Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

А. И. Каландия
(Тбилиси)

В работе рассматривается задача об изгибе тонкой упругой пластинки с опертыми краями. В первом параграфе дается способ эффективного решения задачи в случае, когда область, занятая пластинкой, конформно отображается на круг при помощи полинома. Отметим, что эта задача рассматривалась в работе А. И. Лурье [1]. В качестве применения рассмотрены бесконечные пластинки, ослабленные соответственно круговым и эллиптическим отверстиями.

Во втором параграфе задача решается для сплошного эллипса.

§ 1. Решение для областей, отображающихся на круг посредством полинома. Будем рассматривать опертую по краям тонкую изотропную упругую пластинку, изгибаемую нормальной нагрузкой, распределенной по срединной поверхности. Область пластинки будем обозначать через T, а ее границу через L. Будем предполагать, что T — конечная область плоскости переменной $z = x + iy$, отображаемая на единичный круг посредством полинома [1].

Задача о нахождении прогиба точек срединной поверхности, как известно, приводит к отысканию двух аналитических в области T функций $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ по граничным условиям (например, [2])

$$\left.\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\,\{-t'^2[\bar{t}\varphi_1''(t) + \psi_1'(t)] + \lambda_0\varphi_1'(t)\} &= g_1(t) \\ 2\mathrm{Re}\,\{t'[\overline{\varphi_1(t)} + \bar{t}\varphi_1'(t) + \psi_1(t)]\} &= \frac{dg_2(t)}{ds} \end{aligned}\right\} \text{на контуре } L \qquad (1.1)$$

Здесь t — аффикс точки контура, g_1, g_2 — заданные на контуре L действительные функции длины дуги s,

$$t' = \frac{dt}{ds}, \qquad \lambda_0 = 2\,\frac{1+\mu}{1-\mu} \qquad (1.2)$$

причем μ — коэффициент Пуассона.

Пусть функция

$$z = \omega(\zeta) = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_p\zeta^p \qquad (1.3)$$

дает конформное отображение области T на единичный круг плоскости переменной ζ.

---

[1] Можно было совершенно так же рассмотреть случай областей, отображающие функции которых — рациональные функции общего вида, но ради простоты изложения мы ограничимся случаем полинома.

Подставляя в (1.1) $t=\omega(\sigma)$, причем σ — аффикс точки единичной окружности γ, и замечая, что

$$t'=\frac{i\sigma\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}$$

получим

$$\left.\begin{aligned}&2\mathrm{Re}\,\{\sigma^2\omega'(\sigma)\,[\overline{\omega(\sigma)}\,\Phi'(\sigma)+\omega'(\sigma)\,\Psi(\sigma)]+\lambda_0\overline{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)\}=f_1(\sigma)\\&2\mathrm{Re}\left\{i\sigma\omega'(\sigma)\left[\overline{\varphi(\sigma)}+\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)\right]\right\}=f_2(\sigma)\end{aligned}\right\}\ \text{на } \gamma \tag{1.4}$$

где

$$\varphi_1(z)=\varphi(\zeta),\quad \psi_1(z)=\psi(\zeta),\quad \omega'(\zeta)\,\Phi(\zeta)=\varphi'(\zeta),\quad \omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)=\psi'(\zeta) \tag{1.5}$$

$$f_1(\sigma)=|\omega'(\sigma)|^2 g_1[\omega(\sigma)];\qquad f_2(\sigma)=|\omega'(\sigma)|\,\frac{d}{ds}g_2[\omega(\sigma)] \tag{1.6}$$

Введем, следуя Н. И. Мусхелишвили ([3], стр. 492) кусочно-голоморфные (за исключением начала координат и бесконечно удаленной точки) функции $\Omega_1(\zeta)$, $\Omega_2(\zeta)$, определенные следующим образом:

$$\Omega_1=\begin{cases}\zeta^2\omega'(\zeta)\,[\overline{\omega}(\zeta^{-1})\,\Phi'(\zeta)+\omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)]+\lambda_0\overline{\omega}'(\zeta^{-1})\,\varphi'(\zeta) & \text{при } |\zeta|<1\\ -\zeta^{-1}\overline{\omega}'(\zeta^{-1})[\omega(\zeta)\,\overline{\Phi}'(\zeta^{-1})+\overline{\omega}'(\zeta^{-1})\,\overline{\Psi}(\zeta^{-1})]-\lambda_0\omega'(\zeta)\,\overline{\varphi}'(\zeta^{-1}) & \text{при } |\zeta|>1\end{cases} \tag{1.7}$$

$$\Omega_2=\begin{cases}\zeta^{-1}\overline{\omega}'(\zeta^{-1})\,\varphi(\zeta)-\zeta\overline{\omega}(\zeta^{-1})\,\varphi'(\zeta)-\zeta\omega'(\zeta)\,\psi(\zeta) & \text{при } |\zeta|<1\\ \zeta\omega'(\zeta)\,\overline{\varphi}(\zeta^{-1})-\zeta^{-1}\omega(\zeta)\,\overline{\varphi}'(\zeta^{-1})-\zeta^{-1}\overline{\omega}'(\zeta^{-1})\,\overline{\psi}(\zeta^{-1}) & \text{при } |\zeta|>1\end{cases} \tag{1.8}$$

Тогда граничные условия (1.4) могут быть записаны в виде

$$\Omega_1^+(\sigma)-\Omega_1^-(\sigma)=f_1(\sigma) \tag{1.9}$$

$$\Omega_2^+(\sigma)-\Omega_2^-(\sigma)=if_2(\sigma) \tag{1.10}$$

Решая граничные задачи (1.9) и (1.10), получим ([3], § 108)

$$\Omega_1(\zeta)=A_1(\zeta)+R_1(\zeta),\qquad \Omega_2(\zeta)=A_2(\zeta)+R_2(\zeta) \tag{1.11}$$

Здесь

$$A_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_1(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta},\qquad A_2(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{f_2(\sigma)\,d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{1.12}$$

а $R_1(\zeta)$, $R_2(\zeta)$ — рациональные функции с неопределенными коэффициентами. По самому определению $\Omega_1(\zeta)$, $\Omega_2(\zeta)$, очевидно, имеем

$$\overline{\Omega}_1(\zeta^{-1})=-\Omega_1(\zeta),\qquad \overline{\Omega}_2(\zeta^{-1})=\Omega_2(\zeta)$$

На основании этих тождеств и формул (1.11), принимая также во внимание, что в силу второго равенства (1.6)

$$\int_\gamma\frac{f_2(\sigma)\,d\sigma}{\sigma}=0$$

будем иметь (ср. [3], стр. 493)

$$\overline{R}_1(\zeta^{-1})=-R_1(\zeta)-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_1(\sigma)\,d\sigma}{\sigma},\qquad \overline{R}_2(\zeta^{-1})=R_2(\zeta) \tag{1.13}$$

Отсюда легко заключаем, что $R_1(\zeta)$, $R_2(\zeta)$ будут иметь вид[1]:

$$
\begin{aligned}
R_1(\zeta) &= b_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \ldots + \frac{b_{p-1}}{\zeta^{p-1}} - \bar{b}_1\zeta - \ldots - \bar{b}_{p-1}\zeta^{p-1} \\
R_2(\zeta) &= \frac{c_1}{\zeta} + \ldots + \frac{c_{p-1}}{\zeta^{p-1}} + \bar{c}_1\zeta + \ldots + \bar{c}_{p-1}\zeta^{p-1}
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

причем

$$
b_0 + \bar{b}_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f_1(\sigma)\,d\sigma}{\sigma}
\tag{1.15}
$$

