

ОБТЕКАНИЕ СОСТАВНОГО ПРОФИЛЯ РАЗЛИЧНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Д. Ф. Шульгин

(Москва)

С. А. Чаплыгин в своей работе [1] рассмотрел обтекание плоским потоком несжимаемой жидкости разрезного крыла с любым числом перьев.

Так, если взять на действительной оси плоскости z отрезки a_1x_1, \dots, a_nx_n (фиг. 1), то характеристическая функция обтекания удовлетворяет условию

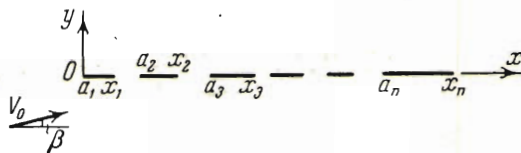
$$\frac{dW}{dz} = V_0 \left(\cos \beta - i \sin \beta \sqrt{\frac{(z-x_1) \dots (z-x_n)}{(z-a_1) \dots (z-a_n)}} \right) \quad (0.1)$$

где V_0 — скорость набегающего потока на бесконечности, β — угол атаки; знак радикала выбирается так, чтобы при $z = \infty$ его величина равнялась $+1$.

В настоящей работе формула С. А. Чаплыгина (0.1) применяется к случаю профиля крыла, состоящего из последовательности непроницаемых и проницаемых частей, следующих друг за другом.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим профиль, состоящий из нескольких непроницаемых и проницаемых участков, следующих друг за другом.

Будем считать, что проницаемый участок состоит из бесконечно числа бесконечно малых отверстий, равномерно распределенных по всей длине этого участка профиля.



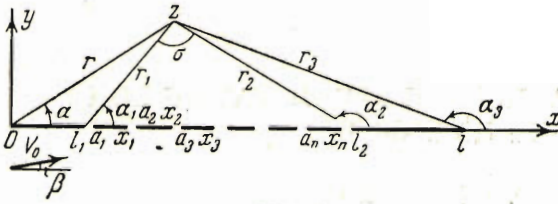
Фиг. 1

Под проницаемостью (просачиваемостью) такого участка будем понимать отношение суммы длин непроницаемых участков между отверстиями ко всей длине участка. Если отверстия отсутствуют, то это отношение равно 1, а если участок состоит сплошь из отверстий, то отношение равно нулю.

Это отношение можно назвать коэффициентом плотности профиля. В дальнейшем будем его обозначать через $m_1 = 2m$. Очевидно, значение параметра m будет находиться в интервале от 0 до $\frac{1}{2}$.

Замечание. Принятая модель проницаемого участка профиля является предельным случаем, когда участок состоит из n отдельных перьев одинаковой длины, отстоящих друг от друга на равных промежутках, и когда число их n увеличивается до бесконечности, а их величина уменьшается до нуля. Идеей предельного перехода мы воспользуемся на проницаемых участках профиля. Такая же модель для сплошь проницаемой пластинки рассматривалась в дипломной работе Е. Б. Триуса «К теории просачиваемых профилей» (МГУ, кафедра аэромеханики, 1952).

Рассмотрим случай составного профиля, состоящего для простоты из двух непроницаемых участков и между ними проницаемого участка с коэффициентом плотности m_1 . Рассуждения остаются верными и для любого числа проницаемых (с разными m_1) и непроницаемых участков, следующих один за другим.



Фиг. 2

Пусть скорость потока на бесконечности составляет с осью x угол β . Характеристическую функцию потока для профиля, представленного на фиг. 2, можно записать в следующем виде:

$$\frac{dW}{dz} = V_0 \left(\cos \beta - i \sin \beta \sqrt{\frac{(z-l_1)(z-x_1)\dots(z-x_n)(z-l)}{z(z-a_1)\dots(z-a_n)(z-l_2)}} \right) \quad (1.1)$$

