Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ДВИЖЕНИИ ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Г. И. Баренблатт

(Москва)

В работе дается вывод общих уравнений для турбулентного движения неоднородной, т. е. содержащей взвешенные частицы, жидкости. Из общих уравнений получаются уравнения плоского движения неоднородной жидкости, в среднем однородного по горизонтали и стационарного.

Задача о движении взвешенных частиц в турбулентном потоке представляет значительный интерес как теоретический, так и прикладной, в связи с различными техническими проблемами, из которых в первую очередь должны быть отмечены: гидромеханизация земляных работ, движение наносов в реках, движение запыленных газов, пневмотранспорт зерна и др. В литературе имеются две группы работ по теории движения взвешенных частиц в турбулентном потоке [1].

Так называемая диффузионная теория (В. М. Маккавеев [2]) рассматривает движение взвешенных частиц подобно тому, как обычно рассматривают диффузионные процессы в турбулентном потоке, т. е. принимает, что взвешенные частицы представляют собой субстанцию, переносимую потоком, но не оказывающую обратного влияния на динамику этого потока. (Мы не останавливаемся здесь на упрощающих предположениях В. М. Маккавеева, не обусловливаемых существом поставленной задачи и нужных для сведéния задачи к классическому уравнению теплопроводности. Не говоря о недостаточной физической обоснованности этих упрощений, отметим, что упомянутое сведéние не представляется в настоящий момент необходимым, так как мы располагаем возможностями для вполне эффективного решения широкого круга задач без подобного рода упрощений.) Как будет показано далее, разумно построенная диффузионная концепция имеет определенную область применимости, однако, вообще говоря, недостаточна.

Разработанная М. А. Великановым [3] гравитационная теория представляет собой попытку учета воздействия взвешенных в потоке частиц на динамику несущего потока. М. А. Великанов, повидимому, впервые указал на необходимость учета такого воздействия и вычислил работу потока на поднятие взвешенных частиц. Однако М. А. Великанов не учел, что указанная работа войдет как слагаемое в уравнение баланса пульсационной энергии потока; за счет совершения этой работы будет уменьшаться сравнительно с соответствующим потоком однородной жидкости именно пульсационная энергия. (Отметим в связи с этим, что факт падения пульсаций и сопротивления потока, несущего взвешенные частицы, сравнительно с соответствующим потоком однородной жидкости был давно уже установлен рядом экспериментаторов.) Поэтому основное уравнение М. А. Великанова, — «уравнение энергий», не может быть признано правильным.

В предлагаемой статье рассматриваются потоки с малым относительным объемом взвешенных частиц; при этом предполагается малость частиц и малость ускорений потока сравнительно с ускорением силы тяжести (речь идет о мгновенных ускорениях, а не об ускорениях среднего потока). Работа основана на идеях А. Н. Колмогорова о балансе пульсационной энергии потока. Автор считает долгом принести А. Н. Колмогорову глубокую благодарность за его руководство работой.

§ 1. Основные гипотезы и вывод общих уравнений. 1°. Будем пользоваться системой прямоугольных координат x_1, x_2, x_3, причем ось x_3 направлена вертикально вверх. Введем следующие обозначения: d_1 — плотность жидкости, d_2 — плотность частиц, ρ — относительный объем взвешенных частиц[1], v_i — компоненты по осям x_i скорости жидкости, $i = 1, 2, 3$, w_i — компоненты по осям x_i скорости частиц, f_i — компоненты силы взаимодействия частиц и жидкости, приходящейся на единицу объема смеси, по осям x_i; g_i — компоненты ускорения силы тяжести по осям x_i.

В предположении, что молекулярной диффузией частиц в потоке можно пренебречь, имеем уравнение движения жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial t} d_1 (1-\rho) v_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} d_1 (1-\rho) v_i v_\alpha = -\frac{\partial sp}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{\alpha i}^{(1)}}{\partial x_\alpha} - d_1 (1-\rho) g_i - f_i \quad (1.1)$$

где p — полное гидродинамическое давление в данной точке неоднородной жидкости, s — доля давления, приходящаяся на жидкую фазу неоднородной жидкости, $0 < s \leqslant 1$ (допускается взаимодействие частиц между собой), $\tau_{\alpha i}^{(1)}$ — тензор вязких напряжений в жидкости. (Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся греческим индексам от единицы до трех.)

В том же предположении имеем уравнение движения частиц:

$$\frac{\partial}{\partial t} d_2 \rho w_i + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} d_2 \rho w_i w_\alpha = -\frac{\partial (1-s) p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{\alpha i}^{(2)}}{\partial x_\alpha} - d_2 \rho g_i + f_i \quad (1.2)$$

где $\tau_{\alpha i}^{(2)}$ — тензор напряжений, возникающих от взаимодействия частиц. Складывая (1.1) и (1.2), получаем уравнение количества движения для неоднородной жидкости:

$$\frac{\partial D V_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{\alpha i}}{\partial x_\alpha} - D g_i \quad (1.3)$$

