Институт механики Академии наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

М. Г. Слободянский

(Москва)

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию метода построения приближенного решения и оценки погрешности в линейных задачах, сводящихся к вариационным, изложенного в работе [1]

Полученные результаты применены далее к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения и рассмотрены некоторые численные примеры.

§ 1. 1°. Построение приближенного решения и оценка погрешности в линейных задачах. Применяя метод построения приближенного решения и оценки погрешности, изложенный в работе [1] и основанный на сведе́нии линейных задач к вариационным, можно получить различные приближенные решения и соответствующие оценки погрешности.

Пусть симметричный положительно-определенный оператор A определен на линеале M в вещественном гильбертовом пространстве H и

$$Au = f, \qquad Av = \psi \tag{1.1}$$

где элементы u, v принадлежат M, а f, ψ — заданные элементы из H.

Как известно [2], существуют элементы u_0, v_0 — принадлежащие M и дающие наименьшие значения соответствующим функционалам

$$F_f(u) = (Au,\ u) - 2(f,\ u), \qquad F_\psi(v) = (Av,\ v) - 2(\psi,\ v) \tag{1.2}$$

Определение искомой функции или линейного оператора от искомой функции можно во многих линейных задачах свести к задаче об определении скалярного произведения $(f,\ v_0) = (\psi,\ u_0)$.

Это может быть сделано либо путем введения в некоторых случаях специальным образом подобранных элементов f или ψ (см. работу [1], § 3 и 4), либо путем введения специальных главных частей функции Грина [1, 3]. Указанные специальные главные части функции Грина зависят не только от данной задачи, т. е. от оператора A, но и от вида линейного оператора от искомой функции.

Поставим поэтому перед собой задачу построения различных приближенных значений $(\psi,\ u_0)$ и оценки погрешности этих приближений.

Как показано в работе [1], если найдены числа a_n, b_n, c_n a_n^*, b_n^*, c_n^* такие, что при любом вещественном значении λ имеем

$$a_n^* + 2b_n^*\lambda + c_n^*\lambda^2 \leqslant F_{f+\lambda\psi}(u_0 + \lambda v_0) \leqslant a_n + 2b_n\lambda + c_n\lambda^2 \tag{1.3}$$

то «наилучшее» приближенное значение для $(\psi,\ u_0)$ и «наилучшую» оценку погрешности мы получим, полагая

$$(\psi,\ u_0) \approx \tfrac{1}{2}(b_n + b_n^*), \qquad \lambda = +\sqrt{\frac{a_n - a_n^*}{c_n - c_n^*}}$$

причем

$$\left|(\psi,\ u_0) - \tfrac{1}{2}(b_n + b_n^*)\right| < \delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a_n - a_n^*)(c_n - c_n^*)} \tag{1.4}$$

Заметим, что из (1.3) следует

$$a_n^* \leqslant F_f(u_0) \leqslant a_n, \qquad c_n^* \leqslant F_\psi(v_0) \leqslant c_n$$

Рассмотрим вопрос об определении значений a_n, b_n, c_n, a_n^*, b_n^*, c_n^*.

2°. Пусть $u_n + \lambda v_n$ — элемент, принадлежащий линеалу M, тогда

$$F_{f+\lambda\psi}(u_0 + \lambda v_0) = a_0 + 2b_0\lambda + c_0\lambda^2 < F_{f+\lambda\psi}(u_n + \lambda v_n) = a_n + 2b_n\lambda + c_n\lambda^2 \tag{1.5}$$

$$a_n = F_f(u_n), \qquad c_n = F_\psi(v_n), \qquad a_0 = F_f(u_0), \qquad c_0 = F_\psi(v_0) \tag{1.6}$$

Далее положим, что задача об определении $F_{f+\lambda\psi}(u_0 + \lambda v_0)$ может быть приведена к другой вариационной задаче об определении наименьшего значения функционала $H(\sigma + \lambda\tau)$, причем

$$F_{f+\lambda\psi}(u_0 + \lambda v_0) + H(\sigma_0 + \lambda\tau_0) = 0 \tag{1.7}$$

где через $\{\sigma_0 + \lambda\tau_0\}$ обозначены функции, реализующие минимум функционала $H(\sigma + \lambda\tau)$.