Как видно из (1.7), (1.8), постоянные b_k, c_k представляют собой известные линейные комбинации первых p коэффициентов разложения функций $\varphi(\zeta)$ около $\zeta = 0$. Эти последние величины $\varphi'(0), \ldots, \varphi^{(p)}(0)$ и являются искомыми. Принимая во внимание (1.7), (1.8), из формул (1.11) получим для $|\zeta| < 1$

$$
\begin{aligned}
&\zeta^2\omega'(\zeta)\left[\bar{\omega}(\zeta^{-1})\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)\right] + \lambda_0\bar{\omega}'(\zeta^{-1})\varphi'(\zeta) = A_1(\zeta) + R_1(\zeta) \\
&\zeta^{-1}\bar{\omega}'(\zeta^{-1})\varphi(\zeta) - \zeta\bar{\omega}(\zeta^{-1})\varphi'(\zeta) - \zeta\omega'(\zeta)\psi(\zeta) = A_2(\zeta) + R_2(\zeta)
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

Исключая из этих равенств $\psi(\zeta)$ и решая дифференциальное уравнение относительно $\varphi(\zeta)$, будем иметь (ср. [1], стр. 315)

$$
\varphi(\zeta) = C\left[\frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta^{-1})}\right]^{\nu} + \left[\frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta^{-1})}\right]^{\nu}\int\left[\frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta^{-1})}\right]^{1-\nu}\cdot F(\zeta)\,d\zeta
\tag{1.17}
$$

Здесь C — произвольная постоянная,

$$
\nu = \frac{1-\mu}{4}, \qquad F(\zeta) = \nu\left[G(\zeta) + H'(\zeta)\right]
\tag{1.18}
$$

$$
G(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2\omega'(\zeta)}\left[A_1(\zeta) + R_1(\zeta)\right], \qquad H(\zeta) = \frac{1}{\zeta\omega'(\zeta)}\left[A_2(\zeta) + R_2(\zeta)\right]
\tag{1.19}
$$

Из предыдущих формул видно, что выражение для $\varphi(\zeta)$ содержит неопределенные пока постоянные C, b_k, c_k.

После того как будет определена $\varphi(\zeta)$, функцию $\psi(\zeta)$ сразу можно получить из второго равенства (1.16). Таким образом, остается лишь определить упомянутые постоянные.

Для определенности будем считать, что $\nu(p+1)$ — не целое число, и что корни полинома

$$
\bar{\omega}'(\zeta^{-1})\zeta^{p-1} = \bar{a}_1\zeta^{p-1} + \ldots + p\bar{a}_p
\tag{1.20}
$$

простые. Пусть эти корни (расположенные внутри γ) будут $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p-1}$

В окрестности начала координат имеем

$$
\left[\frac{\omega'(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta^{-1})\zeta^{p-1}}\right]^{1-\nu}\zeta^{p+1}F(\zeta) = A_0 + A_1\zeta + \ldots + A_{p-1}\zeta^{p-1} + \ldots
\tag{1.21}
$$

так как из предыдущих формул легко заметить, что функция в левой части будет регулярной однозначной вблизи начала координат.

[1] Мы полагаем $\varphi(0) = 0$.

Выражение (1.17) перепишем теперь в виде (вспомним, что $\nu < 1$)

$$\varphi(\zeta) = \left[\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'}(\zeta^{-1})\,\zeta^{p-1}}\right]^{\nu} \zeta^{\nu(p+1)} \left\{ \int_0^{\zeta} \left[\left(\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'}(\zeta^{-1})\,\zeta^{p-1}} \right)^{1-\nu} \zeta^{(1-\nu)(p+1)} F(\zeta) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{k=0}^{p-1} A_k \zeta^{-\nu(p+1)+k} \right] d\zeta + \sum_{k=1}^{p} \frac{A_{k-1}}{-\nu(p+1)+k} \zeta^{-\nu(p+1)+k} \right\} + C \left[\frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\overline{\omega'}(\zeta^{-1})}\right]^{\nu} \tag{1.22}$$

Легко видеть, что требование однозначности последнего выражения в окрестности $\zeta = 0$ даст $C = 0$ и, значит,

$$\varphi(\zeta) = \left[\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'}(\zeta^{-1})\,\zeta^{p-1}}\right]^{\nu} \zeta^{\nu(p+1)} \left\{ \int_0^{\zeta} \left[\left(\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'}(\zeta^{-1})\,\zeta^{p-1}} \right)^{1-\nu} \zeta^{(1-\nu)(p+1)} F(\zeta) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{k=0}^{p-1} A_k \zeta^{-\nu(p+1)+k} \right] d\zeta + \sum_{k=1}^{p} \frac{A_{k-1}}{-\nu(p+1)+k} \zeta^{-\nu(p+1)+k} \right\} \tag{1.23}$$

Замечание. Очевидно, что коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ содержат не определенные пока величины $\varphi^{(k)}(0)$ $(k = 1, \ldots, p)$. Если для определения последних выразить, следуя А. И. Лурье ([1], стр. 316), условие, что $\varphi'(0), \ldots, \varphi^{(p)}(0)$ представляют собой коэффициенты разложения правой части (1.23), то, как легко убедиться, получим не уравнения, а тождества $\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(0)$, где $k = 1, \ldots, p-1$, и одно условие (получаемое сравнением коэффициентов при ζ^p), совпадающее с (1.15). Дело в том, что, как легко видеть из (1.21), (1,19), (1.14), коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_{p-2}$ вовсе не содержат известных величин, они представляют собой исключительно известные линейные комбинации $\varphi'(0), \ldots, \varphi^{(p-1)}(0)$; известные величины в разложении правой части (1.23) войдут в коэффициенты при ζ^k, начиная лишь с $k = p$.

Как будет показано ниже, неизвестные $\varphi'(0), \ldots, \varphi^{(p-1)}(0)$ определяются из требования голоморфности внутри γ выражения (1.23), представляющего собой, вообще говоря, многозначную функцию.

Выразим теперь условие того, чтобы функция $\varphi(\zeta)$, определяемая формулой (1,23), оставалась конечной в точках $\zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1}$.

Вспоминая, что $\nu > 0$, мы будем иметь

$$\int_0^{\zeta_k} \left\{ \left[\frac{\omega'(\zeta)}{\zeta^{p-1}\,\overline{\omega'}(\zeta^{-1})} \right]^{1-\nu} \zeta^{(1-\nu)(p+1)} F(\zeta) - \sum_{j=0}^{p-1} A_j \zeta^{-\nu(p+1)+j} \right\} d\zeta +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \frac{A_{j-1}}{-\nu(p+1)+j} \zeta_k^{-\nu(p+1)+j} = 0 \qquad (k=1, \ldots, p-1) \tag{1.24}$$

где интеграл берется по произвольному пути, соединяющему точки O и ζ_k и не проходящему через другие точки ζ_j.

Нетрудно убедиться, что (1.24) выражают необходимые и достаточные условия того, чтобы функция $\varphi(\zeta)$ была однозначной в окрестностях точек ζ_k и, следовательно, голоморфной внутри единичного круга.

Введем обозначения

$$\left[\frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta^{-1})}\right]^{\nu} = \Omega(\zeta), \qquad \left[\frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta^{-1})}\right]^{1-\nu} F(\zeta) = Q(\zeta)$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} A_k\zeta^{-\nu(p+1)+k} = P_1(\zeta) \tag{1.25}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{A_{k-1}}{-\nu(p+1)+k}\zeta^{-\nu(p+1)+k} = P_2(\zeta)$$

Возьмем влизи ζ_k какую-либо точку ξ_k и соединим ее с нулевой точкой некоторой кривой l_k, не проходящей через точки $\zeta_1, \ldots, \zeta_{p-1}$.