Для проницаемого участка профиля имеем

$$R_n(z) = \sqrt{\frac{(z-x_1)\dots(z-x_n)}{(z-a_1)\dots(z-a_n)}} \quad (1.2)$$

Обозначим сумму длин непроницаемых участков на проницаемой части профиля через b , отношение $(l_2 - l_1) / n$ — через Δx_k . Тогда, очевидно,

$$a_k = x_k - \frac{b}{n} = x_k - m_1 \Delta x_k \quad (1.3)$$

Прологарифмируем и продифференцируем выражение (1.2), имея в виду введенные обозначения; получим

$$2 \ln R_n(z) = \sum_{k=1}^n \ln \frac{z-x_k}{z-x_k + m_1 \Delta x_k} = - \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{m_1 \Delta x_k}{z-x_k} \right)$$

Будем теперь совершать предельный переход при $n \rightarrow \infty$, умножив и разделив предварительно выражение под знаком суммы на $m_1 \Delta x_k / (z-x_k)$. В результате получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \ln R_n(z) = - \lim_{\Delta x_k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_1 \Delta x_k}{z-x_k} = - \int_{l_1}^{l_2} \frac{m_1 dx}{z-x} = 2m \ln \frac{z-l_2}{z-l_1}$$

Таким образом, в пределе $R_n(z)$ будет иметь вид:

$$R(z) = \left(\frac{z-l_2}{z-l_1} \right)^m \quad (1.4)$$

Формула (1.1) теперь запишется

$$\frac{dW}{dz} = V_0 \left(\cos \beta - i \sin \beta \sqrt{\left(\frac{z-l}{z} \right) \left(\frac{z-l_1}{z-l_2} \right)^{1-2m}} \right) \quad (1.5)$$

Получили условие, которому удовлетворяет характеристическая функция течения, обтекающего составной профиль. При этом считаем радикал равным $+1$ при $z = \infty$. Тогда в плоскости, разрезанной по отрезку Ol , полученное выражение $dW(z)/dz$ будет однозначным и регулярным.

Покажем, что полученная комплексная скорость течения удовлетворяет граничным условиям задачи. Введем обозначения (фиг. 2)

$$z = r e^{i\alpha}, \quad z - l_1 = r_1 e^{i\alpha_1}, \quad z - l_2 = r_2 e^{i\alpha_2}, \quad z - l = r_3 e^{i\alpha_3}$$

$$\sigma = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \varphi = -\alpha + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$$

Тогда формула (1.5) примет вид:

$$\frac{dW}{dz} = V_0 \left(\cos \beta - i \sin \beta e^{\pm 1/2 i (2m\sigma + \varphi)} \sqrt{\left(\frac{r_3}{r}\right) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{1-2m}} \right)$$

Составляющие скорости u и v по осям координат получим, отделив вещественную и мнимую части; при этом для составляющей u нужно брать знак плюс для точек верхней полуплоскости, знак минус для точек нижней полуплоскости. Легко видеть (фиг. 2), что когда точка z приближается к проницаемой части профиля сверху (или снизу), то $\sigma = \pi$ (или $\sigma = -\pi$), $\varphi = 0$; составляющие скорости будут равны:

$$u = V_0 \left(\cos \beta \pm \sin \beta \sin m\pi \sqrt{\left(\frac{l-x}{x}\right) \left|\frac{x-l_1}{x-l_2}\right|^{1-2m}} \right)$$

$$v = V_0 \sin \beta \cos m\pi \sqrt{\left(\frac{l-x}{x}\right) \left|\frac{x-l_1}{x-l_2}\right|^{1-2m}} \quad (1.6)$$

Если же точка z приближается к непроницаемому участку сверху (или снизу), то $\sigma = 0$, $\varphi = \pi$ (или $\varphi = -\pi$) и

$$u = V_0 \left(\cos \beta \pm \sin \beta \sqrt{\left(\frac{l-x}{x}\right) \left|\frac{x-l_1}{x-l_2}\right|^{1-2m}} \right), \quad v = 0 \quad (1.7)$$

т. е. скорость направлена по оси x вдоль непроницаемого участка.