Если обозначим через $\{\sigma_n + \lambda\tau_n\}$ допустимые функции в вариационной задаче об определении минимума $H(\sigma + \lambda\tau)$, то на основании (1.7) получим

$$F_{f+\lambda\psi}(u_0 + \lambda v_0) = -H(\sigma_0 + \lambda\tau_0) > -H(\sigma_n + \lambda\tau_n) = a_n^* + 2b_n^*\lambda + c_n^*\lambda^2$$

$$a_n^* = -H(\sigma_n), \qquad c_n^* = -H(\tau_n) \tag{1.8}$$

Неравенства (1.5) и (1.8) дают возможность найти приближенное решение и оценку погрешности (1.4). Допустимые элементы $u_n + \lambda v_n$ и $\{\sigma_n + \lambda\tau_n\}$ могут быть найдены каким-либо приближенным методом, например методом Ритца, Галеркина, наименьших квадратов, методом наискорейшего спуска во многих задачах, методом конечных разностей и т. д.

В последнем случае при использовании метода конечных разностей надо воспользоваться значениями, найденными методом конечных разностей для построения элементов $u_n + \lambda v_n$, $\{\sigma_n + \lambda\tau_n\}$, так, чтобы они были допустимыми функциями в соответствующих вариационных задачах. (Во многих задачах можно выразить $\{\sigma_n + \lambda\tau_n\}$ через $u_n + \lambda v_n$.)

3°. Допустимые элементы $u_n + \lambda v_n$, $\{\sigma_n + \lambda\tau_n\}$ могут быть построены и другим путем, например, как решения вариационных задач о минимуме функционалов $F^{(i)}_{f_n+\lambda\psi_n}$, $H^{(i)}$, связанных соотношением (1.7):

$$F^{(i)}_{f_n+\lambda\psi_n}(u + \lambda v) = (A_i(u + \lambda v),\ u + \lambda v) - 2(f_n + \lambda\psi_n,\ u + \lambda v) \tag{1.9}$$

где операторы A_i также симметричные и положительно-определенные и определены на том же линеале M в вещественном гильбертовом пространстве, что и заданный оператор A. Так, например, если элемент $u_{01}+\lambda v_{01}$ реализует минимум функционала $F^{(i)}_{f+\lambda\psi}$, то имеем

$$F_{f+\lambda\psi}(u_0+\lambda v_0) < F_{f+\lambda\psi}(u_{01}+\lambda v_{01}) \tag{1.10}$$

Заметим, что с этой точки зрения допустимые элементы $u_n+\lambda v_n$, найденные одним из перечисленных в конце 2°, § 1 приближенных методов, например методом Галеркина, можно рассматривать как точные решения вариационных задач о минимуме функционала $F_{f_n+\lambda\psi_n}$, где $f_n+\lambda\psi_n = A(u_n+\lambda v_n)$. Условимся в обозначениях.

Элементы, реализующие минимум функционалов $F^{(i)}_{f+\lambda\psi}(u+\lambda v)$ и $H^{(i)}(\sigma+\lambda\tau)$, будем обозначать через $u_{0i}+\lambda_{0i}$, $\{\sigma_{0i}+\lambda\tau_{0i}\}$ соответственно, элементы, реализующие минимум функционалов, когда оператор $A_i = A$, будем обозначать, как и раньше, через $u_0+\lambda v_0$, $\{\sigma_0+\lambda\tau_0\}$ соответственно.

4°. Положим теперь, что имеет место неравенство

$$(A_2u,\ u) \leqslant (Au,\ u) \leqslant (A_1u,\ u) \tag{1.11}$$

при любых u, принадлежащих линеалу M, где A_1 и A_2 являются операторами вида A_i. Тогда, очевидно, имеют место также неравенства

$$(A_2u,\ u) - 2(f,\ u) \leqslant (Au,\ u) - 2(f,\ u) \leqslant (A_1u,\ u) - 2(f,\ u) \tag{1.12}$$

или

$$F^{(2)}_f(u) \leqslant F_f(u) \leqslant F^{(1)}_f(u) \tag{1.13}$$

и аналогично

$$F^{(2)}_{f+\lambda\psi}(u+\lambda v) \leqslant F_{f+\lambda\psi}(u+\lambda v) < F^{(1)}_{f+\lambda\psi}(u+\lambda v) \tag{1.14}$$