Из (1.23) будем иметь

$$\varphi(\xi_k) = \Omega(\xi_k)\left\{\int_{l_k}[Q(\zeta) - P_1(\zeta)]\,d\zeta + P_2(\xi_k)\right\} \tag{1.26}$$

Если теперь, отправляясь от ξ_k и двигаясь вдоль некоторой замкнутой кривой γ_k, переменная точка ζ один раз обойдет вокруг ζ_k в положительном направлении, то для значения $\varphi(\zeta)$ в точке ξ_k мы будем иметь следующее выражение:

$$[\varphi(\zeta)]_{\xi_k} = [\Omega(\zeta)]_{\xi_k}\left\{\int_{l_k+\gamma_k}[Q(\zeta) - P_1(\zeta)]\,d\zeta + P_2(\xi_k)\right\} \tag{1.27}$$

где символ $[\ ]_{\xi_k}$ указывает на то, что берется значение соответствующей функции в точке ξ_k после обхода кривой γ_k.

В силу (1.25) в окрестности ζ_k имеем

$$\Omega(\zeta) = \frac{p_k(\zeta)}{(\zeta-\zeta_k)^{\nu}}, \qquad Q(\zeta) = \frac{q_k(\zeta)}{(\zeta-\zeta_k)^{1-\nu}}$$

причем $p_k(\zeta)$, $q_k(\zeta)$ — однозначные функции вблизи ζ_k. Принимая во внимание предыдущие формулы, а также равенство

$$\int_{\gamma_k} P_1(\zeta)\,d\zeta = 0$$

из (1.27) получим

$$[\varphi(\zeta)]_{\xi_k} = e^{-2\pi i\nu}\,\Omega(\xi_k)\left\{\int_{l_k}[Q(\zeta) - P_1(\zeta)]\,d\zeta + \int_{\gamma_k} Q(\zeta)\,d\zeta + P_2(\xi_k)\right\} \tag{1.28}$$

Проведя внутри γ_k разрез, соединяющий точки ξ_k и ζ_k, замечая, что интеграл от $Q(\zeta)$ по окружности сколь угодно малого радиуса с центром в точке ζ_k стремится к нулю, будем иметь

$$\int_{\gamma_k} Q(\zeta)\,d\zeta = (1 - e^{2\pi i\nu})\int_{\xi_k}^{\zeta_k} Q(\zeta)\,d\zeta$$

Имеем далее

$$\int_{\gamma_k} Q(\zeta)\,d\zeta = (1 - e^{2\pi i\nu})\int_{\xi_k}^{\zeta_k}[Q(\zeta) - P_1(\zeta)]\,d\zeta + (1 - e^{2\pi i\nu})\,[P_2(\zeta_k) - P_2(\xi_k)]$$

В силу последнего равенства (1.28) примет вид:

$$[\varphi(\zeta)]_{\xi_k} = \Omega(\xi_k)\Big\{e^{-2\pi i\nu}\int_{l_k}[Q(\zeta)-P_1(\zeta)]\,d\zeta + (e^{-2\pi i\nu}-1)\Big[P_2(\zeta_k) + \int_{\xi_k}^{\zeta_k}\{Q(\zeta)-P_1(\zeta)\}\,d\zeta\Big] + P_2(\xi_k)\Big\}$$

Вычитая (1.26) из последнего равенства, получим

$$[\varphi(\zeta)]_{\xi_k} = \varphi(\xi_k) + (e^{-2\pi i\nu}-1)\,\Omega(\xi_k)\Big\{\int_0^{\zeta_k}[Q(\zeta)-P_1(\zeta)]\,d\zeta + P_2(\zeta_k)\Big\}$$

что и доказывает наше утверждение, если принять во внимание, что $\omega(\zeta)\neq 0$ всюду внутри γ при $\zeta\neq 0$.

Равенство (1.24) вместе с (1.15) и условием

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\varphi'(0)}{\omega'(0)}\right\} = 0 \tag{1.29}$$

дает систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $\varphi^{(k)}(0)$ $(k=1,\ldots,p)$. То, что эта система имеет единственное решение, вытекает из единственности решения нашей граничной задачи.

В случае, когда $\nu(p+1)$ — целое число, либо когда среди корней полинома $\zeta^{p-1}\overline{\omega}'(\zeta^{-1})$ имеются кратные, мы получаем незначительным изменением наших рассуждений условия для определения неизвестных $C, \varphi'(0),\ldots,\varphi^{(p)}(0)$, аналогичные указанным выше условиям.

Например, когда $\nu(p+1)$ — не целое число и $\zeta^{p-1}\overline{\omega}'(\zeta^{-1})$ имеет корни $\zeta_1,\ldots,\zeta_r$ кратностей соответственно $m_1,\ldots,m_r$, мы опять будем иметь $C=0$, а условия (1.24) заменяются следующими:

$$\frac{d^j}{d\zeta^j}\left\{\left[\frac{\zeta^2(\zeta-\zeta_k)^{m_k}\omega'(\zeta)}{\overline{\omega}'(\zeta^{-1})}\right]^{1-\nu}F(\zeta)\right\} = 0 \qquad \text{при } \zeta=\zeta_k$$

$$\int_0^{\zeta_k}\left[\left(\frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\overline{\omega}'(\zeta^{-1})}\right)^{1-\nu}F(\zeta) - \sum_{j=0}^{p-1}A_j\zeta^{-\nu(p+1)+j}\right]d\zeta + \sum_{j=1}^{p}\frac{A_{j-1}}{-\nu(p+1)+j}\zeta_k^{-\nu(p+1)+j} = 0$$

$$(j=0,1,\ldots,m_k-2;\quad k=1,\ldots,r)$$

Предыдущие равенства, обеспечивающие голоморфность в круге выражения (1.23), опять дают вместе с (1.15) и (1.29) однозначно разрешимую систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $\varphi^{(1)}(0),\ldots,\varphi^{(p)}(0)$.

Примеры. Рассмотрим опертую бесконечную пластинку с эллиптическим отверстием.

Будем рассматривать бесконечную пластинку с эллиптическим отверстием, изгибаемую нормальными к срединной поверхности усилиями и изгибающими моментами, приложенными вдоль края отверстия. Для простоты будем считать, что совокупность всех внешних усилий, приложенных по контуру отверстия, статически эквивалентна нулю и, кроме того, что напряжения исчезают на бесконечности. В таком случае, как известно [4], аналитические функции $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$, входящие в комплексное выражение для прогиба, будут голоморфны во всей области пластинки включая и бесконечно удаленную точку.

Эти функции на бесконечности можно подчинить условию

$$\varphi_1(\infty) = 0, \quad \text{либо} \quad \psi_1(\infty) = 0 \tag{1.30}$$

Кроме того, в силу однозначности прогиба нужно, чтобы функция $\psi_1(z)$ удовлетворяла на бесконечности условию

$$\operatorname{Im}\{\lim_{z\to\infty} z[\psi_1(z) - \psi_1(\infty)]\} = 0 \tag{1.31}$$

Требуется определить прогибы точек срединной поверхности по заданным значениям на границе прогиба и изгибающего момента. Задача решается аналогично задаче определения упругого равновесия, когда на границе среды заданы касательные напряжения и нормальные смещения ([3], стр. 501—504).

Как известно, преобразующая функция в нашем случае имеет вид:

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta^{-1} + m\zeta), \qquad R > 0, \qquad 0 < m < 1$$

Следовательно,

$$\omega'(\zeta) = -R\zeta^{-2}(1 - m\zeta^2), \quad \overline{\omega}(\zeta^{-1}) = R(\zeta + m\zeta^{-1}), \quad \overline{\omega}'(\zeta^{-1}) = R(m - \zeta^2)$$

Так как по вышесказанному $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ — голоморфные функции внутри круга $|\zeta| < 1$, то из предыдущих формул и (1.5) сразу видно, что при малых $|\zeta|$

$$\Phi(\zeta) = O(\zeta^2), \qquad \Psi(\zeta) = O(\zeta^2)$$

Поэтому нетрудно заметить, что функции $\Omega_1(\zeta)$, $\Omega_2(\zeta)$, определяемые равенствами (1.7), (1.8), будут ограниченными вблизи $\zeta = 0$, если только соблюдено условие

$$m\varphi(0) + \psi(0) = 0 \tag{1.32}$$

Ввиду того, что $m < 1$, это условие всегда можно считать выполненным (ср. [3], стр. 501).