Замечание. На непроницаемых участках найдутся точки, в которых скорость $u = 0$. В точках $x = l_1$ и $x = l$ имеем плавное стекание с пластинки, в точках $x = 0$ и $x = l_2$ скорость потока равна бесконечности.

При $l_1 = l_2 = l$, $m = 1/2$ формула (1.5) дает обтекание непроницаемой пластинки, при $l_1 = 0$, $l_2 = l$ — обтекание сплошь проницаемой пластинки.

Зная скорости u и v , легко получить перепад давления на составной пластинке:

для проницаемой части профиля

$$\Delta p = \rho V_0^2 \sin 2\beta \sin m\pi \sqrt{\left(\frac{l-x}{x}\right) \left|\frac{x-l_1}{x-l_2}\right|^{1-2m}} = a v, \quad a = 2\rho V_0 \cos \beta \operatorname{tg} m\pi \quad (1.8)$$

для непроницаемых частей

$$\Delta p = \rho V_0^2 \sin 2\beta \sqrt{\left(\frac{l-x}{x}\right) \left|\frac{x-l_1}{x-l_2}\right|^{1-2m}} \quad (1.9)$$

Подъемная сила составного профиля будет равна

$$P = \pi \rho V_0^2 \sin \beta [(l_2 - l_1) 2m + (l - l_2) + l_1] = \pi \rho V_0^2 L \sin \beta \quad (1.10)$$

где L — длина непроницаемых частей составного профиля при условии,

что они сомкнуты вплотную. Отсюда видно, что поддерживающая сила не изменится, будут ли перья раздвинуты или сомкнуты вплотную, т. е. получается результат С. А. Чаплыгина.

Замечание. Можно ввести понятие переменной проницаемости, когда $m_1 = m_1(x)$. Для этого проницаемость пластинки в точке x будем считать равной отношению длины пера, лежащего в окрестности точки x , к длине этого пера вместе с длиной соседнего отверстия. За соседнее отверстие пера всюду можно брать отверстие, лежащее, положим, слева от пера. Тогда определенное выше отношение m_1 будет функцией x . Если проделать вычисления аналогично сделанным в начале параграфа, то получим для комплексной скорости:

$$\frac{dW}{dz} = V_0 \left(\cos \beta - i \sin \beta \exp \int_0^l \frac{m(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) \quad (1.11)$$

Если $m_1(x) = 2m(x)$ — определенная вдоль пластинки длиной l непрерывная функция, то, применив к интегралу в равенстве (1.11) формулу о предельных значениях интеграла типа Коши и отделив в равенстве (1.11) вещественную и мнимую части, легко найдем составляющие скорости.

Для перепада давления на пластинке получим формулу

$$\Delta p = \rho V_0^2 \sin 2\beta \sin m(x) \pi \exp \int_0^l \frac{m(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta = av \quad (1.12)$$

где

$$a(x) = 2\rho V_0 \cos \beta \operatorname{tg} m(x) \pi, \quad 0 \leq m(x) \leq \frac{1}{2} \quad \text{при } 0 \leq x \leq l$$

§ 2. Обтекание составного профиля. Рассмотрим обтекание составной пластинки (фиг. 2) плоско-параллельным дозвуковым потоком газа. Задача формулируется так: Найти интеграл уравнения $\Delta \varphi = 0$, удовлетворяющий следующим граничным условиям:

на непроницаемых частях пластинки

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\mu V_0 \sin \beta, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \quad (2.1)$$

на проницаемой части

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\mu V_0 \sin \beta + \mu v \quad (2.2)$$

на бесконечности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

где $\varphi(x, y)$ — потенциал возмущенного движения, v — скорость проникания.

