Институт механики Академии наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

# КОНЦЕНТРАЦИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

А. М. Пивоваров

(Москва)

Эта работа посвящена определению концентрации касательных напряжений при кручении призматических стержней, в профиле сечений которых имеются входящие углы. Рассмотрены задачи о кручении профиля с входящими углами, равными 0 и 90°, и построены графики касательных напряжений вблизи этих углов.

**§ 1. Постановка задачи.** Касательные напряжения в любой точке области $D$ поперечного сечения призматического стержня, как известно, определяются по формулам

$$\tau_{xz} = G\vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = -G\vartheta \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

Здесь $\vartheta$ — угол поворота на единицу длины, $G$ — модуль сдвига, $\varphi$ — функция напряжений при кручении, удовлетворяющая уравнению $\nabla^2\varphi = -2$. Если область $D$ односвязная, то на контуре $S$ должно выполняться условие $\varphi = 0$. Следовательно, задача об определении касательных напряжений в какой-нибудь точке $A$ поперечного сечения, которая не является угловой и не близка к ней, сводится к отысканию производных $\partial\varphi / \partial x$, $\partial\varphi / \partial y$, а нахождение напряжения в точке $A_0$ контура области — к определению нормальной производной $\partial\varphi / \partial\nu$, где $\nu$ — внутренняя нормаль к контуру. Нормальную производную будем определять методом, изложенным в работах [1,2]. Этот метод позволяет определить нормальную производную по формуле

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{A_0} = \frac{1}{\pi}\left\{\iint\limits_D 2g_0\, d\xi\, d\eta - \frac{2}{n+1}\iint\limits_D \psi^*(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right\} \tag{1.1}$$

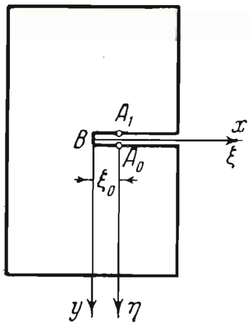
Здесь $g_0$ — гармоническая функция в области $D$, за исключением точки $A_0$ контура $S$, где она обладает особенностью вида $r_0^{-1}\cos\theta_0$, далее $r_0$ — радиус-вектор, соединяющий точку $P(\xi, \eta)$ области $D$ с точкой $A_0$, а $\theta_0$ — угол между радиусом-вектором $r_0$ и внутренней нормалью к контуру $S$ в точке $A_0$, $\psi^*$ — гармоническая функция, принимающая на контуре $S$ значения

$$\psi^*(\xi, \eta) = \{g_0(\xi, \eta) + g_1(\xi, \eta) + \cdots + g_n(\xi, \eta)\}_S \tag{1.2}$$

при этом $n+1$ — число симметричных точек $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если контур $S$ области $D$ не имеет угловых точек или если касательные напряжения определяются вдали от этих точек, то выбор функций $g_0(\xi, \eta)$ указан в работах [1,2]. Для определения касательных напряжений вблизи входящих углов, где имеет место концентрация касательных напряжений, функцию $g_0$ положим равной

$$g_0(\xi, \eta) = \frac{m}{\xi_0^{1-m}} \frac{\rho^m \sin m\beta}{\rho^{2m} - 2(\rho\xi_0)^m \cos m\beta + \xi_0^{2m}} \tag{1.3}$$

Здесь $\rho$ и $\xi_0$ — соответственно расстояния от угловой точки $B$ до точек $P(\xi, \eta)$ и $A_0$, далее через $\beta$ обозначен угол между радиусом-вектором $\rho$ и осью $x$.