Здесь

$$D = d_1 (1-\rho) + d_2 \rho \quad (1.4)$$

плотность неоднородной жидкости в данной точке потока;

$$V_i = \frac{d_1 (1-\rho) v_i + d_2 \rho w_i}{D} \quad (1.5)$$

скорость движения центра тяжести бесконечно малого объема неоднородной жидкости, окружающего данную точку;

$$\Pi_{i\alpha} = d_1 (1-\rho) v_i v_\alpha + d_2 \rho w_i w_\alpha \quad (1.6)$$

$$T_{i\alpha} = \tau_{i\alpha}^{(1)} + \tau_{i\alpha}^{(2)} \quad (1.7)$$

Отметим, что при небольших относительных объемах взвешенных в потоке частиц тензор $\tau_{\alpha i}^{(1)}$ имеет такое же строение, как и в однород-

[1] «Мутность» по терминологии М. А. Великанова.

ной вязкой несжимаемой жидкости, с небольшой эйнштейновской поправкой за счет увеличения вязкости от наличия в потоке взвешенных частиц[1], а тензор $\tau_{\alpha i}^{(2)}$ мал сравнительно с $\tau_{\alpha i}^{(1)}$.

Уравнения сохранения массы для жидкости и частиц имеют соответственно вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} d_1 (1-\rho) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} d_1 (1-\rho) v_\alpha = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} d_2 \rho + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} d_2 \rho w_\alpha = 0 \tag{1.9}$$

Складывая их, получаем уравнение баланса массы неоднородной жидкости:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial D V_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{1.10}$$

Разделяя уравнения (1.8) и (1.9) соответственно на d_1 и d_2 и складывая, получаем уравнение неразрывности для неоднородной жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} [(1-\rho) v_\alpha + \rho w_\alpha] = 0 \tag{1.11}$$

Уравнения (1.3), (1.10), (1.11) представляют собой систему основных уравнений рассматриваемой задачи, выведенную в достаточно общих предположениях. Сделанные выше дополнительные предположения о характере потока позволяют эту систему замкнуть. Ввиду сделанных предположений о малости частиц и малости ускорений потока сравнительно с ускорением силы тяжести можно принять, что горизонтальные компоненты скорости частиц и жидкости совпадают, а вертикальные отличаются на некоторую величину a, т. е.

$$w_i = v_i - a\delta_{i3} \qquad (\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \quad \delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j) \tag{1.12}$$

При этом величина a — гидравлическая крупность частиц — считается известной функцией от относительного объема взвешенных частиц ρ, которая должна быть предварительно определена теоретически или экспериментально[2]. Считая величину a зависящей только от ρ, мы тем самым предполагаем, что все частицы в потоке одинаковы. При жела-

---

[1] Как известно, вязкость жидкости, несущей взвешенные частицы, увеличивается сравнительно с той же жидкостью, свободной от частиц. В случае малого относительного объема взвешенных частиц ρ для эффективной динамической вязкости μ неоднородной жидкости имеет место соотношение А. Эйнштейна

$$\mu = \mu^\circ (1 + c\rho)$$

где μ° — вязкость соответствующей однородной жидкости, c — константа, примерно равная 2.5.

[2] Зависимость a от ρ существенна при рассмотрении потоков со значительными относительными объемами взвешенных частиц, таких, как пульпа. Во всех рассуждениях этого пункта не делается предположения о малости относительного объема взвешенных частиц.

нии можно сделать предположение о наличии в потоке частиц нескольких размеров, что не вызовет существенных осложнений постановки задачи. Предположение (1.12) дает

$$V_i = v_i - \frac{1}{D} d_2 \rho a \delta_{i3} = w_i + \frac{1}{D} d_1 (1-\rho) a \delta_{i3} \tag{1.13}$$

$$\Pi_{i\alpha} = D V_i V_\alpha + \frac{1}{D} d_1 d_2 \rho (1-\rho) a^2 \delta_{i3} \delta_{\alpha 3} \tag{1.14}$$

$$(1-\rho) v_\alpha + \rho w_\alpha = V_\alpha + \frac{1}{D} (d_2 - d_1) a \rho (1-\rho) \delta_{\alpha 3} \tag{1.15}$$

Подставляя (1.13), (1.14), (1.15) в (1.3) и (1.11), получим

$$\frac{\partial D V_i}{\partial t} + \frac{\partial D V_i V_\alpha}{\partial x_\alpha} = -D g_i + \frac{\partial T_{\alpha i}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - d_1 d_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{a^2 \rho (1-\rho)}{D} \right] \delta_{i3} \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} = -(d_2 - d_1) \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{a \rho (1-\rho)}{D} \right] \tag{1.17}$$

Подставляя (1.17) в (1.10), получим уравнение баланса массы:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial D}{\partial x_\alpha} = (d_2 - d_1) D \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{a \rho (1-\rho)}{D} \right] \tag{1.18}$$

Система уравнений (1.16), (1.17), (1.18) представляет собой замкнутую систему уравнений относительно независимых V_i, p, D.