Из (1.14) следует, что неравенство (1.10) может быть усилено, а именно имеем

$$F_{f+\lambda\psi}(u_0+\lambda v_0) < F_{f+\lambda\psi}(u_{01}+\lambda v_{01}) \leqslant F^{(1)}_{f+\lambda\psi}(u_{01}+\lambda v_{01}) =$$

$$= -(f+\lambda\psi,\ u_{01}+\lambda v_{01}) \tag{1.15}$$

Принимая далее во внимание неравенство

$$F^{(2)}_{f+\lambda\psi}(u_{02}+\lambda v_{02}) < F^{(2)}_{f+\lambda\psi}(u_0+\lambda v_0) \tag{1.16}$$

где $u_{02}+\lambda v_{02}$ — элемент, реализующий минимум функционала $F^{(2)}_{f+\lambda\psi}$, получим из (11.4)

$$F_{f+\lambda\psi}(u_0+\lambda v_0) > F^{(2)}_{f+\lambda\psi}(u_0+\lambda v_0) > F^{(2)}_{f+\lambda\psi}(u_{02}+\lambda v_{02}) =$$

$$= -(f+\lambda\psi,\ u_{02}+\lambda v_{02}) \tag{1.17}$$

Так как элементы $u_{01}+\lambda v_{01}$, $u_{02}+\lambda v_{02}$ мы считаем известными, то для определения искомых значений a_n, b_n, c_n, a_n^*, b_n^*, c_n^* могут быть использованы неравенства (1.17), и (1.10) либо вместо (1.10) более сильное неравенство (1.15).

Заметим, что использование (1.10) вместо (1.15) дает возможность получить меньшие значения для a_n, c_n, а следовательно, лучшее приближенное решение и меньшую оценку погрешности по формулам (1.4).

Из (1.15) и (1.17) следует

$$\begin{aligned} a_n &= -(f,\ u_{01}), \qquad & c_n &= -(\psi,\ v_{01}), \qquad & b_n &= -(\psi,\ u_{01}) \\ a_n^* &= -(f,\ u_{02}), \qquad & c_n^* &= -(\psi,\ v_{02}), \qquad & b_n^* &= -(\psi,\ u_{02}) \end{aligned} \tag{1.18}$$

В случае использования неравенства (1.10) вместо (1.15) получим для a_n, c_n следующие значения вместо (1.18):

$$a_n = (Au_{01} - 2f,\ u_{01}), \qquad c_n = (Av_{02} - 2\psi,\ v_{02}) \tag{1.19}$$

Подставляя (1.18) в (1.4), найдем приближенное значение для (ψ, u_0) и оценку погрешности этого приближения:

$$\left|(\psi, u_0) - \frac{1}{2}(\psi, u_{01} + u_{02})\right| < \delta = \frac{1}{2}\sqrt{(f,\ u_{01} - u_{02})\,(\psi,\ v_{01} - v_{02})} \tag{1.20}$$

Отсюда вытекает важное следствие. Если элемент ψ подобран так, что

$$(\psi, u_0) = Lu_0, \quad (\psi, u_{01} + u_{02}) = L(u_{01} + u_{02}), \quad (\psi, v_{01} - v_{02}) = L(v_{01} - v_{02})$$

где L — линейный дифференциальный оператор (например, в теории упругости за элемент ψ можно взять сосредоточенные силы и сосредоточенные моменты соответствующего порядка), то из (1.20) имеем

$$\left|Lu_0 - \frac{1}{2}L(u_{01} + u_{02})\right| < \delta = \frac{1}{2}\sqrt{(f,\ u_{01} - u_{02})\,L(v_{01} - v_{02})} \tag{1.21}$$

В частности, если оператор $Lu = u$, то из (1.21) получим

$$\left|u_0 - \frac{1}{2}(u_{01} + u_{02})\right| < \delta = \frac{1}{2}\sqrt{(f,\ u_{01} - u_{02})\,(v_{01} - v_{02})} \tag{1.22}$$

Необходимо отметить, что может оказаться $(\psi, v_{01} - v_{02}) = \infty$; в этом случае, очевидно, пользоваться оценкой (1.21) нельзя и необходимо ввести функции Грина со специальными главными частями [1,3].

В случае, например, защемленной пластины под действием нормальной нагрузки при помощи оценок (1.21) — (1.22) можно найти оценку погрешности для прогиба пластины w и первых производных от $w(x, y)$ по x, y. Для определения, например, вторых производных от w этими оценками уже нельзя пользоваться, ибо $(\psi, v_{01} - v_{02}) = \infty$.