Фиг. 1

Значение $m$ определяется значением $\mu_1$ входящего угла:

$$m = \frac{\pi}{2\pi - \mu_1}$$

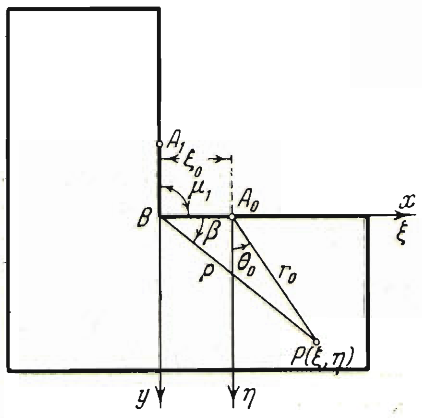
Если входящий угол $\mu_1 = 0$ (профиль с разрезом, фиг. 1), то

$$m = \frac{\pi}{2\pi - 0} = \frac{1}{2}$$

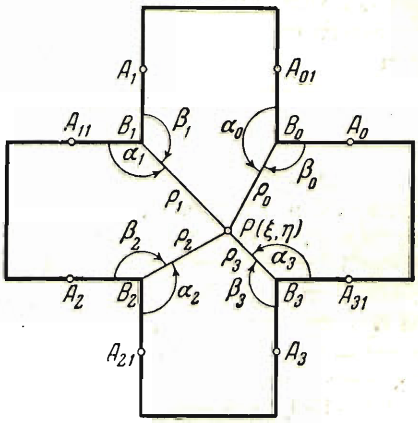
Далее, если входящий угол $\mu_1 = 90^\circ$ (фиг. 2), то

$$m = \frac{\pi}{2\pi - {}^1/_2\pi} = \frac{2}{3}$$

Предполагая, что в общем случае контур имеет $2(n+1)$ симметричных точек




Фиг. 2




Фиг. 3

(см., например, фиг. 3), и подставляя выражение (1.3) в (1.2), имеем на контуре $S$

$$\psi^*(\xi, \eta) = \frac{m}{\xi_0^{1-m}} \left\{ \frac{\rho_0^m \sin m\beta_0}{\rho_0^{2m} - 2(\rho_0\xi_0)^m \cos m\beta_0 + \xi_0^{2m}} + \frac{\rho_0^m \sin m\alpha_0}{\rho_0^{2m} - 2(\rho_0\xi_0)^m \cos m\alpha_0 + \xi_0^{2m}} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho_n^m \sin m\beta_n}{\rho_n^{2m} - 2(\rho_n\xi_0)^m \cos m\beta_n + \xi_0^{2m}} + \frac{\rho_n^m \sin m\alpha_n}{\rho_n^{2m} - 2(\rho_n\xi_0)^m \cos m\alpha_n + \xi_0^{2m}} \right\}_S \qquad (1.4)$$

где

$$m(\alpha_k + \beta_k) = \pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

причем $\alpha_k$ и $\beta_k$ указаны на рисунке. Для дальнейшего удобно положить

$$\psi^*(\xi, \eta) = \frac{m}{\xi_0^{1-m}} \psi(\xi, \eta). \qquad (1.5)$$

Так как значение нормальной производной (1.1) определяется через интеграл от искомой функции $\psi$, то погрешность при ее определении будет во многих случаях невелика, если даже воспользоваться сеткой с крупным шагом. Функцию $\psi$ можно определять различными способами. Мы будем ее определять методом конечных разностей.

**§ 2. Определение концентрации касательных напряжений при кручении призматического стержня, поперечное сечение которого имеет входящий угол $\mu_1 = 0$ (профиль с разрезом, фиг. 4).** Определение первого двойного интеграла в выражении (1.1) сведем к вычислению двух интегралов (фиг. 4). Для рассматриваемого случая $\mu_1 = 0$, $m = {}^1/_2$ функция (1.3) имеет вид:

$$g_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\xi_0^{1/2}}\, g(\rho, \beta)$$

$$g(\rho, \beta) = \frac{\rho^{1/2} \sin {}^1/_2\beta}{\rho - 2(\rho\xi_0)^{1/2} \cos {}^1/_2\beta + \xi_0}$$