2°. Явление взвешивания частиц в потоке, в среднем горизонтальном, объясняется наличием в этом потоке пульсационной вертикальной составляющей скорости движения. Ламинарный горизонтальный поток частиц нести не может, если частицы настолько велики, что можно пренебречь молекулярной диффузией их. Отсюда следует, что особенный интерес для рассматриваемой задачи представляют турбулентные движения неоднородной жидкости. Для изучения турбулентных движений неоднородной жидкости следует перейти к осредненным уравнениям движения. Осреднение уравнений движения следует производить в смысле взятия математических ожиданий величин, входящих в уравнения. Полученные уравнения в силу эргодической гипотезы будут приближенно справедливы для характеристик движения, осредненных по промежуткам времени, малым сравнительно с характерным временем для среднего течения и большим сравнительно с характерным временем пульсаций.

В настоящей статье мы ограничимся случаем малых относительных объемов взвешенных частиц и малых масс, переносимых потоком, т. е.

$$\rho \ll 1, \qquad \sigma\rho \ll 1, \qquad \sigma = \frac{d_2 - d_1}{d_1}$$

Вывод основных уравнений без этого ограничения будет дан в следующей работе.

3°. В случае малых ρ можно считать гидравлическую крупность частиц a постоянной величиной, равной скорости равномерного осаждения одной частицы в бесконечном пространстве, занятом жидкостью.

В принятых предположениях относительно характера потока основная система уравнений движения неоднородной жидкости запишется в виде

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial V_i}{\partial x_\alpha} = -(1 + \sigma\rho) g_i + \frac{\partial T_{\alpha i}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{d_1}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = a \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} = -a\sigma \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \tag{1.21}$$

В силу малости относительного объема взвешенных частиц неоднородность жидкости следует учитывать только в уравнении баланса массы, а в остальных уравнениях только, если член, зависящий от неоднородности жидкости, имеет множитель g. Это объясняется тем, что такой член, будучи помноженным на большой множитель g, может оказаться динамически весьма значительным, как это будет иметь место, например, в уравнении баланса пульсационной энергии. Отсюда следует, что уравнение (1.21) можно записать в виде

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{1.22}$$

Осредняя уравнение количества движения неоднородной жидкости, получим

$$\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \overline{V_i' V_\alpha'}}{\partial x_\alpha} - (1 + \sigma\overline{\rho}) g_i + \frac{\partial \overline{T}_{\alpha i}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{d}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \tag{1.23}$$

(Черточкой сверху обозначается, как обычно, математическое ожидание величины.) В последнем уравнении мы пренебрегли по общему принципу членом $\overline{V_i' \partial V_\alpha' / \partial x_\alpha}$. Осредняя уравнение баланса массы и пренебрегая малым членом порядка $a\overline{\rho'^2}$, получим

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \overline{\rho' V_\alpha'}}{\partial x_\alpha} = a \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_3} \tag{1.24}$$

Осредняя уравнение неразрывности, получим

$$\frac{\partial \overline{V}_\alpha}{\partial x_\alpha} = -a\sigma \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_3} \tag{1.25}$$

Везде, кроме вопросов, связанных с балансом массы, это уравнение может применяться в виде

$$\frac{\partial \overline{V}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{1.26}$$

Перейдем к выводу уравнения баланса пульсационной энергии потока неоднородной жидкости.

Уравнение баланса пульсационной энергии для потока однородной несжимаемой жидкости дано А. Н. Колмогоровым в 1942 г. [4] Наилучший вывод этого уравнения с обобщением на сжимаемую жидкость содержится в работе А. С. Монина 1950 г. [5] Для задачи о движении взвешенных частиц в турбулентном потоке рассмотрение баланса пульсационной энергии особенно интересно, так как взвешивание частиц потоком требует затраты им пульсационной энергии, вызывая ее уменьшение.

Будем рассматривать потоки, в которых гидравлическая крупность частиц имеет порядок пульсации скорости; последнюю будем считать малой сравнительно со средней скоростью потока.

С точностью до пренебрежимо малой величины порядка ρa^2 кинетическая энергия единицы объема неоднородной жидкости равна

$$E = \tfrac{1}{2} D \sum_{i=1}^{3} V_i^2 \approx \tfrac{1}{2} d_1 \sum_{i=1}^{3} V_i^2$$

Далее

$$\overline{E} = E^\circ + B, \qquad E^\circ = \tfrac{1}{2} d_1 \sum \overline{V}_i^2, \qquad B = \overline{D' V_\alpha'}\, \overline{V}_\alpha + \tfrac{1}{2} d_1 \sum_{i=1}^{3} \overline{V_i'^2}$$

Здесь E° — кинетическая энергия единицы объема неоднородной жидкости в среднем движении, B — средняя пульсационная энергия, складывающаяся из работы средней реактивной силы на среднем движении и средней энергии турбулентных пульсаций скорости на единицу объема смеси, причем в принятых предположениях относительно потока первое слагаемое мало сравнительно со вторым.