5°. Рассмотрим тот частный случай, когда $A_1 = \lambda_1 A_0$, $A_2 = \lambda_2 A_0$, где $0 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_1 < +\infty$, A_0 — оператор вида A_i. Очевидно, что если $u_{00} + \lambda v_{00}$ есть решение уравнения $A_0(u_{00} + \lambda v_{00}) = f + \lambda\psi$, то элементы

$$u_{01} + \lambda v_{01} = \frac{1}{\lambda_1}(u_{00} + \lambda v_{00}), \qquad u_{02} + \lambda v_{02} = \frac{1}{\lambda_2}(u_{00} + \lambda v_{00}) \tag{1.23}$$

являются решениями уравнений

$$A_1(u_{01} + \lambda v_{01}) = f + \lambda\psi, \qquad A_2(u_{02} + \lambda v_{02}) = f + \lambda\psi$$

и, следовательно, реализуют минимум функционалов $F^{(1)}_{f+\lambda\psi}$ и $F^{(2)}_{f+\lambda\psi}$ соответственно.

Подставляя поэтому (1.23) в формулы (1.20) — (1.22), найдем

$$\left|(\psi, u_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right)(\psi, u_{00})\right| = \left|\left(\psi, u_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right) u_{00}\right)\right| < \delta \qquad (1.24)$$

где

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\sqrt{(f, u_{00})(\psi, v_{00})} \qquad (1.25)$$

Далее

$$\left|Lu_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right) Lu_{00}\right| < \delta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\sqrt{(f, u_{00}) Lv_{00}} \qquad (1.26)$$

и, наконец,

$$\left|u_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right) u_{00}\right| < \delta_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\sqrt{(f, u_{00})\, v_{00}} \qquad (1.27)$$

При этом необходимо отметить, что здесь также имеет место сказанное в конце 4°, § 1, а именно, если $(\psi, v_{00}) = \infty$, то оценками (1.26) нельзя пользоваться и необходимо ввести функции Грина со специальными главными частями, а затем воспользоваться (1.25). В заключение отметим, что при помощи оценок (1.24) — (1.25) можно улучшить одну оценку, полученную в недавно опубликованной работе С. Г. Михлиным[4] другим методом. Полагая в (1.24) — (1.25)

$$\psi = A_0 (u_0 - u_0^*), \qquad u_0^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right) u_{00}$$

получим (1.28)

$$(A_0 (u_0 - u_0^*), u_0 - u_0^*) < \delta = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\sqrt{(A_0 u_0^*, u_0^*)(A_0 (u_0 - u_0^*), u_0 - u_0^*)}$$

Возводя (1.28) в квадрат, найдем

$$(A_0 (u_0 - u_0^*), u_0 - u_0^*) < \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2 (A_0 u_0^*, u_0^*) \qquad (1.29)$$

причем u_0^* удовлетворяют уравнению

$$A_0 u_0^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) f \qquad (1.30)$$

В оценке (1.29) коэффициент в правой части меньше, чем в аналогичной оценке С. Г. Михлина[4], которая отличается от оценки (1.29) также и тем, что u_0^* удовлетворяет уравнению $Au_0^* = f$ вместо уравнения (1.30), как в рассматриваемом случае. Заметим, что если

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) = 1$$

то $A_0 u_0^* = A_0 u_{00} = f$ и коэффициент в правой части (1.29) будет $(1 - \lambda_1^{-1})^2$.

6°. Положим теперь аналогично (1.14), что можно построить функционалы $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$, связанные с функционалами $F^{(1)}_{f+\lambda\psi}$ и $F^{(2)}_{f+\lambda\psi}$ соотношениями (1.7), соответственно так, что

$$H^{(2)}(\sigma + \lambda\tau) \leqslant H(\sigma + \lambda\tau) \leqslant H^{(1)}(\sigma + \lambda\tau)$$

при любых допустимых функциях $\{\sigma + \lambda\tau\}$.