Сообразно с этим (1.16) примет вид

$$\begin{gathered} \zeta^2\omega'(\zeta)\left[\overline{\omega}(\zeta^{-1})\,\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)\right] + \lambda_0\overline{\omega}'(\zeta^{-1})\,\varphi'(\zeta) = A_1(\zeta) + b \\ \zeta^{-1}\overline{\omega}'(\zeta^{-1}) - \zeta\overline{\omega}(\zeta^{-1})\,\varphi'(\zeta) - \zeta\omega'(\zeta)\,\psi(\zeta) = A_2(\zeta) + c \end{gathered} \tag{1.33}$$

Здесь b, c — не определенные пока постоянные; функции $A_1(\zeta)$ и $A_2(\zeta)$ определены (1.12), где f_1 и f_2 даются формулами (1.6), причем $(1-\mu)\,g_1(s)$ и $g_2(s)$ обозначают на этот раз заданные значения изгибающего момента и прогиба соответственно.

Условия (1.13) в нашем случае дадут

$$b + \bar{b} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_1(\sigma)\,d\sigma}{\sigma}, \quad c = \bar{c} \tag{1.34}$$

Нетрудно убедиться, что второе из предыдущих равенств влечет за собой справедливость равенства (1.31), обеспечивающего однозначность прогиба в рассматриваемой области.

Как показывают простейшие вычисления, формула (1.17) дает

$$\varphi(\zeta) = C\left[\frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2-m}\right]^\nu + \left[\frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2-m}\right]^\nu \int_0^\zeta \left[\frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2-m}\right]^{1-\nu} F(\zeta)\,d\zeta \tag{1.35}$$

где (1.36)

$$F(\zeta) = -\frac{\nu}{R(1-m\zeta^2)}\left[A_1(\zeta) + \zeta A_2{}'(\zeta) + \frac{1+m\zeta^2}{1-m\zeta^2}A_2(\zeta) + b + (1+2m\zeta^2)\,c\right]$$

Функция $\omega'(\zeta^{-1})$ имеет (внутри γ) два корня $\zeta = \pm\sqrt{m}$. В соответствии с этим условия (1.24) в нашем случае примут вид:

$$\int_0^{\sqrt{m}} \left[\frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2-m}\right]^{1-\nu} F(\zeta)\,d\zeta + C = 0$$

$$\int_0^{-\sqrt{m}} \left[\frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2-m}\right]^{1-\nu} F(\zeta)\,d\zeta + C = 0$$

где $F(\zeta)$ дается формулой (1.36). Предыдущие равенства перепишем так:

$$\int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} \left[\frac{1-m\zeta^2}{m-\zeta^2}\right]^{1-\nu} F(\zeta)\,d\zeta = 0$$

$$C = -\int_0^{-\sqrt{m}} \left[\frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2-m}\right]^{1-\nu} F(\zeta)\,d\zeta \tag{1.37}$$

Эти равенства вместе с (1.34) однозначно определяют постоянные C, b, c, входящие в выражение (1.35). При таком подборе указанных постоянных (1.35) будет голоморфной функцией внутри γ. Найдя $\varphi(\zeta)$, из (1.33) определим функцию $\psi(\zeta)$. Задача решена.

Случай бесконечной пластинки с круговым отверстием можно рассмотреть аналогично.

Применяя на этот раз преобразование $z = R\zeta$, дающее отображение рассматриваемой области на внешность единичного круга, и следуя указанному выше пути, получим (ср. [3], стр. 498—501) [1]

$$\varphi(\zeta) = \nu\zeta^{2\nu}\int_\infty^\zeta [RA_1(\zeta) + A_2(\zeta) - \zeta A_2{}'(\zeta)]\,\zeta^{-2\nu}\,d\zeta$$

$$\psi(\zeta) = \zeta^{-2}\varphi(\zeta) - \zeta^{-1}\varphi'(\zeta) + \zeta^{-1}A_2(\zeta) + \zeta^{-1}c \qquad \left(c = \frac{R}{4\pi i}\int_\gamma \frac{f_1(\sigma)\,d\sigma}{\sigma}\right)$$

[1] Относительно характера внешней нагрузки и напряженного состояния на бесконечности сохраняем предположения, принятые в предыдущем примере.

§ 2. Решение задачи в случае сплошного эллипса. Будем рассматривать опертую по краям эллиптическую пластинку, изгибаемую нормальной нагрузкой интенсивности $p(x, y)$, распределенной по срединной поверхности. Для удобства будем считать, что центр эллипса расположен в точке $z = 0$. Большую и малую полуоси его будем обозначать через a и b соответственно.

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае граничные условия задачи (1.1) могут быть записаны в виде одного комплексного равенства следующим образом [5]:

$$\lambda[\varphi_1'(t) + \overline{\varphi_1'(t)}] + \bar{t}''[\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}] = f_1(t) \tag{2.1}$$

Здесь

$$f_1(t) = \frac{1}{2}\left[g_1(t) + \frac{d^2 g_2(t)}{ds^2} - \frac{i}{\rho_0}\frac{dg_2(t)}{ds}\right], \quad t'' = \frac{d^2 t}{ds^2}, \quad \lambda = \frac{2}{1-\mu} \tag{2.2}$$

при этом ρ_0 — радиус кривизны эллипса. Напомним, что заданные на границе функции можно брать в виде

$$g_z(t) = -w$$

$$g_1(t) = -\left[\frac{\mu}{1-\mu}\Delta w + w_{xx}\cos^2\theta + 2w_{xy}\cos\theta\sin\theta + w_{yy}\sin^2\theta\right] \quad \text{на } L$$

причем $w(z, \bar{z})$ обозначает некоторое частное решение уравнения

$$\Delta\Delta u = \frac{p}{D}$$

где D — цилиндрическая жесткость, θ — угол между внешней нормалью к L и осью x.

В дальнейшем будем предполагать, что частные производные от $w(z, \bar{z})$ порядка $\leqslant 4$ удовлетворяют на L условию Липшица.

Тогда очевидно, что функция $f_1(t)$ будет иметь вторую производную по дуге s, удовлетворяющую тому же условию.

Решение задачи (2.1), следуя Д. И. Шерману [6], будем искать в виде [1]

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_1(t)\,dt}{t-z}, \quad \psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_1(t)}\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega_1'(t)\,dt}{t-z} \tag{2.3}$$

где $\omega_1(t)$ — искомая функция точки контура L.

Подставляя (2.3) в граничное условие (2.1), будем иметь

$$2\lambda \operatorname{Re}\left\{\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_1'(t)\,dt}{t-z}\right\} +$$

$$+ \bar{t}_0''\left[\omega_1(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \omega_1(t)\,d\lg\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega_1(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}\right] = f_1(t_0) \tag{2.4}$$

---

[1] Отметим, что основные задачи плоской теории упругости для эллипса были решены применением теории функций комплексной переменной Н. И. Мусхелишвили [3] и затем Д. И. Шерманом [6].

