

К ВОПРОСУ О ВОЛНООБРАЗОВАНИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ КОРАБЛЯ

А. А. Костюков

(Одесса)

Рассматривается определение ординат волнового профиля при движении корабля на основе теории Н. Е. Кочкина^[1, 2].

§ 1. Потенциал скоростей потока, вызванного движущимся телом, погруженным на некоторую глубину, Кочиним отыскивается в следующей форме:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + K_1(x - \xi, y - \eta, z + \zeta) + K_2(x - \xi, y - \eta, z + \zeta) \right] q(\xi, \eta, \zeta) dS \quad (1.1)$$

Здесь (1.2)

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \quad r' = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}$$

$$K_1(x - \xi, y - \eta, z + \zeta) = -2v \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \exp \frac{v(z + \zeta)}{\cos^2 \theta} \sin \frac{v[(x - \xi) \cos \theta + (y - \eta) \sin \theta]}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \quad (1.3)$$

$$K_2(x - \xi, y - \eta, z + \zeta) = \operatorname{Re} \frac{v}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma \left\{ \frac{v}{\cos^2 \theta} [-(x - \xi) \cos \theta - (y - \eta) \sin \theta + i(z + \zeta)] \right\} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \quad (1.4)$$

$$\sigma(\alpha) = e^{-i\alpha} \int_{+\infty}^{\alpha} \frac{e^{it}}{t} dt \quad (1.5)$$

причем g — ускорение силы тяжести, v — скорость движения тела, $q(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность источников, распределенных по поверхности S тела, а $v = g/v^2$. Прямоугольные оси координат выбраны следующим образом: оси $x(\xi)$ и $y(\eta)$ лежат на свободной поверхности жидкости в состоянии ее покоя, причем скорость движения тела v направлена вдоль оси x ; ось $z(\zeta)$ направлена по вертикали вверх.

Функция $\varphi(x, y, z)$, определяемая формулой (1.1), удовлетворяет граничным условиям на свободной поверхности жидкости и на бесконечности (водоем предполагается безграничным).

Составляя затем для φ граничное условие на поверхности тела, Н. Е. Кочин получает интегральное уравнение для определения функции

плотности источников $q(\xi, \eta, \zeta)$ в следующем виде:

$$q(x, y, z) = \int_S K_\nu(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) q(\xi, \eta, \zeta) dS - 2\nu \cos(n, x) \quad (1.6)$$

где

$$K_\nu(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(r, n)}{r^2} + \frac{\cos(r', n)}{r'^2} + \frac{\partial K_1}{\partial n} + \frac{\partial K_2}{\partial n} \right] \quad (1.7)$$

зависит от параметра ν . Под n понимается внешняя нормаль к поверхности тела в точке (x, y, z) .

Решение интегрального уравнения (1.6) рассмотрено Кочиним для случая очень больших значений параметра ν . Однако, применяя тот же метод¹, можно получить решение данного интегрального уравнения и для случая очень малых величин ν .

Для обоих крайних значений ν функция q представляется бесконечным сходящимся рядом

$$q(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(x, y, z) \quad (1.8)$$

в котором каждый последующий член выражается через предыдущий по формуле

$$q_m(x, y, z) = \int_S q_{m-1}(\xi, \eta, \zeta) K_\nu(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) dS \quad (m=1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

$$q_0(x, y, z) = -2\nu \cos(n, x) \quad (1.10)$$

В результате предельного перехода ν к нулю и к бесконечности для ядра интегрального уравнения получаются следующие выражения:

при $\nu \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0$)

$$K_\infty(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cos(r, n)}{r^2} + \frac{\cos(r', n)}{r'^2} \right] \quad (1.11)$$

при $\nu \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow \infty$)

$$K_0(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cos(r, n)}{r^2} - \frac{\cos(r', n)}{r'^2} \right] \quad (1.12)$$

§ 2. Перейдем теперь к определению потенциала скоростей $\varphi(x, y, z)$ потока, вызванного надводным кораблем.

Функцию $\varphi(x, y, z)$ будем снова искать по формуле (1.1).

