}}-$$

$$-\frac{2}{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{nD_n^*}\left[m(n-1)^2+(m-2)(n-1)+m-1\right]\times$$

$$\times\left[\frac{2}{m}(nm-4n-2m-2)-(n-2)(2n-3)\frac{(R_0^2-R_1^2)(R_0R_1)^{2n-3}}{(R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3})R^{2n-1}}\right]\mathbf{R}\operatorname{div}\Pi_r^{(n)}-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(n-2)(2n-3)}{D_n^*}\left[\frac{2}{m}\{(n-1)(m-4)+2m-2\}-\right. \tag{5.5}$$

$$\left.-(n+1)(2n+1)\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}R^{2n-1}\right]\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n-3}-R_1^{2n-3}}\left(\frac{R_0R_1}{R}\right)^{2n-3}\mathbf{R}\operatorname{div}\Pi_r^{(n)}$$

Это выражение и представляет искомое решение, являющееся, повидимому, новым. Отметим, что при соблюдении условий (4.26) и (4.25) все слагаемые, входящие в выражение $\mathbf{u}$, имеют конечное значение. Как частный случай в полученном выражении заключаются решения задач о сплошном шаре и о сферической полости в неограниченной упругой среде. Каждая сумма в выражении (5.5) разбивается на две суммы:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=-1}^{-\infty}$$

Вследствие (4.25) первая сумма может быть распространена на значения $n$ от 1 до $\infty$; во второй сумме индекс суммирования $n$ заменим $(-n_1-1)$; тогда пределы по $n_1$ будут 0 и $\infty$.

В соответствии с этим разбиением сумм и вектор $\mathbf{u}$ также может быть представлен в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^- \tag{5.6}$$

причем $\mathbf{u}^+$ получим, переписав (5.5), но распространив суммирование по $n$ от 1 до $\infty$. Выражение $\mathbf{u}^-$ будет

$$2G\mathbf{u}^- = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\Pi_r^{(-n-1)}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\mathbf{R}\times\operatorname{rot}\Pi_r^{(-n-1)}\right] +$$
$$+\frac{2}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\overset{*}{D}_{-n-1}}[m(n+2)^2-(m-2)(n+2)+m-1]\times$$
$$\times\left[R^2-\frac{R_0^{2n+3}-R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+5}-R_1^{2n+5}}R_0^2R_1^2-\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+5}-R_1^{2n+5}}R^{2n+5}\right]\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi_r^{(-n-1)}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+3)(2n+5)}{\overset{*}{D}_{-n-1}}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+5}-R_1^{2n+5}}\left[R^2-\frac{R_0^{2n+3}-R_1^{2n+3}}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}+\right.$$
$$\left.+\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}\left(\frac{R_0R_1}{R}\right)^{2n+1}\right]\operatorname{grad}R^{2n+3}\operatorname{div}\Pi_r^{(-n-1)}+$$
$$+\frac{4}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\overset{*}{D}_{-n-1}}[m(n+2)^2-(m-2)(n+2)+m-1]\times$$
$$\times\left[\frac{2n+3-m}{m(n+2)}R^2+(2n+5)\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+5}-R_1^{2n+5}}R^{2n+5}\right]\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi_r^{(-n-1)}-$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+3)(2n+5)}{\overset{*}{D}_{-n-1}}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+5}-R_1^{2n+5}}\frac{2n+3+m}{m(n+1)}R^2+\right.$$
$$\left.+(2n+1)\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}\left(\frac{R_0R_1}{R}\right)^{2n+1}\right]\operatorname{grad}R^{2n+3}\operatorname{div}\Pi_r^{(-n-1)}-$$
$$-\frac{2}{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\overset{*}{D}_{-n-1}}[m(n+2)^2-(m-2)(n+2)+m-1]\times$$
$$\times\left[\frac{2}{m}\{(m-4)(n+1)+2m-2\}-(n+3)(2n+5)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+5}-R_1^{2n+5}}R^{2n+3}\right]\mathbf{R}\operatorname{div}\Pi_r^{(-n-1)}-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)(2n+5)}{\overset{*}{D}_{-n-1}}\left[\frac{2}{m}\{(n+2)(m-4)-2m+2\}-\right.$$
$$\left.-n(2n+1)\frac{(R_0^2-R_1^2)(R_0R_1)^{2n+1}}{(R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1})R^{2n+3}}\right]\frac{R_0^2-R_1^2}{R_0^{2n+5}-R_1^{2n+5}}R^{2n+3}\mathbf{R}\operatorname{div}\Pi_r^{(-n-1)} \tag{5.7}$$