Для рассмотрения баланса пульсационной энергии неоднородной жидкости следует вычислить величину

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial B}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial \overline{E}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial E^\circ}{\partial t} - \overline{V}_\alpha \frac{\partial E^\circ}{\partial x_\alpha} \tag{1.27}$$

Положим

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

Величина $d\varphi / dt$ является аналогом субстанциональной производной некоторой функции φ для движений неоднородной жидкости. Пренебрегая по общему принципу малым слагаемым $\overline{E' (\partial V_\alpha' / \partial x_\alpha)}$, получим

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial \overline{E}}{\partial x_\alpha} = \overline{\frac{dE}{dt}} - \frac{\partial \overline{E' V_\alpha'}}{\partial x_\alpha}$$

Далее из осредненных уравнений, пренебрегая по общему принципу малыми слагаемыми, получим

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = d_1 \overline{V_\alpha \frac{dV_\alpha}{dt}} = -\overline{D}\,\overline{V}_3 g - \overline{D' V_3'}\, g + \overline{V_\beta \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}} - \frac{\partial \overline{p V_\alpha}}{\partial x_\alpha}$$

$$\frac{\partial E^\circ}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial E^\circ}{\partial x_\alpha} = -d_1 \frac{\partial \overline{V_\alpha' V_\beta'}}{\partial x_\alpha} - \overline{D}\,\overline{V}_3 g + \overline{V}_\beta \frac{\partial \overline{T}_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \overline{p}\,\overline{V}_\beta}{\partial x_\beta}$$

Пренебрегая по общему принципу малыми слагаемыми, получим

$$\overline{E' V_\alpha'} = \tfrac{1}{2} d_1 \sum_{i=1}^{3} \overline{V_i'^2 V_\alpha'} + d_1 \overline{V_\alpha' V_\beta'}\, \overline{V}_\beta$$

Легко видеть, что имеют место соотношения

$$\frac{\partial \overline{V_\alpha' V_\beta' \overline{V}_\beta}}{\partial x_\alpha} - \overline{V}_\beta \frac{\partial \overline{V_\alpha' V_\beta'}}{\partial x_\alpha} = \overline{V_\alpha' V_\beta'} \frac{\partial \overline{V}_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2} \overline{V_\alpha' V_\beta'}\, \overline{\varepsilon}_{\alpha\beta}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}$$

$$\overline{V_\beta \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}} - \overline{V}_\beta \frac{\partial \overline{T}_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \overline{V_\beta' \frac{\partial T_{\alpha\beta}'}{\partial x_\alpha}} = \frac{\partial \overline{V_\beta' T_{\alpha\beta}'}}{\partial x_\alpha} - \overline{T_{\alpha\beta}' \frac{\partial V_\beta'}{\partial x_\alpha}} = \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} - Q$$

$$q_\alpha = \overline{V_\beta' T_{\alpha\beta}'}, \qquad Q = \frac{1}{2} \overline{T_{\alpha\beta}' \varepsilon_{\alpha\beta}'}$$

где q_α — компонента по оси x_α вектора плотности потока пульсационной энергии благодаря молекулярному переносу турбулентных образований, Q — диссипация пульсационной энергии на единицу объема неоднородной жидкости. Подставляя полученные соотношения в (1.27), получим уравнение баланса пульсационной энергии потока неоднородной жидкости:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial B}{\partial x_\alpha} = -\overline{D' V_3'}\, g - \frac{\partial \overline{p' V_\alpha'}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} - Q - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\frac{1}{2} d_1 \sum_{i=1}^{3} \overline{V_i'^2 V_\alpha'}\right] - \frac{1}{2} d_1 \overline{V_\alpha' V_\beta'}\, \overline{\varepsilon}_{\alpha\beta} \tag{1.28}$$

Укажем физический смысл членов, входящих в правую часть этого уравнения. Можно показать, что:

первый член выражает собой затрату пульсационной энергии на подъем потоком взвешенных частиц;

второй член выражает собой приток пульсационной энергии благодаря работе пульсаций давления на пульсационном движении;

третий член выражает собой приток пульсационной энергии благодаря молекулярному переносу турбулентных образований;

четвертый член выражает собой диссипацию пульсационной энергии;

пятый член выражает собой приток пульсационной энергии благодаря турбулентному переносу турбулентных образований.

шестой член выражает собой приток пульсационной энергии за счет ее заимствования из энергии среднего движения.

Таким образом, все члены, кроме первого, имеют тот же смысл, что и соответствующие члены уравнения баланса пульсационной энергии однородной несжимаемой жидкости (см. указанную работу А. С. Монина[5]). Первый член может быть значительным даже при малом относительном объеме взвешенных частиц благодаря большому множителю g.

Отметим теперь, что второй член, выражающий собой приток пульсационной энергии за счет работы пульсаций давления на пульсационном движении, мал и может быть отброшен. Далее, третий член мал сравнительно с пятым членом всюду, кроме окрестности неподвижных поверхностей, имеющихся в потоке, вблизи которых градиенты скорости крайне велики и третий член значителен. Поскольку мы отказываемся от рассмотрения движения в непосредственной окрестности неподвижных стенок, третий член также может быть отброшен.