Нетрудно видеть, что, повторяя рассуждения Н. Е. Кочина, мы снова приходим к уравнению (1.6), где теперь S будет означать смоченную поверхность корабля. Возникает вопрос, имеет ли это уравнение решение?

Можно утверждать, что при достаточно больших значениях ν уравнение (1.6) будет всегда иметь одно и только одно решение. Это следует из того, что для уравнения

$$q(x, y, z) = \lambda \int_S K_\nu(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) q(\xi, \eta, \zeta) dS - 2\nu \cos(n, x) \quad (2.1)$$

¹ Это было показано Кочиним на случае плоской задачи.

значение $\lambda = 1$ не является характеристическим числом при достаточно больших ν . Действительно, при $\nu \rightarrow \infty$, как показал Кочин, $K_\nu \rightarrow K_\infty$, определяемому выражением (1.11). Если заменить в уравнении (2.1) ядро K_ν на ядро K_∞ и опустить свободный член, то получим

$$q(x, y, z) = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{S+S'} \frac{\cos(r, n)}{r^2} q(\xi, \eta, \zeta) dS \quad (2.2)$$

где S' — поверхность, получающаяся зеркальным отражением поверхности S относительно свободной поверхности.

Известно, что характеристические числа уравнения (2.2) отличны от единицы, а следовательно, у уравнения (2.1) при достаточно больших ν все характеристические числа будут также отличны от единицы.

Для получения решения уравнения (2.1) при $\lambda = 1$ воспользуемся следующими соображениями.

Как известно, при достаточно малых λ решение уравнения (2.1) и вообще уравнения

$$q(x, y, z) = \lambda \int_S K_\nu(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) q(\xi, \eta, \zeta) dS + f(x, y, z) \quad (2.3)$$

может быть всегда получено в виде равномерно сходящегося ряда

$$q = q_0 + \lambda q_1 + \lambda^2 q_2 + \dots + \lambda^m q_m + \dots \quad (2.4)$$

в котором каждый последующий член выражается через предыдущий согласно (1.9), а q_0 определяется так:

$$q_0(x, y, z) = f(x, y, z) \quad (2.5)$$

Ряд (2.4) является мероморфной функцией, полюсами которой могут быть только характеристические числа уравнения (2.1). При достаточно больших ν , как уже отмечалось, эти характеристические числа будут близки к характеристическим числам предельного уравнения (2.2). Уравнение же (2.2) имеет характеристическое число $\lambda = -1$, а остальные его характеристические числа по модулю больше единицы.

Поэтому, каково бы ни было $\epsilon > 0$, при достаточно большом ν наименьшее по модулю характеристическое число уравнения (2.1) будет лежать в ϵ -окрестности точки $\lambda = -1$, т. е. будет удовлетворять неравенству $|\lambda + 1| < \epsilon$, а остальные характеристические числа по модулю будут больше единицы.

Фиксируя x, y, z , представим функцию $q = \varphi(\lambda)$ в виде

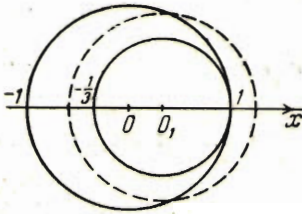
$$q = \varphi(\lambda) = \Phi(\mu) \quad \left(\lambda = \frac{\mu}{1-\mu} \right)$$

Функция $q = \Phi(\mu)$ будет голоморфна в окрестности точки $\mu = 0$ и, следовательно, будет допускать разложение

$$q = Q_0 + \mu Q_1 + \mu^2 Q_2 + \dots \quad (2.6)$$

Обозначим через ρ радиус сходимости этого ряда.

Функция $q = \Phi(\mu)$ будет голоморфной при $|\mu| < \rho$, а так как $\mu = \lambda / (1 + \lambda)$, то отсюда следует, что $q = \varphi(\lambda)$ будет голоморфной функцией в круге C_ρ , показанном на фиг. 1 пунктиром, при $\mu = \lambda / (1 + \lambda) < \rho$.



Фиг. 1

На окружности $|\mu| = \rho$ лежит по крайней мере одна особая точка функции $\Phi(\mu)$, а значит, на окружности Γ_ρ — границе круга C_ρ ($|\lambda / (1 + \lambda)| = \rho$) — лежит по крайней мере одна особая точка функции $\varphi(\lambda)$.