В случае сплошной сферы векторы $\Pi_r^{(-n-1)}$ обращаются в нуль и выражение $\mathbf{u}^-$ отпадает; в выражении $\mathbf{u}^+$ делаем предельный переход $R_1\to 0$.

Приходим к выражению

$$2G\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\,\mathbf{\Pi}_r^{(n)} - \frac{1}{n\,(n-1)}\,\mathbf{R}\times\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_r^{(n)} + \right. \tag{5.8}$$

$$+\frac{(m-4)\,n-2\,(m-1)}{n\,[mn^2-(m-2)\,n+m-1]}\,\mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(n)} +$$

$$+\frac{2n-1+m}{n\,(n-1)\,[mn^2-(m-2)\,n+m-1]}\,R^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(n)} +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{m\,(R_0^2-R^2)}{mn^2-(m-2)\,n+m-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(n)}\right\}$$

причем

$$\mathbf{\Pi}_r^{(n)} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^n \mathbf{Y}_n, \qquad \mathbf{\Pi}_r = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{R_0}\right)^n \mathbf{Y}_n \tag{5.9}$$

$$R_0\,(P_r)_{R=R_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{Y}_n(\vartheta,\,\varphi) \tag{5.10}$$

Таково решение задачи о равновесии сплошной сферы при заданных на ее поверхности $R=R_0$ внешних нагрузках.

Для сферической полости

$$\mathbf{\Pi}_r^{(n)} = 0 \qquad \text{при } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

в (5.6) отпадает слагаемое $\mathbf{u}^+$; в выражении $\mathbf{u}^-$ следует сделать предельный переход $R_1\to\infty$. Получаем

$$2G\mathbf{u} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\mathbf{\Pi}_r^{(-n-1)}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\,\mathbf{R}\times\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_r^{(-n-1)} - \right. \tag{5.11}$$

$$-\frac{(m-4)\,(n+1)+2\,(m-1)}{(n+1)\,[mn^2+(3m-2)\,n+3\,(m-1)]}\,\mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(-n-1)} +$$

$$+\frac{2n+3-m}{(n+1)\,(n+2)\,[mn^2+(3m-2)\,n+3\,(m-1)]}\,R^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(-n-1)} +$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,\frac{m\,(R^2-R_0^2)}{mn^2+(3m-2)\,n+3\,(m-1)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(-n-1)}\right\}$$

Здесь

$$\mathbf{\Pi}_r^{(-n-1)} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1}\mathbf{Y}_n, \qquad \mathbf{\Pi}_r = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{n+1}\mathbf{Y}_n \tag{5.12}$$

$$R_0\,(\mathbf{P}_r)_{R=R_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{Y}_n\,(\vartheta,\,\varphi) \tag{5.13}$$

Таково решение задачи о напряженном состоянии в упругой среде, снабженной сферической полостью радиуса $R=R_0$, по поверхности которой задано распределение внешних нагрузок.

Здесь никаких ограничений вида (4.25) или (4.26) на эти нагрузки не накладывается.

**§ 6.** В заключение наметим ход решения задачи о равновесии полой сферы, находящейся под действием уравновешенной системы сосредоточенных сил.

Очевидно, что для этого надо найти представление в форме ряда по поверхностным сферическим функциям нагрузки, соответствующей действию в точке $\mathbf{R}_*^{(i)} = R_* \mathbf{r}_i$ сосредоточенной силы $\mathbf{Q}_i$ (здесь $R_* = R_0$ или $R_* = R_1$, а $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки единичной сферы).