Внося соответствующие упрощения также в уравнение количества движения, получим основную систему уравнений задачи о движении взвешенных частиц в турбулентном потоке:

$$\text{(I.1)}\qquad \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial \overline{V_i'V_\alpha'}}{\partial x_\alpha}=-(1+\sigma\overline{\rho})\,g_i-\frac{1}{d_1}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}$$

$$\text{(I.2)}\qquad \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial \overline{\rho' V_\alpha'}}{\partial x_\alpha}=a\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_3}$$

$$\text{(I.3)}\qquad \frac{\partial \overline{V}_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$$

$$\text{(I.4)}\qquad \frac{\partial B}{\partial t}+\overline{V}_\alpha\frac{\partial B}{\partial x_\alpha}=-\sigma g d_1\overline{\rho' V_3'}-Q-$$
$$-\frac{1}{2}d_1\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{3}\overline{V_i'^2V_\alpha'}\right)-\frac{1}{2}d_1\overline{V_\alpha'V_\beta'}\,\overline{e}_{\alpha\beta}$$

4°. Применим полученные общие соотношения к случаю плоского, в среднем стационарного и однородного по горизонтали потока. Этот случай представляется интересным с точки зрения приложения и вместе с тем наиболее простым.

Так как поток в среднем стационарен и однороден по горизонтали, то

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_1}=-d_1C,\qquad \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_2}=\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_3}=0$$

Здесь C — некоторая константа, имеющая размерность квадрата скорости. Для рассматриваемого класса движений основная система уравнений (I.1) — (I.4) принимает вид:

$$\overline{V}_3\frac{d\overline{V}_1}{dx_3}+\frac{d\overline{V_1'V_3'}}{dx_3}=C\qquad \text{(Взято уравнение, отвечающее } i=1\text{)}\qquad (1.29)$$

$$-\overline{V}_3\frac{d\overline{\rho}}{dx_3}-\frac{d\overline{\rho'V_3'}}{dx_3}+a\frac{d\overline{\rho}}{dx_3}=0\qquad (1.30)$$

$$\frac{d\overline{V}_3}{dx_3}=-a\sigma\frac{d\overline{\rho}}{dx_3}\qquad (1.31)$$

(Здесь взято осредненное уравнение неразрывности в его полной форме (1.25), а не упрощенной (1.26), чтобы на примере рассматриваемого частного класса движений выяснить характер вносимых таким образом упрощений.)

$$-\overline{V}_3\frac{dB}{dx_3}-\sigma d_1\overline{\rho' V_3'}\,g-Q-\frac{d}{dx_3}\left(\frac{1}{2}d_1\sum_{i=1}^{3}\overline{V_i'^2V_3'}\right)-$$
$$-d_1\overline{V_1'V_3'}\frac{d\overline{V}_1}{dx_3}-\frac{1}{2}d_1\overline{V_3'^2}\frac{d\overline{V}_3}{dx_3}=0\qquad (1.32)$$

Проинтегрировав (1.31), получим

$$\overline{V}_3=-a\sigma\overline{\rho}\qquad (1.33)$$

Константа интегрирования равна нулю, так как средний поток вещества по вертикали равен нулю.

Далее, подставим (1.33) в (1.30), проинтегрируем и пренебрежем членом порядка $a\bar{\rho}^2$; получим

$$\overline{\rho' V_3'} = a\bar{\rho} \tag{1.34}$$

Отсюда получаем выражение для работы взвешивания частиц потоком, приходящейся на единицу объема неоднородной жидкости[1]:

$$-\overline{D' V_3'}\, g = -\sigma g\, d_1\, a\bar{\rho} \tag{1.35}$$

Из (1.33) следует, что первый член левой части (1.20) пренебрежимо мал сравнительно со вторым и может быть отброшен. Интегрируя (1.29), получим

$$\overline{V_1' V_3'} = -v_*^2 + Cx_3$$

где v_* — некоторая константа, имеющая размерность скорости. Из (1.33) следует далее, что первый и последний члены уравнения (1.32) малы и могут быть отброшены. Окончательно система основных уравнений для плоского потока неоднородной жидкости, в среднем стационарного и однородного по горизонтали, имеет вид:

(II.1) $\qquad \overline{V_1' V_3'} = -v_*^2 + Cx_3$

(II.2) $\qquad \overline{\rho' V_3'} = a\bar{\rho}$

(II.3) $\qquad \sigma g d_1\, a\bar{\rho} + Q + \frac{1}{2} d_1 \frac{d}{dx_3}\left(\sum_{i=1}^{3} \overline{V_i'^2 V_3'}\right) + d_1 \overline{V_1' V_3'}\, \frac{d\bar{V}_1}{dx_3} = 0$

Если $d\bar{V}_1 / dx_3 \neq 0$ в области движения, то обычно третий член уравнения (II.3), выражающий собой приток пульсационной энергии благодаря турбулентной диффузии турбулентных образований, мал сравнительно с прочими членами и может быть учтен в порядке поправки, а в первом приближении отброшен[2]. Уравнение (II.3) тогда примет вид:

$$\sigma g d_1\, a\bar{\rho} + Q + d_1 \overline{V_1' V_3'}\, \frac{d\bar{V}_1}{dx_3} = 0 \tag{1.36}$$

---

[1] Более подробное рассмотрение, не предполагающее $\bar{\rho}$ малым, дает следующее выражение для этой работы:

$$-\overline{D' V_3'}\, g = -\sigma g d_1 a\,(\bar{\rho})\,\bar{\rho}\,(1-\bar{\rho})$$

в пренебрежении членами порядка $\overline{\rho'^2}$. Впервые это выражение было указано М. А. Великановым [3] в предположении $a = \text{const}$. Следует отметить, что распространение теории на случай $\bar{\rho}$ настолько значительных, что учет множителя $1-\bar{\rho}$ становится существенным, требует учета зависимости гидравлической крупности a от относительного объема взвешенных частиц. В следующей работе этот вопрос будет разобран детально.