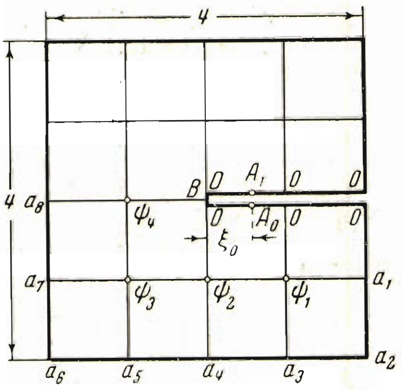
следовательно,

$$\iint\limits_D g_0\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{2\xi_0^{1/2}} \iint\limits_D g\, d\xi\, d\eta = \frac{J_{11} + J_{12}}{2\xi_0^{1/2}} \qquad (2.1)$$

где

$$J_{11} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} g(\rho, \beta)\, d\rho\, d\beta$$

$$J_{12} = \int_2^\rho \int_0^{2\pi} g(\rho, \beta)\, d\rho\, d\beta$$




Фиг. 4

После простых вычислений для $J_{11}$ и $J_{12}$ получаем следующие выражения:

$$J_{11} = \frac{1}{\sqrt{\xi_0}}(4 - \xi_0^2) \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{\xi_0}}{\sqrt{2} - \sqrt{\xi_0}} + 2\left(\frac{2}{3} + \xi_0\right)\sqrt{2} \qquad (2.2)$$

$$J_{12} = \int_0^{2\pi} \Big\{ \frac{2}{3}(\rho^{3/2} - \sqrt{8}) \sin \frac{1}{2}\beta + \xi_0^{1/2}(\rho - 2) \sin\beta +$$

$$+ 2\xi_0(2\cos\beta + 1)(\rho^{1/2} - 2^{1/2}) \sin \frac{1}{2}\beta + \xi_0^{3/2} \sin 2\beta \ln \frac{\rho - 2\rho^{1/2}\xi_0^{1/2}\cos {}^1/_2\beta + \xi_0}{2 - 2\sqrt{2}\,\xi_0^{1/2}\cos {}^1/_2\beta + \xi_0} +$$

$$+ 2\xi_0^{3/2}\cos 2\beta \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\rho^{1/2} - \xi_0^{1/2}\cos {}^1/_2\beta}{\xi_0^{1/2}\sin {}^1/_2\beta} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2} - \xi_0^{1/2}\cos {}^1/_2\beta}{\xi_0^{1/2}\sin {}^1/_2\beta}\right]\Big\}\, d\beta \qquad (2.3)$$

Для вычисления второго двойного интеграла в выражении (1.1) определим функцию $\psi$ методом конечных разностей. Сначала найдем контурное значение функции $\psi$ по формуле (1.4), при этом считаем, что касательные напряжения в точках $A_0$ и $A_1$ одинаковые; тогда для данного случая $n + 1 = 2$ формула (1.4) имеет вид:

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{\rho_0^{1/2} \sin {}^1/_2\beta_0}{\rho_0 - 2(\rho_0\xi_0)^{1/2}\cos {}^1/_2\beta_0 + \xi_0} + \frac{\rho_0^{1/2} \sin {}^1/_2\alpha_0}{\rho_0 - 2(\rho_0\xi_0)^{1/2}\cos {}^1/_2\alpha_0 + \xi_0} \qquad (2.4)$$

где

$$\frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0) = \pi$$

Для $\psi_i^\circ$ значений функции $\psi$ от $\xi_0$ на контуре в точках $a_1, \ldots, a_8$ вычисления дают

$$\psi_1^\circ = \frac{1.5365 + 0.6872\xi_0}{5 - 4.0002\xi_0 + \xi_0^2}, \qquad \psi_2^\circ = \frac{3.6407 + 1.2872\xi_0}{8 - 4.0001\xi_0 + \xi_0^2}, \qquad \psi_4^\circ = \frac{4 + 2\xi_0}{4 + \xi_0^2}$$

$$\psi_3^\circ = \frac{3.5161 + 1.5724\xi_0}{5 - 2.0001\xi_0 + \xi_0^2}, \qquad \psi_5^\circ = \frac{5.6888 + 2.5441\xi_0}{5 + 1.9997\xi_0 + \xi_0^2} \qquad (2.5)$$