Имея в виду применить к этой задаче теорию тонкого крыла, пластинку заменим вихрями интенсивностей $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$, $\gamma_3(x)$, распределенными соответственно на $0l_1$, l_1l_2 , l_2l . Вихревые плотности определим из граничных условий. Давление в любой точке течения примем равным

$$p = p_0 + \rho V_0 \cos \beta \varphi_x \quad (2.4)$$

Отсюда при наличии разрыва производных φ_x снизу и сверху пластинки и учитывая, что $\varphi_{x1} - \varphi_{x2} = \gamma(x)$, получим

$$\Delta p = \rho V_0 \cos \beta (\varphi_{x1} - \varphi_{x2}) = \rho V_0 \cos \beta \gamma(x) \quad (2.5)$$

где индекс 1 указывает, что скорость v_x берется на верхней стороне, а индекс 2 — на нижней стороне пластинки. Будем считать, что в каждой точке проницаемой части профиля скорость проникания v и скачок давления при переходе через пластинку связаны уравнением

$$\Delta p = av + \lambda \quad (2.6)$$

где a и λ — экспериментальные постоянные, характеризующие проницаемый участок пластинки, $a \geq 0$. В силу (2.5) и (2.6) будем иметь

$$v = \frac{1}{a} \rho V_0 \cos \beta \gamma(x) - \frac{\lambda}{a} \quad (2.7)$$

Если теперь определим в точках x_1, x_2, x_3 , взятых соответственно на Ol_1, l_1l_2, l_2l , скорости $\partial\varphi/\partial y$, вызванные вихрями $\gamma_k(x)$, и полученные скорости $\partial\varphi/\partial y$ подставим в (2.1) и (2.2), то получим интегральное сингулярное уравнение с разрывными коэффициентами

$$A(x) \gamma(x) + \frac{B}{i\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta = f(x), \quad B = -\frac{i}{2} \quad (2.8)$$

где

$$A(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq l_1) \\ \frac{1}{a} \rho V_1 \cos \beta & (l_1 \leq x \leq l_2) \\ 0 & (l_2 \leq x \leq l) \end{cases} \quad V_1 = \alpha V_0$$

$$f(x) = \begin{cases} V_1 \sin \beta & (0 \leq x \leq l_1) \\ V_1 \sin \beta + \frac{\lambda_1}{a} & (l_1 \leq x \leq l_2) \\ V_1 \sin \beta & (l_2 \leq x \leq l) \end{cases} \quad \lambda_1 = \alpha \lambda \quad (2.9)$$

При решении интегрального сингулярного уравнения (2.8) будем следовать Н. И. Мухелишвили [2]. Замкнем отрезок Ol гладкой дугой L_1 так, чтобы в результате получился гладкий простой замкнутый контур, который обозначим через L_0 . При этом величины $A(t), B, f(t)$ подчиним дополнительным условиям $A(t) = 1, B = 0, f(t) = 0$ на дуге L_1 .

Будем искать решение уравнения (2.8), исчезающее на бесконечности, в классе, определяемом условиями $\gamma(l_1), \gamma(l)$ — конечны. Тогда общее решение данного класса, исчезающее на бесконечности, представится в виде

$$\gamma(x) = \frac{A(x)f(x)}{A^2(x) - B^2} - \frac{BX(x)}{\pi i \sqrt{A^2(x) - B^2}} \int_0^l \frac{f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{A^2(\zeta) - B^2} X(\zeta)(\zeta - x)} + \frac{BX(x)P_{x-1}(x)}{\sqrt{A^2(x) - B^2}} \quad (2.10)$$

где $X(x)$ — каноническое решение однородной задачи Гильберта данного класса, $P_{x-1}(x)$ — произвольный полином степени не выше $x - 1$, причем $P_{x-1}(x) \equiv 0$ при $x = 0$, x — индекс данного класса. Определим индекс x рассматриваемого класса:

$$x = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t)]_{L_0} = \frac{1}{2\pi i} \left[\ln \frac{A(t) - B(t)}{A(t) + B(t)} \right]_{L_0} \quad (2.11)$$

Здесь символ $[]$ обозначает приращение выражения, стоящего в скобках, при обходе точкой t контура L_0 в положительном направлении.