Через радиус-вектор точки приложения силы и линию действия силы проведем плоскость, пересечение которой с единичной сферой определит меридианальную плоскость $\pi_i^{(0)}$.

Положение любой другой меридианальной плоскости $\pi_i$, пересекающей эту сферу в точках $\pm \mathbf{r}_i$, определится углом, который эта плоскость составляет с плоскостью $\pi_i^{(0)}$.

Положение некоторой точки $M$ в плоскости меридиана $\pi_i$ можно задать радиусом $R$ и углом $\theta_i$, составляемым этим радиусом с вектором $\mathbf{r}_i$.

Если через $\mathbf{R} = R\mathbf{r}$ назовем радиус-вектор точки $M$, то будем иметь

$$\gamma_i = \cos\theta_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_i \tag{6.1}$$

Таким образом, для каждой силы $\mathbf{Q}_i$ введена координатная сферическая система с полюсом в точке единичной сферы, соответствующей точке приложения этой силы; если ввести еще систему с фиксированным полюсом, в которой сферические координаты конца вектора $\mathbf{r}_i$ (точки истока) обозначены через $\vartheta_i$, $\varphi_i$, а координаты любой точки (точки набюдения) через $\vartheta$ и $\varphi$, то по основной формуле сферической тригонометрии будем иметь

$$\gamma_i = \cos\vartheta\cos\vartheta_i + \sin\vartheta\sin\vartheta_i\cos(\varphi - \varphi_i) \tag{6.2}$$

Дальнейшее вычисление ведем в координатной системе, отнесенной к точке приложения рассматриваемой силы $\mathbf{Q}_i$; в окончательных же результатах, когда суммируются действия всех сил $\mathbf{Q}_i$, величина $\gamma_i$ должна быть заменена по (6.2).

Рассмотрим распределенную нагрузку, определяемую вектор-функцией.

$$\mathbf{Q}_i(\theta_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon_i < \theta_i < \pi \\ \dfrac{\mathbf{Q}_i}{\pi R_*^2 \varepsilon_i^2} & \text{при } 0 < \theta_i < \varepsilon_i \end{cases} \tag{6.3}$$

Действие сосредоточенной силы надо рассматривать как предельный случай этой нагрузки при $\varepsilon_i \to 0$.

Вектор-функция $\mathbf{Q}_i(\theta_i)$ может быть представлена рядом по полиномам Лежандра $P_n(\gamma_i)$. Коэффициенты этого ряда вычисляются по формуле

$$\mathbf{a}_n^{(i)} = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi P_n(\cos\theta_i)\,\mathbf{Q}_i(\theta_i)\sin\theta_i\,d\theta_i =$$

$$= \frac{2n+1}{2}\,\frac{\mathbf{Q}_i}{\pi R_*^2\varepsilon_i^2}\int_0^{\varepsilon_i} P_n(\cos\theta_i)\sin\theta_i\,d\theta_i$$

Интеграл легко вычислить, использовав соотношение

$$(2n+1) P_n(\gamma_i) = P'_{n+1}(\gamma_i) - P'_{n-1}(\gamma_i) \tag{6.4}$$

Получаем

$$a_n^{(i)} = \frac{Q_i}{2\pi R_*^2 \varepsilon_i^2} [P_{n-1}(\cos\varepsilon_i) - P_{n+1}(\cos\varepsilon_i)]$$

Остается сделать предельный переход:

$$\lim_{\varepsilon_i \to 0} \frac{1}{\varepsilon_i^2} [P_{n-1}(\cos\varepsilon_i) - P_{n+1}(\cos\varepsilon_i)] =$$

$$= \lim_{\varepsilon_i \to 0} \frac{1}{2\varepsilon_i} \left[ \frac{dP_{n-1}(\cos\varepsilon_i)}{d(\cos\varepsilon_i)} - \frac{dP_{n+1}(\cos\varepsilon_i)}{d(\cos\varepsilon_i)} \right] \frac{d\cos\varepsilon_i}{d\varepsilon_i} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_i \to 0} \frac{\sin\varepsilon_i}{2\varepsilon_i} [P'_{n+1}(1) - P'_{n-1}(1)] = \frac{2n+1}{2} P_n(1) = \frac{2n+1}{2} \tag{6.5}$$