[2] Наоборот, при $d\bar{V}_1 / dx_3 = 0$ (например, в случае однородной жидкости, на срединной плоскости плоской трубы) наличие пульсаций может быть объяснено лишь их переносом из тех областей потока, где $d\bar{V}_1 / dx_3 \neq 0$.

§ 2. Замыкание системы осредненных уравнений. Уравнения движения неоднородной жидкости в форме А. Н. Колмогорова. 1°. Выше была получена система основных уравнений (I.1) — (I.4) для общей задачи о движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. Ввиду нелинейности исходной системы система осредненных уравнений получилась незамкнутой. Для ее замыкания необходимо принять те или иные гипотезы о связи неизвестных величин между собой. Это можно делать по-разному. В предлагаемой работе выбирается некоторый вариант, мыслимы и другие подходы.

Обозначим пульсационную энергию, приходящуюся на единицу массы неоднородной жидкости, через b; тогда

$$B = \overline{D}b \approx d_1 b$$

Примем следующие гипотезы:

$$\overline{V_\alpha' V_\beta'} = \frac{2}{3} b\delta_{\alpha\beta} - \nu_1 \overline{\varepsilon}_{\alpha\beta} \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \overline{V_i'^2 V_\alpha'} = -\nu_2 \frac{\partial b}{\partial x_\alpha} \tag{2.2}$$

$$\overline{\rho' V_\alpha'} = -\lambda \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_\alpha} \tag{2.3}$$

где ν_1, ν_2, λ — некоторые характеристики потока. (Гипотетическим является, собственно, скалярный характер этих величин.) Эти гипотезы вполне аналогичны гипотезам, обычно принимаемым при рассмотрении термически неоднородных турбулентных течений.

Основная система уравнений примет вид:

$$\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_\alpha} = -(1+\sigma\overline{\rho})\, g_i - \frac{1}{d_1}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial b}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\nu_1 \overline{\varepsilon}_{\alpha i}) \tag{III.1}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\lambda \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_\alpha}\right) + a\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_3} \tag{III.2}$$

$$\frac{\partial \overline{V}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{III.3}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial b}{\partial x_\alpha} = \sigma g \lambda \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_3} - \frac{1}{d_1} Q + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\nu_2 \frac{\partial b}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{\nu_1 \overline{\varepsilon}_{\alpha\beta}\, \overline{\varepsilon}_{\alpha\beta}}{2} \tag{III.4}$$

При выводе последнего уравнения использовано соотношение

$$\overline{\varepsilon}_{11} + \overline{\varepsilon}_{22} + \overline{\varepsilon}_{33} = 2\frac{\partial \overline{V}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

2°. Предлагаемая постановка задачи дает возможность учесть действие переносимых потоком частиц на динамику несущего потока. Вместе с тем полученная система показывает, что когда работа потока на взвешивание частиц мала, т. е. член $\sigma g \lambda \partial\overline{\rho} / \partial x_3$ мал сравнительно с прочими членами уравнения баланса пульсационной энергии, то влияние взвешенных частиц на динамику несущего потока оказывается пренебрежимо малым. При этом система распадается на независимые между собой уравнения движения жидкости и уравнение баланса массы в потоке:

(IV.1) $$\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_\alpha} = -g_i - \frac{1}{d_1}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial b}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\nu_1 \overline{\varepsilon}_{\alpha i})$$

(IV.2) $$\frac{\partial \overline{V}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

(IV.3) $$\frac{\partial b}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial b}{\partial x_\alpha} = -\frac{Q}{d_1} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\nu_2 \frac{\partial b}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{\nu_1 \overline{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,\overline{\varepsilon}_{\alpha\beta}}{2}$$

(IV.4) $$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\lambda \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_\alpha}\right) + a\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_3}$$

Характеристика λ должна определяться из уравнений движения жидкости и не зависит от содержания взвешенных частиц в потоке. Это показывает, что при указанных обстоятельствах применима диффузионная концепция движения взвешенных частиц в турбулентном потоке.