Введем подстановку

$$z = R\left(\zeta + \zeta^{-1}\right) \tag{2.5}$$

где $2R = \sqrt{a^2 - b^2}$. Как известно [3], предыдущая функция дает преобразование эллипсов, конфокальных с данными, на концентрические окружности с центром в точке $\zeta = 0$. Данному эллипсу будет соответствовать окружность γ радиуса ρ, определяемого формулой

$$\rho = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4R^2}}{2R} \tag{2.6}$$

Единичной окружности в плоскости ζ будет соответствовать отрезок $[-2R,\ 2R]$. Подставляя (2.5) в (2.4) и замечая, что

$$t = R\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right), \qquad \bar{t}'' = \frac{(\rho^4 - 1)\,\sigma^3}{R\,(\sigma^2 - 1)^2\,(\sigma^2 - \rho^4)}$$

причем σ обозначает аффикс точки на γ, получим

$$\begin{gathered}\frac{2\lambda}{R}\,\mathrm{Re}\left\{\lim_{\zeta \to \sigma_0} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma\omega'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma\omega'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta^{-1}}\right]\right\} + \\ + \frac{(\rho^4 - 1)\,\sigma_0^3}{R\,(\sigma_0^2 - 1)^2\,(\sigma_0^2 - \rho^4)}\left[\omega(\sigma_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega(\sigma)\,\frac{d\sigma}{\sigma - \sigma_0^{-1}} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - (\rho^4/\sigma_0)} - \right. \\ \left. - \frac{\rho^4 - 1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{\omega'(\sigma)}\,d\sigma}{\sigma\left[\sigma - (\rho^4/\sigma_0)\right]}\right] = f(\sigma_0)\end{gathered} \tag{2.7}$$

где $\omega(\sigma) = \omega_1(t)$, $f(\sigma) = f_1(t)$. Функцию $\omega(\sigma)$ ищем в виде ряда Фурье

$$\omega(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \sigma^k \tag{2.8}$$

Следовательно,

$$\omega'(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} k a_k \sigma^{k-1}, \qquad \overline{\omega'(\sigma)} = \sum_{-\infty}^{\infty} k\bar{a}_k \rho^{2(k-1)} \sigma^{-k+1} \tag{2.9}$$

Положим также

$$\frac{R\,(\sigma^2 - 1)^2\,(\sigma^2 - \rho^4)}{\sigma^3}\, f(\sigma) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k \sigma^k \tag{2.10}$$

Подставляя ряды (2.8), (2.9), (2.10) в равенство (2.7) и замечая, что точки ζ, ζ^{-1}, σ_0^{-1} расположены внутри окружности γ, а точка ρ^4/σ_0 — вне ее, при помощи интегральной формулы Коши (σ_0 заменяем на σ) получим

$$\begin{gathered}\lambda\left\{\left[\sigma^2 - (\rho^4 + 1) + \rho^4\sigma^{-2}\right]\left[\sum_1^{\infty} k a_k \sigma^k - \sum_1^{\infty} k a_k \sigma^{-k}\right] - \right. \\ \left. - \left[\sigma^2 - 2 + \sigma^{-2}\right]\left[\sum_1^{\infty} k\bar{a}_k \rho^{2(k+1)} \sigma^{-k} - \sum_1^{\infty} k\bar{a}_k \rho^{-2(k-1)} \sigma^k\right]\right\} + \\ + (\rho^4 - 1)\left[2a_0 + \sum_1^{\infty}\left\{a_k + a_{-k}\rho^{-4k} + (\rho^4 - 1)\,k\bar{a}_k \rho^{-2(k+1)}\right\}\sigma^k + \right. \\ \left. + \sum_1^{\infty}(a_k + a_{-k})\,\sigma^{-k}\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k \sigma^k\end{gathered}$$

Сравнение здесь коэффициентов при σ^k $(k=0,\ \pm 1,\ldots)$ дает

$$2(\rho^4-1)a_0+2\lambda(\rho^4-1)a_2+2\lambda(\rho^{-2}-\rho^6)\overline{a}_2=A_0$$

$$\begin{aligned}\lambda(k+2)\left[\rho^4 a_{k+2}+\overline{a}_{k+2}\rho^{-2(k+1)}\right]-\lambda k\left[(\rho^4+1)a_k+2\overline{a}_k\rho^{-2(k-1)}\right]+\\+(\rho^4-1)\left[a_k+a_{-k}\rho^{-4k}+(\rho^4-1)k\overline{a}_k\rho^{-2(k+1)}\right]+\\+\lambda(k-2)\left[a_{k-2}+\overline{a}_{k-2}\rho^{-2(k-3)}\right]=A_k\qquad (k=1,2,\ldots)\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}(\rho^4-1)a_{-k}=\lambda(k+2)\left[a_{k+2}+\overline{a}_{k+2}\rho^{2(k+3)}\right]-\lambda k\left[(\rho^4+1)a_k+2a_k\rho^{2(k+1)}\right]+\\+(1-\rho^4)a_k+\lambda(k-2)\left[\rho^4 a_{k-2}+\overline{a}_{k-2}\rho^{2(k-1)}\right]+A_{-k}\qquad (k=1,2,\ldots)\end{aligned}\tag{2.12}$$

причем при $k=1$ следует заменить a_{k-2} и $\overline{a}_{k-2}$ на a_{-k+2} и $\overline{a}_{-k+2}$ соответственно. Совокупность равенств (2.11), (2.12) представляет собой относительно a_k $(k=0,\ \pm 1,\ldots)$ бесконечную систему линейных алгебраических уравнений.

Приведем нашу систему к несколько иному виду, более удобному для исследования. С этой целью подставим значения a_{-k} из (2.12) в (2.11) и в полученную систему относительно a_k $(k=0,1,\ldots)$ введем новые неизвестные b_k $(k=0,1,\ldots)$ формулой

$$a_0=b_0,\qquad \lambda k\rho^k a_k=b_k\qquad (k=1,2,\ldots)\tag{2.13}$$

Тогда после некоторых упрощений получим

$$2(\rho^4-1)b_0=(\rho^{-2}-\rho^2)b_2+(\rho^4-\rho^{-4})\overline{b}_2+A_0$$

$$\xi_2 b_2+\eta_2\overline{b}_2=(\rho^2+\rho^{-10})b_4+(1-\rho^{-8})\overline{b}_4-B_2$$

$$\begin{aligned}\xi_{2k}b_{2k}+\eta_{2k}\overline{b}_{2k}=\rho^2\left[1+\rho^{-4(2k+1)}\right]b_{2k+2}+\rho^2\left[1+\rho^{-4(2k-1)}\right]b_{2k-2}+\\+(1+\rho^8)\rho^{-4(k+1)}\left[\overline{b}_{2k+2}+\rho^4\overline{b}_{2k-2}\right]-B_{2k}\qquad (k=2,3,\ldots)\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$[(\lambda-1)(\rho^4+\rho^{-4})+2(1+2\lambda)](b_1+\overline{b}_1)=\lambda(\rho^2+\rho^{-6})(b_3+\overline{b}_3)-\lambda B_1$$

$$\begin{aligned}\xi_{2k+1}b_{2k+1}+\eta_{2k+1}\overline{b}_{2k+1}=\rho^2\left[1+\rho^{-8(k+1)}\right]b_{2k+3}+\rho^2\left[1+\rho^{-8k}\right]b_{2k-1}+\\+(1+\rho^8)\rho^{-2(2k+3)}\left[\overline{b}_{2k+3}+\rho^4\overline{b}_{2k-1}\right]-B_{2k+1}\qquad (k=1,2,\ldots)\end{aligned}\tag{2.15}$$

где

$$B_k=\rho^k A_k-\rho^{-3k}A_{-k}\qquad (k=1,2,\ldots)\tag{2.16}$$

$$\xi_k=(1+\rho^4)(1+\rho^{-4k})+\frac{1}{\lambda k}(1-\rho^4)(1-\rho^{-4k})$$

$$\eta_k=\rho^{-2(k+1)}\left[4\rho^4-\frac{1}{\lambda}(\rho^4-1)^2\right]\qquad (k=2,3,\ldots)$$

Из первых двух равенств (2.15) видно, что мнимую часть коэффициента b_1 можно произвольно фиксировать. Кроме того, как показывает первое равенство (2.15), для возможности нашей задачи необходимо, чтобы величина $\rho^2 A_1-\rho^{-2}A_{-1}$ была действительной. Легко проверить, что это условие на самом деле выполняется.

Равенства (2.14), (2.15) представляют собой совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно $b_0, b_2, \ldots$ и $b_1, b_3, \ldots$ (или, точнее сказать, относительно вещественных и мнимых частей этих неизвестных).