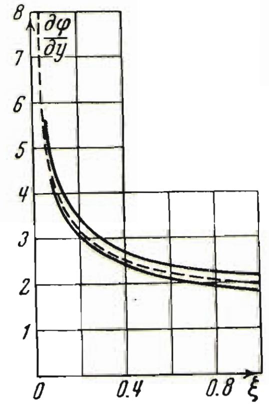
$$\psi_6^\circ = \frac{8.7894 + 3.1076\xi_0}{8 + 4\xi_0 + \xi_0^2}, \qquad \psi_7^\circ = \frac{6.5087 + 2.9107\xi_0}{5 + 4\xi_0 + \xi_0^2}, \qquad \psi_8^\circ = \frac{2.8284}{2 + \xi_0}$$

*Таблица 1*

| $\xi_0$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_{11}$ | 7.5424 | 8.2504 | 8.8604 | 9.3638 | 9.7494 | 10.0022 |
| $J_{12}$ | 1.5217 | 1.5744 | 1.6225 | 1.6663 | 1.7409 | 1.8180 |
| $J_{13}$ | 9.9359 | 10.1338 | 10.2951 | 10.4081 | 10.4696 | 10.4871 |
|  | 10.8129 | 11.0765 | 11.3589 | 11.6651 | 12.0044 | 12.2034 |
| $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ | $\infty$ | 3.3864 | 2.6852 | 2.3942 | 2.2262 | 2.0935 |
|  | $\infty$ | 3.0509 | 2.4175 | 2.1359 | 1.9531 | 1.8203 |

Для определения функции $\psi$ внутри контура заменим гармоническое уравнение для $\psi$ уравнением в конечных разностях. Для этого возьмем сетку с крупным шагом $h = 1$ и составим простые пятичленные уравнения. Получим

$$4\psi_1 = \psi_2^\circ + \psi_4^\circ, \qquad 4\psi_2 = \psi_3^\circ + \psi_4 + \psi_5^\circ,$$
$$4\psi_3 = \psi_4^\circ + \psi_6^\circ + \psi_8^\circ, \qquad 4\psi_4 = 2\psi_7^\circ + 2\psi_2 \tag{2.6}$$




Фиг. 5

Далее, как показано в работе [2], значение второго двойного интеграла в выражении (1.1) по области квадрата со стороной $2h$ можно вычислить по формуле

$$\iint\limits_D \psi\, d\xi\, d\eta = 4h^2\psi_0 \tag{2.7}$$

где $\psi_0$ — значение функции $\psi$ в центре квадрата. Тогда в данном случае

$$J_{13} = \iint\limits_D \psi\, d\xi\, d\eta = 2\,(\psi_2^\circ + 2\psi_4^\circ + \psi_6^\circ + \psi_8^\circ)$$

Возьмем сетку с тем же шагом $h = 1$, но составим теперь более точные девятичленные уравнения в конечных разностях. Получим

$$\begin{aligned} 20\psi_1 &= 4\psi_1^\circ + \psi_2^\circ + 4\psi_3^\circ + \psi_4^\circ + 4\psi_2 \\ 20\psi_2 &= \psi_3^\circ + 4\psi_4^\circ + \psi_5^\circ + 4\psi_1 + 4\psi_3 + \psi_4 \\ 20\psi_3 &= \psi_4^\circ + 4\psi_5^\circ + \psi_6^\circ + 4\psi_7^\circ + \psi_8^\circ + 4\psi_2 + 4\psi_4 \\ 20\psi_4 &= 2\psi_7^\circ + 4\psi_8^\circ + 2\psi_2 + 8\psi_3 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Отсюда