Рассмотрим окружность

$$\Gamma_{\frac{1}{2}} \left(\left| \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right| = \frac{1}{2} \right)$$

Она касается окружности $|\lambda| = 1$ в точке $\lambda = +1$ (фиг. 1) и пересекает положительную ось x в точке $x = -\frac{1}{3}$. Таким образом, замкнутый круг $C_{\frac{1}{2}}$ с границей $\Gamma_{\frac{1}{2}}$ состоит из регулярных точек, если $\varepsilon < \frac{2}{3}$. Следовательно, круг C_ρ содержит внутри себя круг $C_{\frac{1}{2}}$ (т. е. $\rho > \frac{1}{2}$) и, в частности, содержит точку $\lambda = +1$. Точка $\lambda = +1$ соответствует точке $\mu = \frac{1}{2}$, лежащей в круге сходимости ряда (2.6).

Таким образом, $q = \varphi(1) = \Phi(\frac{1}{2})$ изобразится сходящимся рядом:

$$q = Q_0 + \frac{1}{2} Q_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 Q_2 + \dots \quad (2.7)$$

Если Q_0, Q_1, \dots вычислены для $f(x, y, z) = -2v \cos(n, x)$, то ряд (2.7) будет давать искомую плотность источников.

Покажем теперь, как могут быть последовательно вычислены функции Q_1, Q_2, \dots . Для этого в уравнение (2.3) внесем выражение для q из (2.6) и сделаем подстановку $\lambda = \mu / (1 - \mu)$. Тогда получим

$$(1 - \mu) \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m Q_m = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^{m+1} \int_S K_v Q_m dS + (1 - \mu) f \quad (2.8)$$

Приравнявая коэффициенты при степенях μ^m , получаем

$$Q_0(x, y, z) = f(x, y, z) = -2v \cos(n, x)$$

$$Q_1(x, y, z) = \int_S K_v(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) Q_0(\xi, \eta, \zeta) dS \quad (2.9)$$

$$Q_m(x, y, z) = \int_S K_v(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) Q_{m-1}(\xi, \eta, \zeta) dS + Q_{m-1}(x, y, z) \quad (m > 1)$$

Совершенно аналогичным путем может быть доказано существование решения уравнения (2.3) для достаточно малых значений v и возможность его представления в виде сходящегося ряда (2.7), где $Q_m(x, y, z)$ вычисляются по формулам (2.9). Изложенный метод¹ решения уравнения (2.3) справедлив и для случая движения тела, погруженного в жидкость на некоторую глубину. Ряд (2.7) сходится быстрее, чем ряд (1.8).

¹ Этот метод был указан нам М. Г. Крейном.

Для приближенной оценки величины $q(x, y, z)$ для судов рассмотрим судно-цилиндр с бесконечной осадкой T .

Уравнение ватерлиний возьмем в форме параболы 2-й степени

$$y = \frac{B}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{\frac{1}{2}L} \right)^2 \right] \quad (2.10)$$

где L и B — соответственно длина и ширина судна.

Систему координатных осей сохраняем прежней, но связываем ее с движущимся кораблем. Плоскостью xu является плоскость действующей (грузовой) ватерлинии; начало координат принято по середине длины судна; ось x расположена в диаметральной плоскости судна и направлена в сторону носа; положительное направление оси y принято в сторону правого борта, ось z направлена вверх.

Функцию $q(x, y, z)$ представляем в виде

$$q(x, y, z) = \chi(x, y, z) Q_0(x, y, z) = -2v\chi(x, y, z) \cos(n, x) \quad (2.11)$$

На фиг. 2 для рассматриваемого судна-цилиндра построена по формулам (2.7) и (2.9) зависимость

$$F = F(x^*), \quad F = 2\chi(x, y), \quad x^* = \frac{|x|}{\frac{1}{2}L}$$

для различных значений L/B в предположении достаточно малых скоростей судна v .

Из фиг. 2 видно, что с увеличением отношения L/B величина $2\chi(x, y)$ приближается к единице.