Легко заметить, что упомянутые системы будут квазирегулярными при любом $\rho\,(\rho > 1)$. Нетрудно также убедиться, что при больших ρ они будут уже вполне регулярными [1].

Ниже будет доказано, что система (2.14), (2.15) имеет единственное решение, которое действительно дает решение рассматриваемой граничной задачи. Будет также указан способ для приближенного решения этой системы.

Будем разыскивать ограниченные решения системы (2.14), (2.15). Докажем сначала, что любое такое решение b_k имеет такой же порядок убывания при возрастании номера, как правая часть системы.

Заметим для этого, что, согласно нашему предположению относительно $f_1(t)$, для коэффициентов разложения (2.10) мы будем иметь неравенства вида

$$|\rho^k A_k| < \frac{C}{|k|^3} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2.17}$$

Пусть теперь b_k — некоторое ограниченное решение системы (2.14), (2.15). В силу этих последних, очевидно, будем иметь

$$\rho^2 b_{k+2} - (\rho^4 + 1)\, b_k + \rho^2 b_{k-2} = Q_k \qquad (k=N, N+1, \ldots;\ N \geqslant 3); \tag{2.18}$$

где использовано обозначение (2.19)

$$Q_k = B_k + \frac{1-\rho^4}{\lambda k}\left\{1 + \rho^{-4k}\left[\frac{\lambda k\,(1+\rho^4)}{1-\rho^4} - 1\right]\right\} b_k + \rho^{-2\,(k+1)}\left[4\rho^4 - \frac{1}{\lambda}\,(\rho^4-1)^2\right]\overline{b}_k$$
$$- \rho^{-2\,(2k+1)}\, b_{k+2} - \rho^{-2\,(2k-3)}\, b_{k-2} - (1+\rho^8)\,\rho^{-2\,(k+2)}\left[\overline{b}_{k+2} + \rho^4\,\overline{b}_{k-2}\right] \quad (k=3, 4, \ldots)$$

Совокупность равенств (2.18) с четными номерами (или, что все равно, равенства (2.14), начиная с $k=2$) представляет собой при известных Q_{2k} линейное конечно-разностное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка. Решая это уравнение по известному способу, как если бы правая часть была заданной последовательностью чисел, и принимая во внимание, что корнями характеристического уравнения будут $\lambda_{1,2} = \rho^{\pm 2}$, находим его общее решение в виде

$$b_{2k} = C_1 \rho^{2\,(k+1)} + C_2 \rho^{-2(k+1)} + \sum_{m=N}^{k} \frac{\rho^{2\,(k-m)} - \rho^{-2\,(k-m)}}{\rho^4 - 1}\, Q_{2m} \qquad (k=N, N+1, \ldots;\ N \geqslant 2) \tag{2.20}$$

где Q_{2m} дается формулой (2.19), а C_1, C_2 — произвольные пока постоянные. Предыдущее равенство перепишем так:

$$b_{2k} = \rho^{2\,(k+1)}\left[C_1 + \frac{\rho^{-2}}{\rho^4 - 1}\sum_{m=N}^{k} \rho^{-2m} Q_{2m}\right] + \frac{\rho^{-2k}}{1-\rho^4}\sum_{m=N}^{k} \rho^{2m} Q_{2m} + C_2 \rho^{-2\,(k+1)} \tag{2.21}$$

---

[1] Как показывают даже грубые оценки, для этого достаточно брать $\rho \geqslant \sqrt{3}$, или, что то же самое, $a \leqslant 2b$. Однако условие того, чтобы системы (2.14) и (2.15) были вполне регулярными, наверняка не будет соблюдаться при любом $\rho > 1$; например, третье уравнение системы (2.14) не удовлетворяет этому условию даже при $\rho = 1.5$.

Так как вторая сумма в правой части, как будет показано ниже, остается ограниченной при возрастании k, то для ограниченности b_{2k} необходимо полагать

$$C_1 = \frac{\rho^{-2}}{1-\rho^4} \sum_{m=N}^{\infty} \rho^{-2m} Q_{2m}$$

Внеся это значение для C_1 в (2.21), получим

$$b_{2k} = \frac{1}{1-\rho^4}\left[\sum_{m=k+1}^{\infty} \rho^{2(k-m)} Q_{2m} + \sum_{m=N}^{k} \rho^{-2(k-m)} Q_{2m}\right] + C_2 \rho^{-2(k+1)} \tag{2.22}$$

Рассматривая совокупность равенств (2.18) с нечетными номерами и рассуждая, как выше, будем иметь аналогично

$$b_{2k+1} = \frac{1}{1-\rho^4}\left[\sum_{m=k+1}^{\infty} \rho^{2(k-m)} Q_{2m+1} + \sum_{m=N}^{k} \rho^{-2(k-m)} Q_{2m+1}\right] + C_2' \rho^{-2(k+1)} \tag{2.23}$$

$$(k=N,\ N+1, \ldots;\ N \geqslant 1)$$

Положим

$$p_k = \sum_{m=k+1}^{\infty} \rho^{2(k-m)} Q_{2m}, \qquad q_k = \sum_{m=N}^{k} \rho^{-2(k-m)} Q_{2m}.$$

Рассмотрим

$$q_k = Q_{2k} + \frac{Q_{2k-2}}{\rho^2} + \frac{Q_{2k-4}}{\rho^4} + \ldots + \frac{Q_{2N}}{\rho^{2(k-N)}} \tag{2.24}$$

Так как b_k — ограниченная последовательность, то на основании (2.16) и (2.17) правая часть (2.19) будет убывать при $k \to \infty$ как k^{-1}. Подставляя (2.19) в предыдущее равенство и принимая во внимание (2.17), легко заключаем, что[1]

$$|q_k| < \frac{C}{k}\left[1 + \frac{k^3}{(k-2)^3 \rho^2} + \frac{k^3}{(k-4)^3 \rho^4} + \cdots + \frac{k^3}{N^3 \rho^{2(k-N)}}\right] \tag{2.25}$$

Заметим теперь, что последовательность чисел

$$\alpha_k = \left(\frac{k}{k-1}\right)^m \frac{1}{\rho} + \left(\frac{k}{k-2}\right)^m \frac{1}{\rho^2} + \cdots + \left(\frac{k}{2}\right)^m \frac{1}{\rho^{k-2}} + \frac{k^m}{\rho^{k-1}} \qquad (k=N,\ N+1, \ldots) \tag{2.26}$$

где m — некоторое натуральное число, ограничена. Действительно, имеем

$$|\alpha_k| < \frac{k^m}{[k/2]^m}\left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \cdots + \frac{1}{\rho^{[k/2]}}\right] + \frac{k^m}{\rho^{[k/2]}}\left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \cdots + \frac{1}{\rho^{k-1-[k/2]}}\right] \tag{2.27}$$

Отсюда и следует наше утверждение. На основании этого из (2.25) будем иметь

$$|q_k| < \frac{C}{k} \qquad (k=N,\ N+1, \ldots) \tag{2.28}$$

Рассмотрим далее

$$p_k = \frac{Q_{2k+2}}{\rho^2} + \frac{Q_{2k+4}}{\rho^4} + \cdots + \frac{Q_{2(k+m)}}{\rho^{2m}} + \cdots \tag{2.29}$$

[1] Для фиксированной положительной постоянной мы всегда будем употреблять одно и то же обозначение C.