$$\psi_1 = 0.2089\psi_1^\circ + 0.0522\psi_2^\circ + 0.2199\psi_3^\circ + 0.0992\psi_4^\circ + 0.0217\psi_5^\circ + 0.0027\psi_6^\circ + 0.0128\psi_7^\circ + 0.0070\psi_8^\circ$$

$$\psi_3 = 0.0106\psi_1^\circ + 0.0027\psi_2^\circ + 0.0239\psi_3^\circ + 0.1132\psi_4^\circ + 0.2433\psi_5^\circ + 0.0575\psi_6^\circ + 0.2544\psi_7^\circ + 0.1062\psi_8^\circ$$

По формуле (2.7) получим

$$J_{13} = 1.7557\psi_1^\circ + 0.4389\psi_2^\circ + 1.9504\psi_3^\circ + 1.6989\psi_4^\circ + 2.1200\psi_5^\circ + 0.4813\psi_6^\circ + 2.1373\psi_7^\circ + 09053\psi_8^\circ$$

Зная $J_{11}$, $J_{12}$, $J_{13}$, по формуле (1.1) находим значения нормальной производной как функции от $\xi_0$. Результаты вычислений приведены в табл. 1. При этом для величин $J_{13}$ и $\partial\varphi / \partial y$ в первых и вторых строках соответственно указаны значения, полученные при решении пятичленных и девятичленных разностных уравнений.

Из табл. 1 видно, что значения интегралов $J_{12}$ и $J_{13}$ относительно мало изменяются с изменением $\xi_0$. Вычисления $\partial\varphi / \partial y$ в предположении, что $J_{12}$ и $J_{13}$ не изменяются с изменением $\xi_0$ и равны $\partial\varphi / \partial y$ при $\xi_0 = 0$ дают

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi_0 = 0$ | 0.025 | 0.05 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
| $\partial\varphi / \partial y = \infty$ | 7.5318 | 5.5808 | 4.0488 | 3.1072 | 2.5041 | 2.2515 | 2.0871 | 1.9473 |

На (фиг. 5) приведены три кривые, дающие распределение касательных напряжений вблизи входящего угла. Причем верхняя и нижняя кривые соответствуют значениям табл. 1, а средняя (пунктирная) — значениям, полученным при $\xi_0 = 0$.

**§ 3. Определение концентрации касательных напряжений при кручении призматического стержня, профиль поперечного сечения которого имеет входящий угол $\mu_1 = \frac{1}{2}\pi$ (фиг. 6).** Определение первого двойного интеграла в выражении (1.1) так же как и в первой задаче, сведем к вычислению двух интегралов (фиг. 6).

Для данного случая $\mu_1 = {}^1/_2\,\pi$, $m = {}^2/_3$ функция (1.3) будет иметь следующий вид:

$$g_0(\xi, \eta) = \frac{2}{3\xi^{1/3}}\, g(\rho, \beta)$$

где

$$g(\rho, \beta) = \frac{\rho^{2/3} \sin {}^2/_3\beta\, d\xi d\eta}{\rho^{4/3} - 2\rho^{2/3}\xi_0^{2/3} \cos {}^2/_3\beta + \xi_0^{4/3}}$$

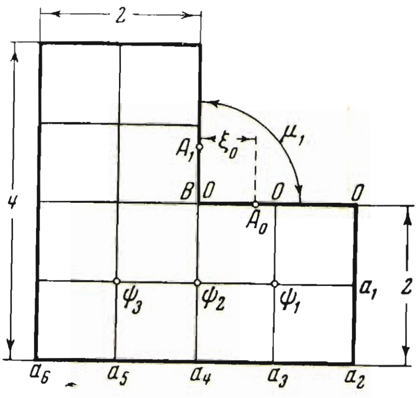
Следовательно,

$$\iint\limits_D g_0 d\xi\, d\eta = \frac{2}{3\xi_0^{1/3}}(J_{11} + J_{12}) \tag{3.1}$$