Итак, значение при $R = R^*$ вектора $\mathbf{P}_r$, соответствующего сосредоточенной силе $\mathbf{Q}_i$, может быть представлено рядом по полиномам Лежандра следующего вида:

$$\pm \frac{Q_i}{4\pi R_*^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\gamma_i) = (\mathbf{P}_r^{[i]})_{R=R^*} \tag{6.6}$$

(верхний знак относится к случаю $R^* = R_0$, нижний — к случаю $R^* = R_1$). Конечно, это — расходящийся ряд, но им можно пользоваться, так как гармонический вектор $\Pi_r^{[i]}$, соответствующий этой нагрузке, представится уже сходящимся внутри полой сферы рядом:

$$\Pi_r^{[i]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_r^{[i](n)} \tag{6.7}$$

В соответствии со сказанным и формулой (4.11)* при $R^* = R_0$ будем иметь

$$Y_n^{(0)[i]} = \frac{Q_i}{4\pi R_0} (2n+1) P_n(\gamma_i), \quad Y_n^{(1)[i]} = 0$$

$$\Pi_r^{[i](n)} = \frac{Q_i R_0^{\,n}}{4\pi} (2n+1) \frac{R^n P_n(\gamma_i)}{R_0^{\,2n+1} - R_1^{\,2n+1}}$$

Если же $R^* = R_1$, т. е. сила приложена на поверхности радиуса $R_1$, то по (4.11)*

$$Y_n^{(0)[i]} = 0, \qquad Y_n^{(1)[i]} = -\frac{Q_i}{4\pi R_1} (2n+1) P_n(\gamma_i)$$

$$\Pi_r^{[i](n)} = \frac{Q_i R_1^{\,n}}{4\pi} (2n+1) \frac{R^n P_n(\gamma_i)}{R_0^{\,2n+1} - R_1^{\,2n+1}}$$

Эти обе записи объединяются в одну:

$$\Pi_r^{[i](n)} = \frac{Q_i R_*^{\,n}}{4\pi} (2n+1) \frac{R^n P_n(\gamma_i)}{R_0^{\,2n+1} - R_1^{\,2n+1}} \tag{6.8*}$$

если условиться под $R_*$ подразумевать радиус той поверхности, ограничивающей полую сферу, к которой приложена сила $\mathbf{Q}_i$. Отметим, учитывая замечание, сделанное по поводу формул (3.7), что вторая формула пары (6.8)* будет иметь вид:

$$\Pi_r^{[i](-n-1)} = -\frac{\mathbf{Q}_i}{4\pi}\frac{(2n+1)P_n(\gamma_i)}{R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1}}\frac{R_0^{2n+1}R_1^{2n+1}}{R_*^{n+1}R^{n+1}}$$

При действии на полную сферу системы сил $Q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ имеем

$$\Pi_r^{(n)} = \sum_{i=1}^{s}\Pi_r^{[i](n)} = \frac{(2n+1)R^n}{4\pi(R_0^{2n+1}-R_1^{2n+1})}\sum_{i=1}^{s}\mathbf{Q}_iP_n(\gamma_i)R_*^{\,n} \qquad (6.9)^*$$

В частности, в соответствии с (4.22) и (4.25)

$$\Pi_r^{(0)} = 0 \qquad (6.10)$$

Далее, имея в виду, что $P_1(\cos\gamma_i) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i$, получим

$$\Pi_r^{(1)} = \frac{2n+1}{4\pi(R_0^3-R_1^3)}\sum_{i=1}^{s}\mathbf{Q}_i(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}_*^{(i)}) \qquad (6.11)$$