При $L/B = \infty$ (судно-пластина) $2\chi = 1.0$.

Заметим, что для того же судна с ватерлинией в форме окружности $2\chi = 2.0$, а потенциал скоростей совпадает с известным выражением для потенциала скоростей при обтекании поступательным потоком идеальной жидкости круглого цилиндра бесконечно большой длины.

§ 3. Ординаты профиля волн, образующихся на свободной поверхности жидкости при движении корабля, в предположении достаточно малых амплитуд образуемых волн, определяются по формуле

$$\zeta_w = \frac{v}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, 0)}{\partial x} \quad (3.1)$$

Тогда, пользуясь (1.1), находим

$$\zeta_w = \frac{v}{4\pi g} \int_S \left[\frac{\partial K_1(x-\xi, y-\eta, \zeta)}{\partial x} + \frac{\partial K_2(x-\xi, y-\eta, \zeta)}{\partial x} \right] q(\xi, \eta, \zeta) dS \quad (3.2)$$

где S — смоченная поверхность корабля. В силу (1.3), (1.4) и (1.5)

$$\frac{\partial K_1(x-\xi, y-\eta, \zeta)}{\partial x} = -2v^2 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} e^{k\zeta} \cos[p(x-\xi) + m(y-\eta)] \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial K_2(x-\xi, y-\eta, \zeta)}{\partial x} = -\frac{v^2}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma'(\alpha) \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad (3.4)$$

В формулах (3.3) и (3.4) обозначено

$$\sigma'(\alpha) = -i\sigma(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \quad (3.5)$$

$$\alpha = -p(x - \xi) - m(y - \eta) + ik\zeta \quad (3.6)$$

$$k = \frac{v}{\cos^2 \theta}, \quad p = k \cos \theta, \quad m = k \sin \theta \quad (3.7)$$

Вследствие симметрии корабля относительно диаметральной плоскости ($O\xi, \zeta$) интегрирование выражения (3.2) можно производить по боковой поверхности S_1 лишь одного борта, учитывая при этом знак ординаты η . Введенный выше коэффициент χ в формуле (2.11) для $q(\xi, \eta, \zeta)$ для точек, симметрично расположенных относительно диаметральной плоскости, не изменяет ни своей величины, ни знака. Заменяем далее интегрирование по поверхности S_1 интегрированием по диаметральной плоскости судна S_0 . Тогда, принимая во внимание, что

$$\cos(n, \xi) = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad dS = \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \right)^2 \right]^{1/2} d\xi d\zeta$$

имеем

$$\zeta_w = \zeta_{w1} + \zeta_{w2} \quad (3.8)$$

где

$$\zeta_{w1} = \frac{1}{4\pi v} \int_{-T}^0 \int_{-1/2 L}^{1/2 L} \left[\frac{\partial K_1(x-\xi, y-\eta, \zeta)}{\partial x} + \frac{\partial K_1(x-\xi, y+\eta, \zeta)}{\partial x} \right] 2\chi(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi d\zeta \quad (3.9)$$

$$\zeta_{w2} = \frac{1}{4\pi v} \int_{-T}^0 \int_{-1/2 L}^{1/2 L} \left[\frac{\partial K_2(x-\xi, y-\eta, \zeta)}{\partial x} + \frac{\partial K_2(x-\xi, y+\eta, \zeta)}{\partial x} \right] 2\chi(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi d\zeta \quad (3.10)$$

Здесь $\eta = f(\xi, \zeta)$ — уравнение судовой поверхности.

Рассмотрим сперва формулу (3.9) для ζ_{w1} .

Пользуясь (3.3), после некоторых преобразований находим

$$\zeta_{w1} = \frac{2}{\pi} \frac{g}{v^2} \int_0^{1/2 \pi} (J_1 \cos px + J_2 \sin px) \cos my \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad (3.11)$$

где

$$J_1 = \int_0^{-T} \int_{-1/2 L}^{1/2 L} e^{k\zeta} \cos p\xi \cos m\eta 2\chi(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi d\zeta$$

$$J_2 = \int_0^{-T} \int_{-1/2 L}^{1/2 L} e^{k\zeta} \sin p\xi \cos m\eta 2\chi(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi d\zeta \quad (3.12)$$

Если судно симметрично относительно плоскости мидельшпангоута, то выражение (3.11) принимает более простой вид, так как $J_1 = 0$.