где

$$J_{11} = \int\limits_0^{2^3/_2\pi}\int\limits_0 g(\rho, \beta)\, d\rho\, d\beta$$

$$J_{12} = \int\limits_2^{\rho^3/_2\pi}\int\limits_0 g(\rho, \beta)\, d\rho\, d\beta$$




Фиг. 6

После простых вычислений для $J_{11}$ и $J_{12}$ получаем следующие выражения:

$$J_{11} = \frac{3}{\sqrt[3]{\xi_0^2}} \ln \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{\xi_0^2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{\xi_0^2}} + \frac{3}{4}\xi_0^{4/3} \ln\left(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{\xi_0^4}\right) - \frac{3}{2}\left(\xi_0^{4/3} \ln \xi_0^{2/3} - \sqrt[3]{2}\right) \tag{3.2}$$

$$J_{12} = \int\limits_0^{3/_2\pi} \Big\{ 0.75\left(\rho^{4/3} - 2\sqrt[3]{2}\right) \sin {}^2/_3\beta + 1.5\,\xi_0^{2/3} \sin {}^4/_3\beta \left(\rho^{2/3} - \sqrt[3]{4}\right) +$$

$$+ 0.75\,\xi_0^{4/3}(2\cos {}^4/_3\beta + 1)\sin {}^2/_3\beta \ln \frac{\rho^{4/3} - 2\rho^{2/3}\xi_0^{2/3}\cos {}^2/_3\beta + \xi_0^{4/3}}{2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}\,\xi_0^{2/3}\cos {}^2/_3\beta + \xi_0^{4/3}} +$$

$$+ 1.5\,\xi_0^{4/3}\cos {}^2/_3\beta\,(2\cos {}^4/_3\beta - 1)\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\rho^{2/3} - \xi_0^{2/3}\cos {}^2/_3\beta}{\xi_0^{2/3}\sin {}^2/_3\beta} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt[3]{4} - \xi_0^{2/3}\cos^2/_3\beta}{\xi_0^{2/3}\sin {}^2/_3\beta}\right]\Big\}\, d\beta \tag{3.3}$$

Вычислим второй двойной интеграл в выражении (1.1), предварительно определим функцию $\psi$ методом конечных разностей. Сначала найдем контурные значения

*Таблица 2*

| $\xi_0$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_{11}$ | 5.6696 | 5.9949 | 6.2750 | 6.4826 | 6.6106 | 6.6520 |
| $J_{12}$ | 1.0096 | 1.0290 | 1.0540 | 1.1143 | 1.1813 | 1.2630 |
| $J_{13}$ | 6.3645 | 6.3865 | 6.3954 | 6.3768 | 6.3304 | 6.2608 |
| | 6.8558 | 6.9203 | 7.0217 | 7.1460 | 7.2980 | 7.4283 |
| $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ | $\infty$ | 2.7800 | 2.3798 | 2.2184 | 2.1153 | 2.0307 |
| | $\infty$ | 2.5863 | 2.1994 | 2.0249 | 1.8942 | 1.7829 |

$\psi$ по формуле (1.4), при этом считаем, что касательные напряжения в точках $A_0$ и $A_1$ одинаковые; тогда для данного случая $n+1=2$ формула (1.4) имеет вид:

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{\rho_0^{2/3}\sin {}^2/_3\,\beta_0}{\rho_0^{4/3} - 2\rho_0^{2/3}\xi_0^{2/3}\cos {}^2/_3\,\beta_0 + \xi_0^{4/3}} + \frac{\rho_0^{2/3}\sin {}^2/_3\,\alpha_0}{\rho_0^{4/3} - 2\rho_0^{2/3}\xi_0^{2/3}\cos {}^2/_3\,\alpha_0 + \xi_0^{4/3}} \qquad (3.4)$$