3°. В случае плоского, горизонтально-однородного и стационарного в среднем потока гипотезы (2.1), (2.2), (2.3) гипотезами вообще не являются, а представляют собой определения величин ν_1, ν_2, λ. Система (II.1) — (II.3) принимает вид:

(V.1) $$\nu_1 \frac{d\overline{V}_1}{dx_3} = v_*^2 - Cx_3$$

(V.2) $$a\overline{\rho} + \lambda \frac{d\overline{\rho}}{dx_3} = 0$$

(V.3) $$\sigma g a d_1 \overline{\rho} + Q - d_1 \frac{d}{dx_3}\left(\nu_2 \frac{db}{dx_3}\right) - d_1\nu_1\left(\frac{d\overline{V}_1}{dx_3}\right)^2 = 0$$

Если работа потока на взвешивание частиц мала, т. е. член $\sigma a g d_1 \overline{\rho}$ мал сравнительно с прочими членами уравнения (V.3), то система распадается на независимые между собой систему уравнений движения жидкости и уравнение баланса массы

(VI.1) $$\nu_1 \frac{d\overline{V}_1}{dx_3} = v_*^2 - Cx_3$$

(VI.2) $$Q - \frac{d_1}{2}\frac{d}{dx_3}\left(\nu_2 \frac{db}{dx_3}\right) - d_1\nu_1\left(\frac{d\overline{V}_1}{dx_3}\right)^2 = 0$$

(VI.3) $$a\overline{\rho} + \lambda \frac{d\overline{\rho}}{dx_3} = 0$$

Отметим также частный случай, когда работа потока по взвешиванию частиц мала, следовательно, применима диффузионная концепция движения взвешенных частиц; движение жидкости стационарно и однородно по горизонтали в среднем, движение же частиц в среднем стационарно, но не однородно по горизонтали (так будет, например, если поток переходит из русла с размываемым ложем в русло с неразмываемым).

Пренебрегая в уравнении баланса массы по общему принципу членом $\overline{V}_3 d\overline{\rho} / dx_3$ и членом

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_1}\right)$$

что означает пренебрежение диффузионным переносом сравнительно с конвективным в горизонтальном направлении, приведем уравнение баланса массы в потоке к виду

$$\overline{V}_1(x_3)\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\lambda(x_3)\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_3}\right) + a\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_3} \tag{2.4}$$

Уравнения движения жидкости (VI.1) и (VI.2) останутся в силе. Уравнение (2.4) отличается от уравнения турбулентной теплопроводности только вторым членом правой части. Различные краевые задачи для уравнения турбулентной теплопроводности были рассмотрены в работе [6]; метод, примененный в этой работе, легко обобщается на уравнение (2.4). Заметим, что пренебрегать вторым членом правой части недопустимо.

4°. Возвратимся к общей системе уравнений и примем для ее замыкания основную гипотезу А. Н. Колмогорова.

Характеристики потока ν_1, ν_2, λ *и диссипация пульсационной энергии на единицу массы смеси* $Q / D \approx Q / d_1$ *определяются величиной* b *и некоторой величиной* l, *имеющей размерность длины.*

Из теории размерностей следует, что

$$\nu_1 = ql\sqrt{b}, \quad \nu_2 = q_1 l\sqrt{b}, \quad \lambda = q_2 l\sqrt{b}, \quad Q = cd_1\frac{b^{3/2}}{l} \tag{2.5}$$

где q, q_1, q_2, c — универсальные константы. Пользуясь некоторой свободой в определении l, можно определить l так, чтобы $q = 1$. Определение q_1, q_2, c — в конечном счете задача эксперимента. На основании существующих экспериментальных данных, повидимому, можно считать, что $q_1 = q_2 = 1$, т. е. при надлежащем выборе l имеем $q = q_1 = q_2 = 1$.

Значение c определяется следующим образом (подробнее см. работу А. С. Монина (5)). Рассмотрим движение однородной жидкости в полупространстве, ограниченном снизу плоскостью $x_3 = 0$, при отсутствии градиента давлений. Из теории размерностей следует, что вне непосредственной близости плоскости

$$l = \varkappa\gamma x_3$$

где $\varkappa$ — константа Кармана, γ — некоторая универсальная константа. Как известно, распределение продольных скоростей по оси x_3 имеет для рассматриваемого течения вид:

$$\overline{V}_1 = \frac{v_*}{\varkappa}\ln x_3 + \mathrm{const}$$

Пульсационная энергия единицы массы жидкости равна

$$b = \frac{v_*^2}{\gamma^2}$$

Полагая в (VIII.3) $\bar{\rho} = 0$ и подставляя туда последние выражения, легко получим, что $c = \gamma^4$. Измерения Е. М. Минского показали, что γ примерно равно 0.5.