Для целей практических расчетов, поскольку поверхность судна обычно задается не уравнением, а теоретическим чертежом или таблицей ординат, выражения J_1 и J_2 могут быть преобразованы таким образом, чтобы в них входили не производные от ординат судовой поверхности (тангенсы углов наклона касательных к ватерлиниям), а самые ординаты.

Для этого можно воспользоваться формулой интегрирования по частям. Тогда, например, для J_1 получим

$$J_1 = \frac{1}{m} \int_0^{-T} e^{kz} d\zeta \left\{ \left[2\chi \left(\frac{1}{2} L, \eta_H, \zeta \right) \sin m\eta_H - 2\chi \left(-\frac{1}{2} L, \eta_k, \zeta \right) \sin m\eta_k \right] \cos \frac{pL}{2} + \right. \\ \left. + p \int_{-1/2 L}^{1/2 L} 2\chi(\xi, \eta, \zeta) \sin p\xi \sin m\eta d\xi - \int_{-1/2 L}^{1/2 L} 2 \frac{\partial \chi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \cos p\xi \sin m\eta d\xi \right\} \quad (3.13)$$

Для судов нормальной формы можно принимать в оконечностях судна, т. е. при $\xi = \pm \frac{1}{2} L$, ординаты $\eta_H = \eta_k \approx 0$.

Рассмотрим теперь выражение (3.10) для второго слагаемого ординат волнового профиля ζ_{w2} .

Н. Е. Кочин [2] для $\sigma(\alpha)$ и для $\sigma'(\alpha)$ дает следующие асимптотические формулы при $\text{Im } \alpha < 0$ и больших значениях $|\alpha|$:

$$\sigma(\alpha) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(i\alpha)^n}, \quad \sigma'(\alpha) \approx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{i^n \alpha^{n+1}} \quad (0! = 1) \quad (3.14)$$

Подставляя $\sigma'(\alpha)$ согласно (3.14) в формулу (3.4) и замечая, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a \cos \theta + b \sin \theta - i\zeta} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + \zeta^2}} = \frac{1}{r} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{(a \cos \theta + b \sin \theta - i\zeta)^2} = -\frac{a}{r^3}$$

найдем

$$\frac{\partial K_2(a, b, \zeta)}{\partial x} \approx -\frac{2a}{(a^2 + b^2 + \zeta^2)^{3/2}} + \text{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{v^2}{g} 2! \frac{\cos^3 \theta}{(a \cos \theta + b \sin \theta - i\zeta)^3} - \right. \\ \left. - \left(\frac{v^2}{g} \right)^2 \frac{3!}{i} \frac{\cos^5 \theta}{(a \cos \theta + b \sin \theta - i\zeta)^4} - \left(\frac{v^2}{g} \right)^3 \frac{4!}{(a \cos \theta + b \sin \theta - i\zeta)^5} + \dots \right] d\theta \quad (3.16)$$

Здесь для краткости введены обозначения $a = x - \xi$, $b = y \mp \eta$. Как видно из формулы (3.16):

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial K_2}{\partial x} = -\frac{2a}{(a^2 + b^2 + \zeta^2)^{3/2}} \quad \left(\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\partial K_1}{\partial x} = 0 \right) \quad (3.17)$$

Поэтому при достаточно малых скоростях судна на основании формул (3.10), (3.9) и (3.8) можно получить для ординаты ζ_w следующее асимптотическое выражение:

$$\zeta_w \approx \frac{v^2}{2\pi g} \int_0^{-T} \int_{-1/2 L}^{1/2 L} (x - \xi) \left[\frac{1}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2]^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{[(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2 + \zeta^2]^{3/2}} \right] 2\chi(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi d\zeta \quad (3.18)$$

Отметим, что формулу (3.18) можно получить и другими путями.