где $\alpha_0 + \beta_0 = 2\pi$, а функция $\psi$ на контуре в точках $a_1, \ldots, a_6$ будет:

$$\psi_1^\circ = \frac{3.0418 + 1.0403\,\xi_0^{4/3}}{(2.9241 + \xi_0^{4/3})^2 - 10.6142\,\xi_0^{4/3}}, \qquad \psi_2^\circ = \frac{8 + 2\xi_0^{4/3}}{(4 + \xi_0^{4/3})^2 - 12\xi_0^{4/3}}$$

$$\psi_3^\circ = \frac{6.7293 + 2.3013\,\xi_0^{4/3}}{(2.9241 + \xi_0^{4/3})^2 - 6.4003\,\xi_0^{4/3}}, \qquad \psi_4^\circ = \frac{6.9283 + 2.7495\,\xi_0^{4/3}}{(2.5198 + \xi_0^{4/3})^2 - 2.5198\,\xi_0^{4/3}}$$

$$\psi_5^\circ = \frac{9.7712 + 3.3416\,\xi_0^{4/3}}{(2.9241 + \xi_0^{4/3})^2 - 0.5301\,\xi_0^{4/3}}, \qquad \psi_6^\circ = \frac{4}{4 + \xi_0^{4/3}}$$

Перейдем к определению функции $\psi$ внутри контура. Гармоническое уравнени для $\psi$ заменим уравнением в конечных разностях. Попрежнему возьмем сетку с шагом $h=1$ и составим пятичленные разностные уравнения. Получим

$$4\psi_1 = \psi_2^\circ + \psi_4^\circ, \qquad 3\psi_2 = \psi_3^\circ + \psi_5^\circ, \qquad 4\psi_3 = 2\psi_4^\circ + \psi_6^\circ$$

По формуле (2.7) находим значение второго двойного интеграла в (1.1). Получим

$$J_{13} = \iint\limits_D \psi\, d\xi\, d\eta = 2\cdot 4h^2\psi_1 + 4h^2\psi_3 = 2\psi_2^\circ + 4\psi_4^\circ + \psi_6^\circ$$

Полагая $h=1$, составим более точные девятичленные разностные уравнения:

$$20\psi_1 = 4\psi_1^\circ + \psi_2^\circ + 4\psi_3^\circ + \psi_4^\circ + 4\psi_2$$
$$19\psi_2 = \psi_3^\circ + 4\psi_4^\circ + \psi_5^\circ + 4\psi_1 + 4\psi_3$$
$$20\psi_3 = 2\psi_4^\circ + 8\psi_5^\circ + \psi_6^\circ + 8\psi_2$$

Отсюда находим

$$8\psi_1 = 1.6771\,\psi_1^\circ + 0.4193\psi_2^\circ + 1.7735\psi_3^\circ + 0.8434\psi_4^\circ + 0.2506\psi_5^\circ + 0.0193\,\psi_6^\circ$$
$$4\psi_3 = 0.0771\,\psi_1^\circ + 0.0193\psi_2^\circ + 0.1735\psi_3^\circ + 0.8434\psi_4^\circ + 1.8506_5^\circ + 0.2193\,\psi_6^\circ$$

По формуле (2.7) найдем

$$J_{13} = (8\psi_1 + 4\psi_3)\,h^2 = 1.7542\,\psi_1^\circ + 0.4386\,\psi_2^\circ + 1.9470\,\psi_3^\circ + 1.6867\,\psi_4^\circ + $$
$$+ 2.1012\,\psi_5^\circ + 0.2386\,\psi_6^\circ$$

Зная $J_{11}$, $J_{12}$, $J_{13}$, находим значения нормальной производной по формуле (1.1) как функцию от $\xi_0$. Результаты вычислений приведены в табл. 2. При этом для величин $J_{13}$ и $\partial\varphi / \partial y$ в первых и вторых строках соответственно указаны значения, полученные при решении пятичленных и девятичленных разностных уравнений.

