Институт механики Академии наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТЕСНЕННОГО КРУЧЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

В. В. Болотин

(Москва)

Теория расчета тонкостенных стержней на прочность, устойчивость и колебания разработана, как известно, В. З. Власовым [1]; им же рассмотрены приложения теории к широкому кругу практических вопросов.

В данной работе задача о прочности тонкостенных стержней приводится к интегральным уравнениям; даются указания для вычисления критических параметров нагрузки при помощи последовательных приближений, а также при помощи приближенного интегрирования.

1. Будем исходить из дифференциального уравнения стесненного кручения

$$\frac{d^4\theta}{dz^4} - \frac{k^2}{l^2}\frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{m}{EI_\omega} \qquad \left(k^2 = l^2\frac{GI_d}{EI_\omega}\right) \tag{1}$$

где $\theta(z)$ — угол закручивания, $m(z)$ — интенсивность внешнего крутящего момента, k^2 — безразмерная характеристика, GI_d — крутильная жесткость, EI_ω — секториальная жесткость, l — длина стержня.

Введя изгибно-крутящий бимомент B, представим уравнение (1) в виде

$$\frac{d^2B}{dz^2} - \frac{k^2}{l^2}B = -m(z) \qquad \left(B = -EI_\omega\frac{d^2\theta}{dz^2}\right) \tag{2}$$

Пусть $G(z, \zeta)$ — функция Грина, соответствующая оператору второго порядка

$$L(u) = \frac{d^2u}{dz^2} \tag{3}$$

и граничным условиям для бимомента. Дифференциальное уравнение (2) совместно с граничными условиями эквивалентно, очевидно, интегральному уравнению

$$B(z) - \lambda\int_0^l G(z, \zeta)\,B(\zeta)\,d\zeta = B_0(z) \tag{4}$$

где

$$\lambda = -\frac{k^2}{l^2}, \qquad B_0(z) = \int_0^l G(z, \zeta)\,m(\zeta)\,d\zeta$$

Относительно ядра $G(z, \zeta)$ известно, что все его фундаментальные числа вещественны и положительны; между тем для нашей задачи всегда $\lambda < 0$. Из этого следует, что неоднородное уравнение (4) имеет единственное и конечное решение. Для его отыскания можно воспользоваться методом последовательных приближений.

Обозначив через $G_n(z, \zeta)$ n-е итерированное ядро, представим решение уравнения (4) в виде

$$B(z) = B_0(z) + \lambda\int_0^l G(z, \zeta)\,B_0(\zeta)\,d\zeta + \cdots + \lambda^n\int_0^l G_n(z, \zeta)\,B_0(\zeta)\,d\zeta + \cdots \tag{5}$$

Процесс итераций сходится, как известно [2], если

$$|\lambda| < \frac{1}{\sup |G(z, \zeta)| \, l}$$

Для рассматриваемого случая это условие дает $k < 1$, что ограничивает применимость метода последовательных приближений случаем достаточно тонкостенных стержней. Заметим кстати, что «нулевое приближение» $B_0(z)$ представляет собой приближенное выражение бимомента, пригодное для стержней с пренебрежимо малой крутильной жесткостью. Для таких стержней (типа оболочек) имеет место полная аналогия между теорией изгиба и стесненного кручения [1].

Практически метод итераций может быть осуществлен путем последовательного построения эпюр изгибающих моментов от некоторой фиктивной нагрузки в балке с соответствующими опорными закреплениям, т. е. в форме варианта известного в сопротивлении материалов графо-аналитического метода. С точки зрения практических вычислений особенно важно, что здесь уже не требуется непосредственного привлечения аппарата интегральных уравнений.

Другой путь решения — это разложение $B(z)$ в ряды по заранее выбранным функциям. В частности, из общей теории интегральных уравнений следует разложение

$$B(z) = B_0(z) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \varphi_n(z)}{\lambda_n - \lambda} \qquad \left(b_n = \int_0^l B_0(z) \varphi_n(z) \, dz \right) \tag{6}$$

где $\varphi_n(z)$ и λ_n — фундаментальные функции и фундаментальные числа ядра $G(z, \zeta)$, а b_n — коэффициенты Фурье для $B_0(z)$.

Ряд (6) сходится абсолютно и равномерно для всех $\lambda \neq \lambda_n$; в данном случае, как уже указывалось, это неравенство всегда выполняется.

После того как закон изменения бимомента найден, определение остальных силовых и деформационных факторов затруднений не представляет; так, для угла закручивания получаем формулу

$$\theta(z) = \frac{1}{EI_\omega} \int_0^l H(z, \zeta) \, B(\zeta) \, d\zeta \tag{7}$$

где $H(z, \zeta)$ — функция Грина, соответствующая оператору (3) и граничным условиям для угла закручивания. Формула (7), которая следует из (2), понадобится нам в дальнейшем.