Внося (2.5) в систему (III.1) — (III.4), получим систему основных уравнений задачи в форме А. Н. Колмогорова:

$$\text{(VII.1)} \quad \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \bar{V}_\alpha \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_\alpha} = -(1 + \sigma\bar{\rho})\, g_i - \frac{1}{d_1}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial b}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(l\sqrt{b}\,\bar{\varepsilon}_{\alpha i})$$

$$\text{(VII.2)} \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{V}_\alpha \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_\alpha} = q_2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(l\sqrt{b}\,\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_\alpha}\right) + a\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_3}$$

$$\text{(VII.3)} \quad \frac{\partial \bar{V}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$$

$$\text{(VII.4)} \quad \frac{\partial b}{\partial t} + \bar{V}_\alpha \frac{\partial b}{\partial x_\alpha} = \sigma g q_2 l\sqrt{b}\,\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_3} - c\frac{b^{3/2}}{l} + q_1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(l\sqrt{b}\,\frac{\partial b}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{l\sqrt{b}\,\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}}{2}$$

В случае плоского, горизонтально-однородного и стационарного в среднем потока единственной гипотезой является гипотеза А. Н. Колмогорова. При этом система (V.1) — (V.3) принимает вид:

$$\text{(VIII.1)} \quad l\sqrt{b}\,\frac{d\bar{V}_1}{dx_3} = v_*^2 - Cx_3$$

$$\text{(VIII.2)} \quad a\bar{\rho} + q_2 l\sqrt{b}\,\frac{d\bar{\rho}}{dx_3} = 0$$

$$\text{(VIII.3)} \quad \sigma a g\bar{\rho} + c\,\frac{b^{3/2}}{l} - q_1\frac{d}{dx_3}\left(l\sqrt{b}\,\frac{db}{dx_3}\right) - l\sqrt{b}\left(\frac{d\bar{V}_1}{dx_3}\right)^2 = 0$$

Системы (VII.1) — (VII.4) и (VIII.1) — (VIII.3) замкнуты относительно входящих в них неизвестных величин, если известно l как функция от координат или известна связь l с неизвестными величинами.

Не делая никаких предположений относительно l, можно высказать некоторые соображения о пульсационной энергии потока. Исключая $l\sqrt{b}$ и $\bar{\rho}$ при помощи формул (VIII.1) и (VIII.2), получаем формулу

$$b = \frac{v_*^2 - Cx_3}{\gamma^2}\left\{1 + \sigma g q_2 \frac{d\bar{\rho}}{dx_3}\left(\frac{d\bar{V}_1}{dx_3}\right)^{-2} + q_1\left[(v_*^2 - Cx_3)\frac{d\bar{V}_1}{dx_3}\right]^{-1}\frac{d}{dx_3}\left[\frac{v_*^2 - Cx_3}{dV_1/dx_3}\,\frac{db}{dx_3}\right]\right\}^{1/2} \tag{2.6}$$

В пренебрежении диффузией турбулентных образований эта формула принимает вид:

$$b = \frac{v_*^2 - Cx_3}{\gamma^2}\left\{1 + \sigma g q_2 \frac{d\bar{\rho}}{dx_3}\left(\frac{d\bar{V}_1}{dx_3}\right)^{-2}\right\}^{1/2} \tag{2.7}$$

Формулы (2.6) и (2.7) показывают, что пульсационная энергия единицы массы неоднородной жидкости уменьшается сравнительно с соответствующим потоком однородной жидкости, т. к. $d\bar{\rho} / dx_3$ отрицательно.

Как было указано выше, этот вывод, повидимому, вполне подтверждается экспериментом. Безразмерная комбинация

$$K = -\sigma g q_2 \frac{d\bar{\rho}}{ax_3} \left(\frac{d\bar{V}_1}{dx_3}\right)^{-2}$$

будет часто встречаться при рассмотрении движения неоднородной жидкости. Она аналогична известному числу Ричардсона, которое встречается при изучении термически неоднородных турбулентных потоков.

Таким образом, получена замкнутая система основных уравнений задачи о турбулентных движениях неоднородной жидкости в достаточно общих предположениях относительно характера движения. Для определения l следует использовать дополнительные соображения.

Полученная система учитывает обратное действие взвешенных частиц на динамику несущего потока. В соответствии со сказанным выше, если член, выражающий работу потока на поднятие взвешенных частиц, мал сравнительно с прочими членами уравнения баланса пульсационной энергии, система разбивается на замкнутую систему уравнений движения чистой жидкости и уравнения баланса массы, коэффициенты которого определяются из уравнений движения жидкости. Это и есть область применимости диффузионной концепции.

Еще раз отметим, что замыкание при помощи гипотезы А. Н. Колмогорова представляет собой один из возможных вариантов замыкания, возможны и другие варианты.

Поступила 21 II 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Дискуссия между диффузионной и гравитационной теориями движения взвешенных наносов. Известия АН СССР, ОТН, № 11, 1951; № 2, 6, 8, 9, 11, 12, 1952.
2. Маккавеев В. М. К теории турбулентного режима и взвешивания наносов. Известия ГГИ, № 32, 1931.
3. Великанов М. А. Перенос взвешенных частиц турбулентным потоком. Известия АН СССР, ОТН, № 3, 1944; Движение наносов. М., Речиздат, 1948; К вопросу о гравитационной теории движения взвешенных наносов. Известия АН СССР, ОТН, № 11, 1951.
4. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Известия АН СССР, серия физич., т. VI, № 1—2, 1942.
5. Монин А. С. Динамическая турбулентность в атмосфере. Известия АН СССР серия геогр. и геофизич., т. XIV, № 3, 1950.
6. Баренблатт Г. И. и Левитан Б. М. О некоторых краевых задачах для уравнения турбулентной теплопроводности. Известия АН СССР, серия математ., т. XVI, № 3, 1952.