Из табл. 2 видно, что значения интегралов $J_{12}$ и $J_{13}$ относительно мало изменяются с изменением $\xi_0$. Вычисления $\partial\varphi / \partial y$ в предположении, что $J_{12}$, $J_{13}$ не изменяются с изменением $\xi_0$ и равны $\partial\varphi/\partial y$ при значении $\xi_0 = 0$, дают

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi_0 = 0$ | 0.025 | 0.05 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
| $\partial\varphi / \partial y = \infty$ | 4.8667 | 3.8234 | 3.1187 | 2.5957 | 2.2216 | 2.0452 | 1.9167 | 1.7968 |

Если построить кривые, дающие распределение касательных напряжений вблизи входящего угла, по данным табл. 2, а также кривую, соответствующую значениям, полученным при $\xi_0 = 0$, то получим картину, мало чем отличающуюся от фиг. 5.

**§ 4. Определение концентрации касательных напряжений при кручении призматических стержней с произвольным секториальным поперечным сечением радиуса $\rho = 2$ (фиг. 7).** Для рассматриваемого случая $J_{12} = 0$, тогда нормальная производная будет определяться по формуле

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{A_0} = \frac{m}{\pi\xi_0^{1-m}}\{2J_{11} - J_{13}\} \tag{4.1}$$

Найдем приближенное решение поставленной задачи. Для этого интеграл $J_{11}$ вычислим по точной формуле [интеграл $J_{11}$ берется в замкнутой форме; например, для случая $m = {}^1/_2$ и $m = {}^2/_3$ интеграл $J_{11}$ соответственно вычисляется по формулам (2.2) и (3.2)], а интеграл $J_{13}$, поскольку он относительно мало изменяется с изменением $\xi_0$, вычислим в предположении, что $\xi_0 = 0$. В этом случае функция $g_0$, определяемая равенством (1.3), будет иметь вид:

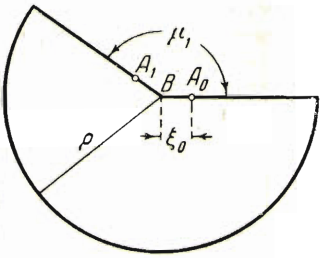
$$g_0 = \frac{m}{\xi_0^{1-m}} \frac{\sin m\beta}{\rho^m} \tag{4.2}$$

Функцию $\psi^*$ положим равной

$$\psi^* = \frac{2m}{2^{2m}\xi_0^{1-m}}\rho^m \sin m\beta \tag{4.3}$$

где функция (4.3) удовлетворяет уравнению (1.2) и условию (1.3). Интеграл $J_{13}$ от функции (4.3) для любого входящего угла $\mu_1$ равен:

$$J_{13} = \frac{16}{2^m(2+m)m} \tag{4.4}$$




Фиг. 7

Например, для рассмотренных случаев $m = {}^1/_2$ и $m = {}^2/_3$ нормальная производная, вычисленная по формуле (4.1) для $J_{11}$, соответственно вычисленного по формулам (2.2), (3.2), и $J_{13}$, вычисленного по формуле (4.4), имеет следующие числовые значения:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\xi_0 = 0$ | 0.025 | 0.05 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
| $m = \frac{1}{2}\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \infty$ | 6.2344 | 4.6631 | 3.4040 | 2.6512 | 2.1817 | 1.9882 | 1.8591 | 1.7433 |
| $m = \frac{2}{3}\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \infty$ | 4.2618 | 3.3435 | 2.7379 | 2.2934 | 1.9817 | 1.8356 | 1.7263 | 1.6201 |

Построение соответствующих кривых $\partial\varphi / \partial y$ дает картину, аналогичную фиг. 5.

Поступила 1 X 1952

## ЛИТЕРАТУРА

1. Слободянский М. Г. Определение производных искомых функций при решении задач методом конечных разностей. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
2. Пивоваров А. М. Определение касательных напряжений при кручении призматических стержней и перерезывающей силы при изгибе свободно опертых пластин. Инженерный сборник, т. XV, 1953.
3. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. ГТТИ, 1949.