Институт механики Академии наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМАЦИЯХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Г. С. Шапиро
(Москва)

В работе дано приближенное решение статической задачи теории упругости для деформаций стержня переменного сечения, аналогичное решению А. И. Лурье[1] для плоской задачи. Полученные результаты могут, например, оказаться полезными для решения задачи о концентрации напряжений при осевом растяжении стержня с выточкой произвольной глубины. Следует заметить, что динамические задачи о распространении упругих и упругопластических волн в стержнях переменного сечения с иной точки зрения рассматривались в работах [2, 3] автора[1].

§ 1 Рассмотрим осесимметричное равновесие стержня, ограниченного боковой поверхностью вращения $r = f(z)$. Функция $f(z)$ предполагается дифференцируемой нужное число раз. На торцевых поверхностях $z = 0$ и $z = l$ равнодействующая усилий статически эквивалентна растягивающей силе:

$$Z = 2\pi \int_0^{f(z)} r\sigma_z \, dr$$

Уравнениям равновесия можно удовлетворить, выразив напряжения через функцию φ следующим образом:

$$\sigma_r = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \qquad \sigma_z = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad \tau_{rz} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} \tag{1.1}$$

Зависимости (1.1) получаются как частный случай из формул П. Ф. Папковича [4] для задач теории упругости с осевой симметрией.

Краевые условия на боковой поверхности $r = f(z)$ имеют вид:

$$-\sigma_z \frac{dr}{ds} + \tau_{rz}\frac{dz}{ds} = t(z), \qquad -\tau_{rz}\frac{dr}{ds} + \sigma_r \frac{dz}{ds} = q(z) \tag{1.2}$$

Через $t(z)$ и $q(z)$ обозначены составляющие интенсивности усилий, приложенных на боковой поверхности стержня, направленные соответственно вдоль и перпендикулярно его оси.

Подставляя выражения для компонент напряжений (1.1) в первое уравнение (1.2) и интегрируя, находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{f(z)}\int_z^l f(u)\, t(u)\, \Delta(u)\, du + \frac{C_1}{f(z)} \qquad \left(\Delta(u) = \sqrt{1 + f'^2(u)}\right) \tag{1.3}$$

Пользуясь (1.3) и (1.1), можно найти интеграл второго уравнения (1.2):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \int_z^l \frac{d\xi}{f^2(\xi)}\int_\xi^l t(u)\, f(u)\, \Delta(u)\, du + C_1\int_z^l \frac{du}{f^2(u)} - \frac{1}{f(z)}\int_z^l q(u)\, f(u)\, \Delta(u)\, du + C_2 \tag{1.4}$$

---

[1] В формуле (2.8) для конического стержня работы [3] в первом слагаемом правой части должен быть опущен множитель $^1/_2 \ln \xi$, с последующим исправлением формулы (2.9). За указание на это я искренне благодарен В. С. Ленскому. В Московском университете А. И. Блохиной была рассмотрена задача о распространении упруго-пластических волн в коническом стержне при постоянном давлении на конце.

Постоянная C_1 определяется из уравнения равновесия для стержня между сечениями z и $z=l$:

$$2\pi\int\limits_0^{f(z)}\sigma_z r\,dr = 2\pi\int\limits_z^l t(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du + Z$$

Отсюда $C_1 = Z/2\pi$. Таком образом, условия (1.3) и (1.4) на боковой поверхности стержня примут вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{f(z)}\int\limits_z^l t(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du + \frac{Z}{2\pi f(z)} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \int\limits_z^l\frac{d\xi}{f^2(z)}\int\limits_\xi^l t(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du + \frac{Z}{2\pi}\int\limits_z^l\frac{du}{f^2(u)} - \frac{1}{f(z)}\int\limits_z^l q(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du + C_2 \tag{1.6}$$