Легко видеть, что в данном случае все приращения аргумента функции $G(t)$ сводятся к сумме скачков аргумента в точках разрыва $x=0$, l_1, l_2, l функции $G(t)$. Подсчитывая по формуле (2.11) κ , находим, что он равен нулю. Отсюда заключаем, что решение уравнения (2.8) данного класса единственное.

Каноническое решение данного класса

$$X(x) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \ln \frac{A(\zeta) + \frac{1}{2}i}{A(\zeta) - \frac{1}{2}i} \frac{d\zeta}{\zeta - x} = \sqrt{\left(\frac{l-x}{x}\right) \left|\frac{x-l_1}{x-l_2}\right|^{1-2m}} \quad (2.12)$$

где

$$m = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{2\rho V_1 \cos \beta}$$

Формула (2.10) теперь запишется

$$\begin{aligned} \gamma(x) = & \frac{A(x)f(x)}{A^2(x) + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2\pi V A^2(x) + \frac{1}{4}} \sqrt{\left(\frac{l-x}{x}\right) \left|\frac{x-l_1}{x-l_2}\right|^{1-2m}} \times \\ & \times \int_0^l \frac{f(\zeta)}{V A^2(\zeta) + \frac{1}{4}} \sqrt{\left(\frac{\zeta}{l-\zeta}\right) \left|\frac{\zeta-l_1}{\zeta-l_2}\right|^{1-2m}} \frac{d\zeta}{\zeta-x} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть

$$\lambda_1 = 0, \quad f(x) = V_1 \sin \beta = \text{const}$$

Используя тождественные равенства вида

$$\pi \cos m_j \pi B(x_j) + \int_0^{l_1} B(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x_j} + \sin m_j \pi \int_{l_1}^{l_2} B(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x_j} + \int_{l_2}^l B(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x_j} = \pi$$

(j=1, 2, 3)

которые получаются из рассмотрения сингулярного интеграла вида

$$H(x_j) = \int_0^l \sqrt{\left(\frac{z}{z-l}\right) \left(\frac{z-l_2}{z-l_1}\right)^{1-2m}} \frac{dz}{z-x_j} \quad (2.14)$$

решение (2.10) можно представить в виде

$$\gamma_j(x_j) = 2V_1 \sin \beta \sin m_j \pi \sqrt{\left(\frac{l-x_j}{x_j}\right) \left|\frac{x_j-l_1}{x_j-l_2}\right|^{1-2m}} \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.15)$$

где

$$m_1 = m_3 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = m = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{2\rho V_1 \cos \beta}, \quad B(x) = \sqrt{\left(\frac{x}{l-x}\right) \left|\frac{x-l_2}{x-l_1}\right|^{1-2m}}$$

В случае $l_1 = 0, l_2 = l$ из (2.15) получается результат, найденный Х. А. Рахматулиным [3].

Параметр $m_2 = m$ зависит от коэффициента a , от скорости набегающего потока V_1 и других величин.

Замечание. Решение (2.15) можно получить также из результатов § 1, пользуясь формулами (1.8), (1.9) и (2.6).

Существенно заметить, что параметр m в этом параграфе не имеет того геометрического смысла, который он имеет в обобщенной задаче С. А. Чаплыгина, где проницаемая поверхность была своеобразного строения. Это указывает на то, что принятая в § 1 схема проницаемой поверхности не может быть перенесена на реальную проницаемую поверхность и, следовательно, не может последнюю, вообще говоря, моделировать.

Однако характер особенностей течения на концах участков профиля остается верным и для реального составного профиля.

Пусть

$$f(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots + B_nx^n$$

В этом случае решение уравнения (2.8) будет таково:

$$\gamma_j(x_j) = \sqrt{\left(\frac{l-x_j}{x_j}\right) \left|\frac{x_j-l_1}{x_j-l_2}\right|^{1-2m}} \sin m_j \pi \sum_{k=0}^n C_k x_j^k \quad (j=1, 2, 3) \quad (2.16)$$

где

$$m_1 = m_3 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = m = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\alpha}{2\rho V_1 \cos \beta}$$

Коэффициенты C_k определяются постоянными B_k , m_j , l_1 , l_2 , l .