Путем вычисления того или иного числа членов ряда (3.16) выражение для ζ_{w2} может быть уточнено. Входящие в члены этого ряда интегралы будут вида

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^n \theta d\theta}{(a \cos \theta + b \sin \theta - i\zeta)^n} \quad (3.19)$$

и вычисление их может быть произведено на основании теории вычетов.

В случае малых значений $|\alpha|$ имеем [2]

$$\begin{aligned} \sigma'(\alpha) = & -ie^{-i\alpha} \left[C + \ln \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{2n(2n)!} + \right. \\ & \left. + i \left(-\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \alpha^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} \right) \right] + \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $C = 0.5772\dots$ эйлерова постоянная.

Рассмотрим предельный случай скорости корабля, когда $v \rightarrow \infty$ ($v = g/v^2 \rightarrow 0$). Согласно (3.4) можно записать

$$\lim_{v \rightarrow 0} L_2 = \lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial K_2(a, b, \zeta)}{\partial x} \right) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{-v}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma'(\alpha) \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad (3.21)$$

Подставляя в эту формулу вместо $\sigma'(\alpha)$ выражение (3.20) и замечая, что $\lim \alpha = 0$ и $\lim (v \ln v) = 0$ при $v \rightarrow 0$, находим

$$\lim_{v \rightarrow 0} L_2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a \cos \theta + b \sin \theta - i\zeta} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad (3.22)$$

Вычисляя главное значение этого интеграла на основании теории вычетов и беря затем действительную часть, получаем

$$\lim_{v \rightarrow 0} L_2 = - \frac{2a\zeta}{(b^2 + \zeta^2) \sqrt{a^2 + b^2 + \zeta^2}} \quad (3.23)$$

Далее согласно (3.3) имеем

$$\lim_{v \rightarrow 0} L_1(a, b, \zeta) = \lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial K_1(a, b, \zeta)}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.24)$$

Следовательно, для ординат волнового профиля ζ_w при неограниченном возрастании скорости корабля на основании (3.9), (3.10) и (3.23) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \zeta_w = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{-T} \int_{-1/2L}^{1/2L} (x - \xi) \zeta \left[\frac{1}{[(y - \eta)^2 + \zeta^2] \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{[(y + \eta)^2 + \zeta^2] \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2 + \zeta^2}} \right] 2\chi(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi d\zeta \end{aligned} \quad (3.25)$$

§ 4. Покажем, что из результатов Кочина вытекают как частный случай выражения для ординат волнового профиля и волнового сопротивления корабля в предположениях Мичелля.

Для волнового сопротивления судна, погруженного в жидкость на некоторую глубину, Кочиным была получена формула:

$$R_w = \frac{\rho g^2}{\pi v^4} \int_0^{1/2\pi} |H(k, \theta)|^2 \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad (4.1)$$

Здесь ρ — массовая плотность жидкости

$$H(k, \theta) = - \int_S q(\xi, \eta, \zeta) e^{i k \zeta} e^{i k (\xi \cos \theta + \eta \sin \theta)} dS$$

причем k согласно (3.7). Выражение (4.1) можно привести к виду

$$R_w = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int_0^{1/2\pi} (J_1^2 + J_2^2) \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad (4.2)$$

где функции J_1 и J_2 определяются по формуле (3.12). Пользуясь теперь допущением Мичелля о малости толщины корабля по сравнению с его длиной и осадкой, можно положить в формуле (3.12) $\cos m\eta = 1$; значение функции $2\chi(\xi, \eta, \zeta)$ для такого «тонкого» судна, как уже отмечалось, может быть принято равным $2\chi \approx 1$. Если при этом сделать замену переменных $\lambda = \sec \theta$, то получим формулу в обычном виде:

$$R_w = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int_1^\infty (I_1^2 + I_2^2) \frac{\lambda^2 d\lambda}{V\lambda^2 - 1} \quad (4.3)$$

где

$$I_1 = \int_0^{-T} \exp \frac{g\lambda^2 \zeta}{v^2} d\zeta \int_{-1/2 L}^{1/2 L} \cos \frac{g\lambda \xi}{v^2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi, \quad I_2 = \int_0^{-T} \exp \frac{g\lambda^2 \zeta}{v^2} d\zeta \int_{-1/2 L}^{1/2 L} \sin \frac{g\lambda \xi}{v^2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi \quad (4.4)$$