Теперь, следуя А. И. Лурье, легко построить решение задачи. Положим

$$\varphi(rz) = \varphi_0(z) + r^2\varphi_1(z) + \Phi(rz) \tag{1.7}$$

где функция $\Phi(rz)$ должна обращаться в нуль со своей нормальной производной на боковой поверхности. Эти условия будут выполнены, если принять

$$\Phi(rz) = \sum_{k=1}^{n}(r^{2k}-f^{2k})^2\,\psi_k(z)$$

Суммирование ведется до некоторого конечного значения n, с увеличением которого точность решения повышается. Функции ψ_k можно определить при помощи вариационных методов (Ритца, Галеркина и других), функции φ_0 и φ_1 определяются следующим образом. Из условий (1.5), (1.6) и формулы (1.7) имеем

$$\varphi_0'(z) + f^2(z)\,\varphi_1'(z) = \int\limits_z^l\frac{d\xi}{f^2(\xi)}\int\limits_\xi^l t(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du + \frac{Z}{2\pi}\int\limits_z^l\frac{du}{f^2(u)} - \frac{1}{f(z)}\int\limits_z^l q(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du + C_2 \tag{1.8}$$

$$2f(z)\,\varphi_1(z) = \frac{1}{f(z)}\int\limits_z^l t(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du + \frac{Z}{2\pi f(z)} \tag{1.9}$$

Умножая (1.9) на $f'(z)$, складывая с (1.8) и интегрируя результат, имеем

$$\varphi_0(z) + f^2(z)\,\varphi_1(z) = \frac{Z}{2\pi}\ln f(z) - \int\limits_z^l[\ln f(u) - \ln f(z)]\,t(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du - \int\limits_z^l\frac{(\xi-z)}{f^2(\xi)}d\xi\int\limits_\xi^l t(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du - \frac{Z}{2\pi}\int\limits_z^l\frac{u-z}{f^2(u)}du + \int\limits_z^l q(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du\int\limits_z^u\frac{d\xi}{f(\xi)} \tag{1.10}$$

Слагаемое, линейно зависящее от z, здесь не принято во внимание. Уравнения (1.9) и (1.10) позволяют найти функции φ_0 и φ_1. Окончательное для φ имеем

$$\varphi(rz) = \frac{Z}{2\pi}\left[\ln f(z) + \frac{r^2}{2f^2(z)} - \int\limits_z^l\frac{u-z}{f^2(u)}du\right] + \sum_{k=1}^{n}(r^{2k}-f^{2k})^2\,\psi_k(z) - \int\limits_z^l[\ln f(u) - \ln f(z)]\,t(u)\,\Delta(u)\,du - \int\limits_z^l\frac{(\xi-z)}{f^2(\xi)}d\xi\int\limits_\xi^l t(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du - \frac{1}{2}\int\limits_z^l t(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du + \frac{r^2}{2f^2(z)}\int\limits_z^l t(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du + \int\limits_z^l q(u)\,f(u)\,\Delta(u)\,du\int\limits_z^u\frac{d\xi}{f(\xi)} \tag{1.11}$$

Полагая в (1.11) $\psi_k(z) = 0$, приходим к элементарному решению сопротивления материалов:

$$\sigma_z = \frac{1}{\pi f^2(z)} \left[Z + 2\pi \int_z^l t(u) f(u) \Delta(u)\, du \right]$$

§ 2. Переходим к приближенному решению трехмерной задачи о деформациях стержня переменного сечения, представляющей интерес в тех случаях, когда оба размера сечения (оно предполагается прямоугольным) имеют одинаковый порядок.

Поместим оси y и z в плоскости поперечного сечения стержня, а ось x совместим с осью стержня. Стержень ограничен плоскостями $z_1 = c$, $z_2 = -c$, поверхностями $y_1 = f(x)$, $y_2 = -f(x)$ и плоскими торцами $x = 0$, $x = l$. Функция $f(x)$ предполагается дифференцируемой нужное число раз. Пусть на торцах стержня равнодействующая усилий статически эквивалентна растягивающей силе X.