Условие (4.26) выражает обращение в нуль главного момента системы сил:

$$\sum_{i=1}^{s}\operatorname{rot}\mathbf{Q}_i(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}_*^{(i)}) = \sum_{i=1}^{s}\operatorname{grad}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}_*^{(i)})\times\mathbf{Q}_i = \sum_{i=1}^{s}\mathbf{R}_*^{(i)}\times\mathbf{Q}_i = 0 \qquad (6.12)$$

Для нахождения вектора перемещения надо вычислить согласно (5.5) ряд векторных операций над $\Pi_r^{(n)}$, как то

$$\operatorname{div}\Pi_r^{(n)}, \qquad \operatorname{rot}\Pi_r^{(n)}, \qquad \operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi_r^{(n)},$$

$$\operatorname{grad}\frac{\operatorname{div}\Pi_r^{(n)}}{R^{2n-1}}, \qquad \mathbf{R}\operatorname{div}\Pi_r^{(n)}, \qquad \mathbf{R}\times\operatorname{rot}\Pi_r^{(n)}$$

Дело сводится к вычислению этих операций от вектора

$$\mathbf{Q}_iR^nP_n(\gamma_i) \qquad (6.13)$$

Предварительно заметим, что

$$\operatorname{grad}\gamma_i = \operatorname{grad}\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i = \operatorname{grad}\frac{1}{R}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_i) = -\frac{1}{R^3}\mathbf{R}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_i) + \frac{1}{R}\mathbf{r}_i = \frac{1}{R}(\mathbf{r}_i - \gamma_i\mathbf{r}) \qquad (6.14)$$

Поэтому

$$\operatorname{div}\mathbf{Q}_iR^nP_n(\gamma_i) = \mathbf{Q}_i\cdot\operatorname{grad}R^nP_n(\gamma_i) = R^{n-1}\mathbf{Q}_i\cdot[n\,\mathbf{r}\,P_n(\gamma_i) + P_n'(\gamma_i)(\mathbf{r}_i - \gamma_i\mathbf{r})] =$$

$$= R^{n-1}[P_n'(\gamma_i)\,\mathbf{r}_i - P_{n-1}'(\gamma_i)\,\mathbf{r}]\cdot\mathbf{Q}_i \qquad (6.15)$$

и аналогично

$$\operatorname{rot}\mathbf{Q}_iR^nP_n(\gamma_i) = R^{n-1}[P_n'(\gamma_i)\,\mathbf{r}_i - P_{n-1}'(\gamma_i)\,\mathbf{r}]\times\mathbf{Q}_i \qquad (6.16)$$

Здесь применено тождество

$$nP_n(\gamma_i) - \gamma_iP_n'(\gamma_i) = -P_{n-1}'(\gamma_i) \qquad (6.17)$$

Еще раз использовав это тождество, а также заметив, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{Q}_i) &= \mathbf{Q}_i + \mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{Q}_i) \\ \mathbf{r}(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{Q}_i) &= \mathbf{Q}_i\gamma_i + \mathbf{r}_i\times(\mathbf{r}\times\mathbf{Q}_i) \end{aligned} \tag{6.18}$$

получим

$$\mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{Q}_iR^nP_n(\gamma_i) = nR^n\mathbf{Q}_iP_n(\gamma_i) + R^n[P_n'(\gamma_i)\mathbf{r}_i - P_{n-1}'(\gamma_i)\mathbf{r}]\times(\mathbf{r}\times\mathbf{Q}_i) \tag{6.19}$$

$$\mathbf{R}\times\operatorname{rot}\mathbf{Q}_iR^nP_n(\gamma_i) = -nR^n\mathbf{Q}_iP_n(\gamma_i) + R^n[P_n'(\gamma_i)\mathbf{r}_i - P_{n-1}'(\gamma_i)\mathbf{r}](\mathbf{r}\cdot\mathbf{Q}_i) \tag{6.20}$$

Имея выражение (6.15), находим далее

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{Q}_iR^nP_n(\gamma_i), \qquad \operatorname{grad}\frac{\operatorname{div}\mathbf{Q}_iR^nP_n(\gamma_i)}{R^{2n-1}}$$