По этим же функциям I_1 и I_2 определится ордината волны ζ_{w1} согласно формуле (3.11). Выражения для второго слагаемого ординаты волнового профиля ζ_{w2} при таких допущениях о форме судна также упрощаются. Упрощение получают и формулы (3.18) и (3.25):

$$\zeta_w \approx \frac{v^2}{\pi g} \int_0^{-T} \int_{-1/2 L}^{1/2 L} \frac{x - \xi}{[(x - \xi)^2 + y^2 + \zeta^2]^{3/2}} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi d\zeta \quad \text{при } v \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

$$\zeta_w \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{-T} \int_{-1/2 L}^{1/2 L} \frac{(x - \xi) \zeta}{(y^2 + \zeta^2) V(x - \xi)^2 + y^2 + \zeta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi d\zeta \quad \text{при } v \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

Заметим, что к формулам (4.5) и (4.6) можно прийти исходя из выражения для потенциала скоростей, полученного Мичеллем.

§ 5. Исследуем, пользуясь равенством (4.6), профиль волн, образуемых кораблем при неограниченном возрастании его скорости. Применяя к (4.6) формулу интегрирования по частям и замечая, что для судов нормальной формы можно принимать в оконечностях судна, т. е. при $\xi = \pm \frac{1}{2} L$, ординаты $\eta = 0$, находим

$$\zeta_w = \frac{1}{\pi} \int_0^{-T} \int_{-1/2 L}^{1/2 L} \frac{\zeta \eta(\xi, \zeta)}{[(x - \xi)^2 + y^2 + \zeta^2]^{3/2}} d\xi d\zeta \quad (5.1)$$

Из этой формулы видно, что ординаты волнового профиля во всех точках (x, y) свободной поверхности жидкости будут одного и того же знака, т. е. корабль при $v \rightarrow \infty$ создает над поверхностью невозмущенной воды так называемую «одиночную волну», или «волну перемещения».

При этом $\zeta_w \rightarrow 0$, когда точка $(x, y) \rightarrow \infty$, причем быстрота убывания ординат волны ζ_w с возрастанием

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2 + \zeta^2} \approx \sqrt{x^2 + y^2}$$

весьма значительная. Действительно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^3 \zeta_w = \frac{1}{\pi} \int_0^{-T} \zeta d\zeta \int_{-1/2 L}^{1/2 L} \eta d\xi = \frac{1}{2\pi} V Z_c$$

где V — объемное водоизмещение судна, Z_c — расстояние от центра величины судна до действующей ватерлинии.

Следовательно, при достаточно больших R получаем

$$\zeta_w \approx \frac{V Z_c}{2\pi R^3} \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что при больших R вокруг корабля волны будут цилиндрическими. Далее нетрудно показать, что

$$\frac{\partial \zeta_w}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_w}{\partial y} = O(R^{-3}) \quad (5.3)$$

т. е. при больших R волновой профиль достаточно быстро приближается к поверхности спокойной воды.

Покажем теперь, что объем одиночной волны Q , создаваемой кораблем, равен его объемному водоизмещению V . Согласно (5.1) имеем

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_w dx dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{-T} \int_{-1/2 L}^{1/2 L} \gamma \zeta \eta d\xi d\zeta = V \quad (5.4)$$

При этом использовано

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{[(x - \xi)^2 + y^2 + \zeta^2]^{3/2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r d\phi dr}{(r^2 + \zeta^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\zeta} \quad (5.5)$$

Как известно из теории волн, скорость переноса энергии одиночной волны совпадает со скоростью движения ее волнового профиля. Отсюда следует, что при $v \rightarrow \infty$ волновое сопротивление судна обратится в нуль. К этому же результату мы придем также непосредственно из формул (4.2) и (3.12), устремляя скорость судна $v \rightarrow \infty$.

Поступила 24 XI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Труды Конференции по теории волнового сопротивления, стр. 65—133. Изд. ЦАГИ, 1937.
2. Кочин Н. Е. Собрание сочинений, т. II, стр. 105—182. Изд. АН СССР, 1949.