Найдем соотношения для определения неизвестных величин C_k . Для этого зафиксируем x в какой-либо части отрезка Ol , например на l_1l_2 (вне особых точек). Тогда, подставив $\gamma_2(x_2)$ в уравнение (2.8), получим

$$\sum_{k=0}^n C_k \left[\pi \cos m\pi D_k(x_2) - \int_0^{l_1} D_k(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x_2} - \right. \\ \left. - \sin m\pi \int_{l_1}^{l_2} D_k(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x_2} - \int_{l_2}^l D_k(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x_2} \right] = 2\pi \sum_{k=0}^n B_k x_2^k \quad (2.17)$$

где введено обозначение

$$D_k(x) = x^k \sqrt{\left(\frac{l-x}{x}\right) \left|\frac{x-l_1}{x-l_2}\right|^{1-2m}}$$

Далее рассмотрим выражение вида

$$H_1(x_2) = \sum_{k=0}^n C_k \int_0^l \sqrt{\left(\frac{z-l}{z}\right) \left|\frac{z-l_1}{z-l_2}\right|^{1-2m}} \frac{z^k dz}{z-x_2} \quad (2.18)$$

в котором будем считать

$$\sqrt{\left(\frac{z-l}{z}\right) \left|\frac{z-l_1}{z-l_2}\right|^{1-2m}} = +1 \quad \text{при } z = \infty$$

Если взять интеграл в выражении (2.18) по контуру двусвязной области, образованной разрезом плоскости (z) по отрезку Ol (с выделением особых точек) и окружностью с центром в точке $z = 0$ достаточно

большого радиуса R , то получим тождественное равенство

$$\sum_{k=0}^n C_k \left[\pi \cos m\pi D_k(x_2) - \int_0^{l_1} D_k(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x_2} - \sin m\pi \int_{l_1}^{l_2} D_k(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x_2} - \right. \\ \left. - \int_{l_2}^l D_k(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - x_2} \right] + \pi \operatorname{res} \left[\frac{1}{z - x_2} \sum_{k=0}^n C_k D_k(x) \right]_{z=\infty} = 0$$

Сравнивая полученное выражение с (2.17), будем иметь (2.19)

$$\operatorname{res} [F(z)]_{z=\infty} = \operatorname{res} \left[\sum_{k=0}^n C_k z^k \sqrt{\left(\frac{z-l}{z}\right) \left(\frac{z-l_1}{z-l_2}\right)^{1-2m}} \frac{1}{z-x_2} \right]_{z=\infty} = -2 \sum_{k=0}^n B_k x_2^k$$

Вычет функции $F(z)$ будет равен коэффициенту при $\frac{1}{z}$, взятому с обратным знаком из разложения этой функции в ряд Лорана.

Легко видеть, что вычет функции $F(z)$ есть полином степени n . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x_2 у обеих частей равенства (2.19), получим линейную систему n уравнений для определения C_k ($k = \overline{1, n}$). Определитель этой системы отличен от нуля, поэтому система всегда имеет решение.

Функция $f(x)$ представляет сумму полинома степени n и слагаемого λ_1/a , равного нулю на непроницаемых частях профиля; тогда к решению (2.16) надо добавить решение уравнения (2.8), у которого правая часть есть λ_1/a .

Как ранее упоминалось, все наши рассуждения остаются справедливыми для профиля, состоящего из любого числа частей различной проницаемости (разных m).

Автор пользуется случаем принести искреннюю благодарность своему руководителю Х. А. Рахматулину.

Поступила 27 XI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Схематическая теория разрезного крыла аэроплана. Собрание сочинений, т. II. ГТТИ, 1948.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
3. Рахматулин Х. А. Обтекание проницаемого тела. Вестник Московского университета, № 3, 1950.