Подставляя сюда (2.19) и учитывая неравенства (2.17), сразу находим

$$|p_k| < \frac{C}{k} \qquad (k=N,\ N+1, \ldots) \tag{2.30}$$

На основании (2.30) и (2.28) из (2.22) получим теперь

$$|b_{2k}| < \frac{C}{k} \qquad (k=N,\ N+1, \ldots) \tag{2.31}$$

Исходя опять из формул (2.24) и (2.29), повторим предыдущее рассуждение, причем вместо ограниченности b_{2k} будем пользоваться более сильным утверждением (2.31). Тогда получим

$$|b_{2k}| < \frac{C}{k^2} \qquad (k=N,\ N+1, \ldots)$$

Рассуждая еще раз, как и выше, и опираясь на этот раз на предыдущее неравенство, найдем

$$|b_{2k}| < \frac{C}{k^3} \qquad (k=N,\ N+1, \ldots) \tag{2.32}$$

На основании (2.32), (2.13) и (2.17) из (2.12) будем иметь

$$|\rho^{-2k} a_{-2k}| < \frac{C}{k^3} \qquad (k=N,\ N+1, \ldots)$$

Следовательно,

$$|\rho^{2k} a_{2k}| < \frac{C}{|k|^3} \qquad (k=\pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

Предыдущее рассуждение применительно к (2.23) даст, очевидно, неравенства такого же вида для неизвестных b_{2k+1}. Следовательно, мы будем иметь окончательно

$$|\rho^k a_k| < \frac{C}{|k|^3} \qquad (k=\pm 1,\ \pm 2, \ldots) \tag{2.33}$$

Неравенства (2.33), как известно, обеспечивают абсолютную и равномерную сходимость рядов (2.8), (2.9).

Таким образом, доказано, что если система (2.14), (2.15) имеет ограниченное решение, то оно будет давать решение нашей задачи. Существование же такого решения у системы (2.14), (2.15) можно без труда заключить из общей теории регулярных систем[7], если (в случае, когда система квазирегулярная) воспользоваться доказанным выше свойством ограниченного решения и единственностью решения рассматриваемой граничной задачи.

Если удастся найти решение b_k системы уравнений (2.14), (2.15), то, пользуясь формулами (2.13) и (2.12), можно будет определить значения всех неизвестных коэффициентов a_k $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Зная эти последние, мы можем по формулам (2.3) определить значения функций

$$\varphi_1(t) = \varphi(\sigma), \qquad \psi_1(t) = \psi(\sigma)$$

на окружности γ.

После некоторых вычислений получим

$$\varphi(\sigma) = a_0 + \sum_1^\infty a_k \left(\sigma^k + \frac{1}{\sigma^k}\right)$$

$$\psi(\sigma) = \bar{a}_0 - \rho^2 a_2 + \sum_1^\infty [a_{-k}\rho^{-2k} - k\rho^{-2} a_k - (k+2)\rho^2 a_{k+2}] \left(\sigma^k + \frac{1}{\sigma^k}\right)$$

Подставляя сюда $t = R(\sigma + \sigma^{-1})$, найдем $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$. Определив функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ внутри эллипса, находим значение в точке $z = x + iy$ искомого прогиба по известной формуле

$$u(x, y) = w(z, \bar{z}) + 2\,\mathrm{Re}\,\{\bar{z}\varphi_1(z) + \chi_1(z)\}$$

где $\chi_1(z)$ — первообразная функция для $\psi_1(z)$. В частности, прогиб в середине пластинки дается формулой

$$u_0 = w(0, 0) - [w(t, \bar{t}) + 2\,\mathrm{Re}\,\{\bar{t}\varphi_1(t) + \chi_1(t)\}] \quad (\chi_1(0) = 0) \qquad (2.34)$$

Перейдем теперь к вопросу о фактическом решении нашей системы.

С этой целью будем пренебрегать в уравнениях (2.14), (2.15), начиная с некоторого достаточно большого N, членами высшего порядка малости[1], сохранив из неизвестных в каждом уравнении одну левую часть (2.18). Иначе говоря, уравнения (2.14), (2.15), начиная с некоторого N, заменяем следующими:

$$\rho^2 b_{k+2} - (\rho^4 + 1)\, b_k + \rho^2 b_{k-2} = B_k \quad (k = 2N,\ 2N + 1, \ldots) \qquad (2.35)$$

Будем рассматривать бесконечную систему уравнений, состоящую из (2.35) и двух конечных систем по N первых уравнений (2.14), (2.15) Решение $b_k^{(N)}$ этой упрощенной системы будет дано в замкнутом виде.

Ограниченное решение системы (2.35) согласно формулам (2.22), (2.23) имеет вид:

$$b_{2k}^{(N)} = \frac{1}{1-\rho^4}\left[\sum_{m=k+1}^{\infty} \rho^{2(k-m)} B_{2m} + \sum_{m=N}^{k} \rho^{-2(k-m)} B_{2m}\right] + C_2 \rho^{-2(k+1)} \qquad (2.36)$$

$$b_{2k+1}^{(N)} = \frac{1}{1-\rho^4}\left[\sum_{m=k+1}^{\infty} \rho^{2(k-m)} B_{2m+1} + \sum_{m=N}^{k} \rho^{-2(k-m)} B_{2m+1}\right] + C_2' \rho^{-2(k+1)} \qquad (2.37)$$

$$(k = N,\ N + 1, \ldots)$$

где B_k дается формулой (2.16), а C_2, C_2' — неопределенные постоянные.

Постоянные C_2, C_2' следует определить вместе с первыми неизвестными $b_k^{(N)}$ из недостающих уравнений рассматриваемой системы и формул (2.36), (2.37).

Возьмем систему $N + 1$ первых уравнений (2.15) и в двух последних уравнениях этой конечной системы заменим неизвестные b_{2N+1}, b_{2N+3} их значениями из (2.37):

$$b_{2N+1}^{(N)} = \frac{1}{1-\rho^4} \sum_{m=N}^{\infty} \rho^{2(N-m)} B_{2m+1} + C_2' \rho^{-2(N+1)}$$

$$b_{2N+3}^{(N)} = \frac{1}{1-\rho^4} \sum_{m=N+1}^{\infty} \rho^{2(N-m+1)} B_{2m+1} + \frac{1}{\rho^2(1-\rho^4)} B_{2N+1} + C_2' \rho^{-2(N+2)}$$

---

[1] Как видно из (2.19), самая большая погрешность, которая допускается при таком упрощении системы, состоит в пренебрежении в k-м уравнении величиной $(1 - \rho^4)\, b_k / \lambda k$ против $(1 + \rho^4)\, b_k$.

Тогда для определения $b_1^{(N)}$, $b_3^{(N)}$, . . . , $b_{2N-1}^{(N)}$, C_2' получим следующие уравнения:

$$[(\lambda-1)(\rho^4+\rho^{-4})+2(1+2\lambda)](b_1+\bar{b}_1)-\lambda(\rho^2+\rho^{-6})(b_3+\bar{b}_3)=-\lambda B_1$$

$$\rho^2[1+\rho^{-8k}]b_{2k-1}+(1+\rho^8)\rho^{-2(2k+1)}\bar{b}_{2k-1}-\xi_{2k+1}b_{2k+1}-\eta_{2k+1}\bar{b}_{2k+1}+$$
$$+\rho^2[1+\rho^{-8(k+1)}]b_{2k+3}+(1+\rho^8)\rho^{-2(2k+3)}\bar{b}_{2k+3}=B_{2k+1}\quad(k=1,2,\ldots,N-2)$$

$$\rho^2[1+\rho^{-8(N-1)}]b_{2N-3}+(1+\rho^8)\rho^{-2(2N-1)}\bar{b}_{2N-3}-\xi_{2N-1}b_{2N-1}-\eta_{2N-1}\bar{b}_{2N-1}+$$
$$+\rho^{-2N}(1+\rho^{-8N})C_2'+(1+\rho^8)\rho^{-2(3N+2)}\bar{C}_2'=\overset{*}{B}_{2N-1}$$

$$\rho^2(1+\rho^{-8N})b_{2N-1}+(1+\rho^8)\rho^{-2(2N+1)}\bar{b}_{2N-1}-$$
$$-[1+\xi_{2N+1}+\rho^{-8(N+1)}]\rho^{-2(N+1)}C_2'-$$
$$-[1+\eta_{2N+1}+\rho^{-4(N+2)}]\rho^{-2(N+1)}\bar{C}_2'=\overset{*}{B}_{2N+1} \tag{2.38}$$