2. Переходя к исследованию устойчивости, ограничимся случаем поперечной нагрузки, действующей в плоскости наибольшей жесткости стержня (устойчивость плоской формы изгиба). Сечение стержня будем считать имеющим две оси симметрии, нагрузку — приложенной в центре изгиба. При сделанных оговорках задача об устойчивости плоской формы изгиба приводит к уравнениям [1]

$$\begin{gathered} EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + \frac{d^2}{dz^2}(M\theta) = 0 \\ EI_\omega \frac{d^4\theta}{dz^4} - GI_d \frac{d^2\theta}{dz^2} + M \frac{d^2 u}{dz^2} = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

где $u(z)$ — боковой прогиб, EI_y — жесткость при изгибе, $M(z)$ — изгибающий момент от внешней нагрузки, вычисляемый относительно оси наибольшей жесткости. В случае статически определимых опорных закреплений система (8) может быть приведена к уравнению

$$\frac{d^2 B}{dz^2} - \frac{k^2}{l^2} B = - \frac{M^2 \theta}{EI_y} \tag{9}$$

Уравнению (9) соответствует интегральное уравнение (4), где на этот раз

$$B_0(z) = \int_0^l G(z, \zeta) \frac{M^2(\zeta)\,\theta(\zeta)}{EI_y} d\zeta$$

Обозначим через $R(z, \zeta, \lambda)$ резольвенту уравнения (4); тогда, как известно,

$$B(z) = B_0(z) + \lambda \int_0^l R(z, \zeta, \lambda)\, B_0(\zeta)\, d\zeta$$

Применяя далее формулу (7), получим следующее интегральное уравнение относительно угла закручивания:

$$\theta(z) - \beta^2 \int_0^l p(\zeta)\, K(z, \zeta)\, \theta(\zeta)\, d\zeta = 0 \qquad \left(p(\zeta) = \frac{M^2(\zeta)}{EI_y EI_\omega}\right) \tag{10}$$

Ядро этого уравнения вычисляется по формуле

$$K(z, \zeta) = \int_0^l H(z, \eta)\, G(\eta, \zeta)\, d\eta + \lambda \int_0^l \int_0^l H(z, \eta)\, R(\eta, \xi, \lambda)\, G(\xi, \zeta)\, d\eta\, d\xi \tag{11}$$

т. е. выражается в конечном счете через ядра простейших краевых задач.

Принято, что внешняя нагрузка задана с точностью до параметра β.

Ядро (11), вообще говоря, не является симметричным [1]; оно может быть, однако, симметризовано слева при помощи $G(z, \zeta)$, справа при помощи $H(z, \zeta)$ (оба эти ядра являются симметричными и положительными). Учитывая, кроме того, что функция $p(\zeta)$ неотрицательная, приходим к заключению, что результаты общей теории интегральных уравнений с симметричным ядром могут быть распространены и на уравнение устойчивости (10). В частности, все его фундаментальные числа вещественные и положительные.

3. Не останавливаясь здесь на других следствиях из общей теории, перейдем сразу к практическим методам вычисления критических параметров нагрузки — фундаментальных чисел уравнения (10).

Имеют место разложения

$$G(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(z)\,\varphi_n(\zeta)}{\lambda_n}$$

$$H(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(z)\,\psi_n(\zeta)}{\mu_n}$$

$$R(z, \zeta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(z)\,\varphi_n(\zeta)}{\lambda_n - \lambda} \qquad (\lambda \neq \lambda_n)$$

которые сходятся относительно обоих аргументов абсолютно и равномерно. Помимо введенных ранее обозначений, через $\psi_n(z)$ и μ_n здесь обозначены фундаментальные функции и фундаментальные числа ядра $H(z, \zeta)$.

---

[1] Исключение составляет часто встречающийся случай

$$\theta(0) = \theta(l) = B(0) = B(l) = 0$$

(стержень, шарнирно опертый по концам). В этом случае

$$H(z, \zeta) \equiv G(z, \zeta)$$

и, следовательно,

$$K(z, \zeta) \equiv K(\zeta, z)$$

После подстановки рядов в формулу (11) и почленного интегрирования получаем

$$K(z, \zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_m(z)\,\varphi_n(\zeta)}{\nu_{mn}} \tag{12}$$

где

$$\frac{1}{\nu_{mn}} = \frac{1}{\mu_m(\lambda_n - \lambda)} \int_0^l \psi_m(z)\,\varphi_n(z)\,dz$$

При выводе этих формул учтено, что функции $\varphi_n(z)$ составляют ортонормированную систему.

Для вычислений ограничиваемся конечным числом членов ряда (12), рассматривая уравнение (10) как уравнение с вырожденным ядром. Фундаментальные числа определяются из уравнения

$$|\mathbf{E} - \beta^2 \mathbf{A}| = 0$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $\mathbf{A}$ — матрица с элементами

$$A_{mn} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_m(\lambda_q - \lambda)} \int_0^l p(z)\,\varphi_q(z)\,\psi_n(z)\,dz \int_0^l \psi_m(z)\,\varphi_n(z)\,dz$$

Другой способ вычислений заключается в следующем. Разбив промежуток $(0, l)$ на равные части Δl и определив значения ядер $G(z_m, \zeta_n)$ и $H(z_m, \zeta_n)$ в точках деления, заменим интегралы, входящие в (10) и (11), конечными суммами. Для определения критических параметров получаем уравнение

$$|\mathbf{E} - \beta^2 \Delta l\, \mathbf{pH}(\mathbf{E} - \lambda\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}| = 0 \tag{13}$$

где $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ — матрицы, составленные из $G(z_m, \zeta_n)$ и $H(z_m, \zeta_n)$, матрица $\mathbf{p}$ — диагональная с элементами

$$p_{mm} = \frac{M^2(\zeta_m)}{EI_y EI_\omega}$$

Ядра $G(z, \zeta)$ и $H(z, \zeta)$ могут быть истолкованы как функции влияния изгибающих моментов в балках с соответствующими опорными закреплениями. Из этого вытекает, что к уравнению (13) можно притти, применяя обычные методы строительной механики, т. е. минуя аппарат интегральных уравнений. В частности, вычислениям может быть придана форма, принятая А. Ф. Смирновым при исследовании устойчивости центрально сжатых стержней [3].

Поступила 3 VII 1952

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Стройиздат, 1940.
2. Привалов И. И. Интегральные уравнения. ГТТИ, 1937.
3. Смирнов А. Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. Трансжелдориздат, 1947.