Для этого используется (6.18), а также тождества

$$P_n' - 2\gamma P_{n-1}' + P_{n-2}' = P_{n-1}, \qquad P_n'' - 2\gamma P_{n-1}'' + P_{n-2}'' = 3P_{n-1}' \tag{6.21}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{Q}_iR^nP_n(\gamma_i) = R^{n-2}\{2\mathbf{Q}_iP_{n-1}'(\gamma_i) + [P_{n-2}''(\gamma_i)\mathbf{r} - P_{n-1}''(\gamma_i)\mathbf{r}_i]\times(\mathbf{r}\times\mathbf{Q}_i) - \\ - [P_{n-1}''(\gamma_i)\mathbf{r} - P_n''(\gamma_i)\mathbf{r}_i]\times(\mathbf{r}_i\times\mathbf{Q}_i)\} \end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\frac{\operatorname{div}\mathbf{Q}_iR^nP_n(\gamma_i)}{R^{2n-1}} = \frac{1}{R^{n+1}}\{2\mathbf{Q}_iP_{n-1}'(\gamma_i) + [P_{n-2}''(\gamma_i)\mathbf{r} - P_{n-1}''(\gamma_i)\mathbf{r}_i]\times(\mathbf{r}\times\mathbf{Q}_i) - \\ - [P_{n-1}''(\gamma_i)\mathbf{r} - P_n''(\gamma_i)\mathbf{r}_i]\times(\mathbf{r}_i\times\mathbf{Q}_i) - (2n-1)[P_n'(\gamma_i)\mathbf{r}(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{Q}_i) - \\ - P_{n-1}'(\gamma_i)\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{Q}_i)]\} \end{aligned} \tag{6.23}$$

Эти выражения должны быть подставлены в (5.5).

В недавно появившейся работе Вебера [6] рассмотрена задача о действии сосредоточенных сил на сплошную упругую сферу. Конечно, решение Вебера получается из наших формул как частный случай. Для сплошной сферы выражение гармонического вектора $\mathbf{\Pi}_r$ упрощается и может быть представлено в конечном виде. Действительно, при $R_1 = 0$ и $R_* = R_0$ по (6.9)* получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_r^{(n)} &= \frac{2n+1}{4\pi R_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^n\sum_{i=1}^{s}\mathbf{Q}_iP_n(\gamma_i), \\ \mathbf{\Pi}_r &= \frac{1}{4\pi R_0}\sum_{i=1}^{s}\mathbf{Q}_i\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{R}{R_0}\right)^nP_n(\gamma_i) \end{aligned} \tag{6.24}$$

Ряд по $n$ легко суммируется; имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{R_0}\right)^nP_n(\gamma_i) = \frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2RR_0\gamma_i}} \tag{6.25}$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1}nP_n(\gamma_i) = -\frac{R_0^2(R - R_0\gamma_i)}{(R_0^2 + R^2 - 2RR_0\gamma_i)^{3/2}}$$

Отсюда получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{R_0}\right)^n(2n+1)P_n(\gamma_i)=\frac{R_0(R_0^2-R^2)}{(R_0^2+R^2-2RR_0\gamma_i)^{3/2}} \tag{6.26}$$

и, учитывая (6.10), получим

$$\mathbf{\Pi}_r=\frac{R_0^2-R^2}{4\pi}\sum_{i=1}^{s}\frac{\mathbf{Q}_i}{(R_0^2+R^2-2RR_0\gamma_i)^{3/2}} \tag{6.27}$$

Это выражение гармонической функции $\mathbf{\Pi}_r$ Вебер получает при помощи преобразования инверсии.

Выражение вектора перемещения $\mathbf{u}$ получим, подставляя приведенное выше значение $\mathbf{\Pi}_r$ в (5.8).

Сходимость рядов может быть значительно улучшена путем выделения из них медленно сходящихся частей.