где

$$\overset{*}{B}_{2N-1}=B_{2N-1}-\rho^2(1+\rho^{-8N})\beta_N-(1+\rho^8)\rho^{-2(2N+1)}\bar{\beta}_N$$

$$\overset{*}{B}_{2N+1}=B_{2N+1}+\xi_{2N+1}\beta_N+\eta_{2N+1}\bar{\beta}_N-(1+\rho^{-8(N+1)})\left[\rho^2\beta_{N+1}+\frac{B_{2N+1}}{1-\rho^4}\right]-$$
$$-(1+\rho^8)\rho^{-4(N+2)}\left[\rho^2\bar{\beta}_{N+1}+\frac{\bar{B}_{2N+1}}{1-\rho^4}\right]$$

$$\beta_j=\frac{1}{1-\rho^4}\sum_{m=j}^{\infty}\rho^{2(j-m)}B_{2m+1}$$

Решая эту систему, найдем неизвестные $b_1^{(N)}$, $b_3^{(N)}$, . . . , $b_{2N-1}^{(N)}$ и C_2'. После этого по формуле (2.37) находим все остальные $b_{2k+1}^{(N)}(k=N,\ N+1,\ldots)$.

Рассматривая систему $N+1$ первых уравнений (2.14) и заменяя в двух последних уравнениях этой системы b_{2N}, b_{2N+2} их значениями из (2.36), получим полную систему, аналогичную (2.38), для определения $b_0^{(N)}$, $b_2^{(N)}$, . . . $b_{2N-2}^{(N)}$, C_2. Решая эту систему, находим аналогично предыдущему все неизвестные $b_{2k}^{(N)}$ $(k=0,\ 1,\ldots)$.

Таким образом, решение $b_k^{(N)}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots)$ упрощенной системы мы умеем находить в замкнутом виде. Легко убедиться, что $b_k^{(N)}$ дает приближенное решение нашей системы (2.14), (2.15).

Пример. По указанному способу было найдено приближенное значение прогиба в середине опертой эллиптической пластинки, изгибаемой под действием постоянной нагрузки p.

В рассматриваемом случае частное решение $w(z,\ \bar{z})$ можно брать в следующем виде:

$$w(z,\ \bar{z})=\frac{p}{64D}z^2\bar{z}^2$$

Принимая во внимание формулу, вытекающую из (2.2):

$$f_1(t)=-\lambda\left[\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial\bar{t}}+\bar{t}''\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\right]w(t,\ \bar{t})\quad\text{на } L$$

легко находим для коэффициентов разложения (2.10) следующие выражения:

$$A_1 = \frac{1}{32}\left[2\lambda(\rho^6 + \rho^{-2}) - (\rho^4 + 2)(\rho^2 - \rho^{-2})\right]\frac{pR^3}{D}$$

$$A_3 = \frac{1}{32}\left[2\lambda\rho^{-2} - \rho^2 + \rho^{-2}\right]\frac{pR^3}{D}, \qquad A_5 = -\frac{1}{16}\lambda\rho^{-2}\frac{pR^3}{D}.$$

$$A_{-1} = -\frac{1}{16}\left[\lambda(\rho^6 + \rho^{-2}) + (\rho^4 + 1)(\rho^2 - \rho^{-2})\right]\frac{pR^3}{D}$$

$$A_{-3} = -\frac{1}{32}\left[2\lambda\rho^6 + \rho^2(\rho^4 - 1)\right]\frac{pR^3}{D}, \qquad A_{-5} = \frac{1}{16}\lambda\rho^6\frac{pR^3}{D} \tag{2.39}$$

все остальные $A_k = 0$.

Отсюда, так как однородная система уравнений, соответствующая (2.14), (2.15), не имеет для $\rho > 1$ нетривиальных ограниченных решений, будем иметь $a_{2k} = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Далее в равенствах (2.35) возьмем $N = 3$. Тогда (2.38) будет представлять собой систему четырех уравнений для определения $b_1^{(3)}$, $b_3^{(3)}$, $b_5^{(3)}$, C_2'. Внося в эту систему (2.39) и решая ее, найдем упомянутые неизвестные, а затем по формуле (2.37), имеющей в нашем случае вид:

$$b_{2k+1}^{(3)} = C_2'\rho^{-2(k+1)} \qquad (k = 3, 4, \ldots)$$

определим остальные $b_{2k+1}^{(3)}$. После этого из (2.13) и (2.12) определяем приближенные значения всех a_k $(k = \pm 1, \pm 3, \ldots)$.

Отбрасывая для примера все коэффициенты a_k $(k = \pm 9, \pm 11, \ldots)$, будем иметь следующие приближенные выражения[1] для $\varphi(\sigma)$ и $\psi(\sigma)$:

$$\varphi(\sigma) \approx \sum_{k=1,3}^{7} a_k(\sigma^k + \sigma^{-k})$$

$$\psi(\sigma) \approx \sum_{k=1,3,5}\left[a_{-k}\rho^{-2k} - 2\rho^{-2}ka_k - \rho^2(k+2)a_{k+2}\right](\sigma^k + \sigma^{-k}) +$$
$$+ (a_{-7}\rho^{-14} - 7\rho^{-2}a_7)(\sigma^7 + \sigma^{-7})$$

Подставляя сюда значения

$$\sigma + \frac{1}{\sigma} = \frac{t}{R}, \qquad \sigma^3 + \frac{1}{\sigma^3} = \frac{t^3}{R^3} - \frac{3t}{R}$$

$$\sigma^5 + \frac{1}{\sigma^5} = \frac{t^5}{R^5} - \frac{5t^3}{R^3} + \frac{5t}{R}, \qquad \sigma^7 + \frac{1}{\sigma^7} = \frac{t^7}{R^7} - \frac{7t^5}{R^5} + \frac{14t^3}{R^3} - \frac{7t}{R}$$

находим приближенные выражения для $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, после чего определяем прогибы по приведенным выше формулам.

Указанные вычисления[2] были проведены для эллипса с отношением полуосей $a/b = 3$. В этом случае, очевидно, $a/R = 3/\sqrt{2}$ и, следова-

[1] На основании (2.39) a_k $(k = \pm 1, \pm 3, \ldots)$ будут вещественными числами.

[2] Дирекции и заведующему отделом приближенных вычислений Ленинградского отделения Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР выражаю благодарность за оказанную мне помощь при получении настоящей формулы.

тельно, в силу (2.6), $\rho=\sqrt{2}$. Кроме того, было принято $\mu={}^1/_3$ и, значит, $\lambda=3$. Если найденные приближенные значения $\varphi_1(z)$, $\chi_1(z)$ подставим в формулу (2.34) и положим $t=R\,(\rho e^{{}^1/_4 i\pi}+\rho^{-1}e^{-{}^1/_4 i\pi})$, то для прогиба в середине пластинки получим

$$u_0\approx 0.2066\,\frac{pb^4}{D}$$

Отметим, что значение это близко к аналогичному значению, найденному Б. Г. Галеркиным ([8], стр. 337).

Поступила 6 II 1953

Математический институт
Академии наук Грузинской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. К задаче равновесия пластинки с опертыми краями. Известия Ленингр. политехн. инст., т. XXXI, 1928.
2. Каландия А. И. Об одной смешанной задаче изгиба упругой пластинки. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.
4. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ, т. II, вып. 2, 1938.
5. Халилов З. И. Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки. ПММ, т. XIV, вып. 4, 1950.
6. Шерман Д. И. О напряжениях в эллиптической пластинке. ДАН СССР, т. XXXI, № 4, 1941.
7. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, Л.—М., 1949.
8. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат, Л.—М., 1933.