Предполагаем, что на плоскостях $z = \pm c$ выполнены условия

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{2.1}$$

Усилия, приложенные на поверхностях $y = \pm f(x)$, считаем равными нулю. Краевые условия на боковых поверхностях $y = \pm f(x)$ имеют вид

$$-\sigma_x \frac{dy}{ds} + \tau_{xy} \frac{dx}{ds} = 0, \qquad -\tau_{xy} \frac{dy}{ds} + \sigma_y \frac{dy}{ds} = 0 \tag{2.2}$$

Уравнениям равновесия можно удовлетворить, выразив напряжения через функции φ и χ следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}, \qquad \sigma_z = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\, \partial y}, \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial y\, \partial x}, \qquad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial x\, \partial z} \tag{2.4}$$

Зависимости (2.3) получаются как частный случай из известных формул Максвелла [5]. Функции $\varphi(xyz)$ и $\chi(xyz)$ представим в виде

$$\varphi(xyz) = U(xy)\, V(z), \qquad \chi(xyz) = \sum_{k=1}^{n} (y^{2k} - f^{2k})^2 (z^{2k} - c^{2k})^2 \psi_k(x) \tag{2.5}$$

Легко видеть, что при $\chi(xyz) = 0$, $V(y) = \text{const}$ имеем задачу о плоском напряженном состоянии, которая решается при помощи функции Эри $U(xy)$. Таким образом $\chi(xyz)$ и $V(z)$ можно рассматривать как функции, дающие «поправки» к плоскому напряженному состоянию.

Выражение (2.5) для функции $\chi(xyz)$ выбрано так, что условия (2.1) на граничных плоскостях $x = \pm c$ выполняется тождественно. На боковых поверхностях $y = \pm f(x)$ слагаемые в выражениях для напряжений, зависящие от $\chi(xyz)$ обращаются в нуль, поэтому условия (2.2) после интегрирования принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \pm C_1, \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = C_2 = 0$$

Постоянная C_1 определяется из уравнения равновесия для произвольного поперечного сечения x стержня

$$X = \int_{-f(x)}^{f(x)} \int_{-c}^{c} \sigma_x\, dy\, dz$$

Пользуясь формулами (2.3) — (2.5), это уравнение можно написать в виде

$$X = \int_{-c}^{c}\int_{-f(x)}^{f(x)} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right) dy\,dz = \int_{-c}^{c} V(z)\,dz \int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\,dy + \int_{-c}^{c}\int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\,dy\,dz \tag{2.6}$$

Обозначив через $w(c)$ значение

$$w(c) = \int_{-c}^{c} V(z)\,dz$$

и заметив, что, согласно (2.5), должно быть

$$\int_{-c}^{c}\int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\,dy\,dz = \int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{\partial\chi}{\partial z}\Big|_{-c}^{c}\,dy = 0$$

уравнению (2.6) можем придать вид

$$X = w(c)\,\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{-f(x)}^{f(x)}$$

Отсюда $C_1 = X / 2w(c)$. Таким образом, условия на боковой поверхности $y = \pm f(x)$ будут

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \pm\frac{X}{2w(c)}, \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, легко видеть, что функция U будет

$$U(xy) = \frac{X}{4w(c)}\left[f(x) + \frac{y^2}{f(x)}\right] + \sum_{k=1}^{m} (y^{2k} - f^{2k})^2\,\psi_k(x)$$

Полагая $\psi_k(x) = 0$ и $V(z) = 0$, приходим к элементарному решению сопротивления материалов

$$\sigma_x = \frac{X}{4cf(x)}$$

Таким образом, решение задачи привелось к определению функций $\psi_k(x)$ и $V(z)$. Эти функции можно определять посредством какого-либо из вариационных методов.

Примененный здесь способ без труда может быть использован для рассмотрения пространственной задачи о чистом изгибе балки переменного сечения путем надлежащего обобщения решения соответствующей плоской задачи, данного А. И. Лурье [1].

Настоящая работа выполнена в связи с задачами о концентрации напряжений в стержнях вблизи выточек, поставленными передо мной Г. В. Ужиком.

В заключение выражаю признательность А. И. Лурье, тщательно прочитавшему рукопись, за ряд ценных критических замечаний, а также А. Н. Ананьиной, взявшей на себя труд проверки выкладок.

Поступила 16 II 1953

Институт механики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Приближенное решение плоской задачи теории упругости для балки переменного сечения. Труды Ленинградского индустр. ин-та, раздел физ.-мат. наук, вып. 1, № 3, 1939.
2. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержней. ПММ, т. X, вып. 5—6, 1946.
3. Шапиро Г. С. Распространение упруго-пластичеких волн в стержнях переменного сечения. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.
4. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз, 1940.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, 1935.