Более простой вид, чем вектор перемещения, имеет вектор напряжения $\mathbf{P}_r$, а также сумма нормальных напряжений; из соответствующих выражений (4.18) и (4.21) после предельного перехода $R_1 \to 0$ получим

$$R\mathbf{P}_r=\mathbf{\Pi}_r+\frac{1}{2}(R_0^2-R^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(n-2)}{mn^2-(m-2)n+m-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(n)} \tag{6.28}$$

$$\sigma_R+\sigma_\vartheta+\sigma_\varphi=(m+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(n)}}{mn^2-(m-2)n+m-1} \tag{6.29}$$

Сюда надо подставить выражения (6.27), (6.15) и (6.22). В частном случае двух сосредоточенных сил, нормальных к поверхности сферы, имеем $\mathbf{Q}_1=Q\mathbf{r}_1$, $\mathbf{Q}_2=-Q\mathbf{r}_1$ и по (6.24), (6.15) и (6.22) получаем для нечетных $n$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_r^{(n)}&=\frac{2n+1}{2\pi R_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^n Q\,\mathbf{r}_1 P_n(\gamma)\\ \operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(n)}&=\frac{(2n+1)n}{2\pi R_0^2}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1}QP_{n-1}(\gamma)\\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}_r^{(n)}&=\frac{(2n+1)n}{2\pi R_0^3}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-2}Q\left[\mathbf{r}_1P'_{n-1}(\gamma)-\mathbf{r}P'_{n-2}(\gamma)\right]\end{aligned} \tag{6.30}$$

где

$$\gamma=\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1$$

Для четных $n$ эти выражения обращаются в нуль. Теперь по (6.28) и (6.29) будем иметь

$$\begin{aligned}R\mathbf{P}_r=\frac{Q}{2\pi R_0}\Bigg[\mathbf{r}_1\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{R}{R_0}\right)^nP_n(\gamma)+\\ +\frac{R_0^2-R^2}{2R_0^2}\sum_{n=3,5,\dots}^{\infty}\frac{(2n+1)n(n-2)m}{mn^2-(m-2)n+m-1}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-2}\Bigg]\left[\mathbf{r}_1P'_{n-1}(\gamma)-\mathbf{r}P'_{n-2}(\gamma)\right]\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\sigma_R+\sigma_\vartheta+\sigma_\varphi=\frac{Q(m+1)}{2\pi R_0^2}\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty}\frac{(2n+1)n(2n-1)}{mn^2-(m-2)n+m-1}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{n-1}P_{n-1}(\gamma) \tag{6.32}$$

Чтобы получить значение $\mathbf{P}_r$ в центре сферы, нужно в первой сумме (6.31) удержать слагаемое $n = 1$, а во второй $n = 3$. Найдем

$$(\mathbf{P}_r)_{R=0} = \frac{Q}{4\pi R_0^2}\left[\frac{35m+10}{7m+5}3\gamma\mathbf{r}_1 - \frac{21m}{7m+5}\mathbf{r}\right] \tag{6.33}$$

Нормальное напряжение $\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}_r$ на площадке, перпендикулярной линии действия сил, получим при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$, т. е. $\gamma = 1$:

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi R_0^2}\frac{42m+15}{7m+5} \tag{6.34}$$

На площадках, параллельных линии действия сил ($\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1 = 0$), для напряжений $\sigma_2$ и $\sigma_3$ получим

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{Q}{4\pi R_0^2}\frac{21m}{7m+5} \tag{6.35}$$

Заметим, что приводимые в [6] значения напряжений $\sigma_1$ и $\sigma_2$ ошибочны, что объясняется просчетом в формуле (11) указанной работы.

Сумма трех нормальных напряжений равна

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{3Q}{2\pi R_0^2}$$

что согласуется с (6.32).

Поступила 21 I 1953

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lamé G. Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris, 1859.
2. Thomson W. and Tait P. Treatise on Natural Philosophy, vol. I, p. II, Cambridge, 1883.
3. Ляв А. Математическая теория упругости, гл. XI. ОНТИ, 1935.
4. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, гл. VI. Гостехиздат, 1947.
5. Галеркин Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки. ПММ, т. VI, стр. 487—496, 1942.
6. Weber C. Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 32, Nr 6, S. 186—195, 1952.