Полагая, что допустимые функции для функционалов $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ являются также допустимыми функциям для функционала H, получим следующие неравенства, аналогичные (1.10), (1.15), (1.17):

$$H(\sigma_0 + \lambda\tau_0) \leqslant H(\sigma_{01} + \lambda\tau_{01}) \tag{1.31}$$

$$H(\sigma_0 + \lambda\tau_0) \leqslant H(\sigma_{01} + \lambda\tau_{01}) \leqslant H^{(1)}(\sigma_{01} + \lambda\tau_{01}) \tag{1.32}$$

$$H(\sigma_0 + \lambda\tau_0) \geqslant H^{(2)}(\sigma_0 + \lambda\tau_0) \geqslant H^{(2)}(\sigma_{02} + \lambda\tau_{02}) \tag{1.33}$$

Неравенства (1.31), (1.32), (1.33) также могут служить для определения значений a_n, b_n, c_n, ..., c_n^*, входящих в (1.4). Необходимо отметить, что неравенство (1.31) дает возможность получить лучшее приближенное решение и, следовательно, меньшую оценку погрешности по формуле (1.4), чем неравенство (1.33). Повторяя далее рассуждения 4° — 5°, § 1, можно получить формулы, аналогичные (1.20) — (1.27).

В частном случае, когда, например, $H^{(1)} = \lambda_1 H^{(0)}$, $H^{(2)} = \lambda_2 H^{(0)}$, где $0 < \lambda_2 \leqslant \lambda_1 < +\infty$ и допустимые функции для функционала $H^{(0)}$ являются также допустимыми для $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$, получим формулы, аналогичные (1.24) — (1.27).

Замечание. Во многих случаях может оказаться более целесообразным совместное использование неравенств для функционалов $F^{(i)}_{f+\lambda\psi}$, $H^{(i)}$, приведенных в 4° — 6°, § 1.

§ 2. Построение функционала *H*. Рассмотрим вопрос о построении функционала $H(\sigma + \lambda\tau)$, связанного с функционалом $F_{f+\lambda\psi}(u_0 + \lambda v_0)$ соотношением

$$-H(\sigma_0 + \lambda\tau_0) = F_{f+\lambda\psi}(u_0 + \lambda v_0) \tag{2.1}$$

где u_0, v_0, σ_0, τ_0 имеют прежние значения.

Так как функции $\{\sigma + \lambda\tau\}$ реализуют минимум функционала $H(\sigma+\lambda\tau)$, то эта система функций реализует максимум функционала $-H(\sigma + \lambda\tau)$, причем этот максимум численно будет равен минимуму функционала $F_{f+\lambda\psi}(u_0 + \lambda v_0)$, как это следует из (2.1).

Для некоторых задач математической физики этот переход от проблемы минимума к проблеме максимума давно известен.

В теории упругости, например, функционалу F_f соответствует принцип минимума потенциальной энергии, а функционалу H соответствует принцип Кастильяно (принцип минимума дополнительной работы).

В некоторых случаях преобразование проблемы минимума в проблему максимума можно найти, пользуясь методом Треффтца.

Метод Треффтца состоит в том, что приближенное решение строится так, чтобы оно точно удовлетворяло дифференциальному уравнению и приближенно граничному условию. Неудобство этого метода состоит в том, что требуется найти точное решение дифференциального уравнения, что представляет часто весьма трудную задачу.

Переход от проблемы минимума к проблеме максимума подробно изучен К. Фридрихсом для первой граничной задачи теории потенциала и для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Изложение преобразования Фридрихса дано в известной монографии Куранта-Гильберта [5], однако в указанной монографии не дано выражения для функционала H в явном виде в случае уравнений высших порядков, а также уравнений в частных производных общего вида.

В настоящем параграфе мы стремимся восполнить указанный пробел, имея в виду в дальнейшем применение результатов § 1 настоящей работы к краевым задачам для обыкновенных линейных уравнений высших порядков и уравнений в частных производных.

1°. Многие линейные задачи приводятся к задаче об определении минимума функционала

$$F_f(u) = \int\limits_{\Omega} F(u)\, d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} fu d\Omega \tag{2.2}$$

где

$$F(u) = F(u, u_1, \ldots, u_m;\ u_{11}, \ldots, u_{1m}, \ldots)$$

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad u_{kj} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial x_j}, \ldots \qquad (k=1, \ldots, m;\quad j=1, \ldots, m, \ldots)$$

причем Ω — область изменения независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Положим далее, что $F(u)$ — положительно-определенная квадратичная форма относительно переменных $u, u_1, \ldots, u_m; u_{11}, \ldots$.

Уравнение Эйлера-Остроградского для функционала (2.2) будет

$$[F]_u = F_u - \frac{\partial}{\partial x_1} F_{u_1} -, \ldots, - \frac{\partial}{\partial x_m} F_{u_m} + \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_1} F_{u_{11}} + \cdots = 2f \tag{2.3}$$

где

$$F_{u_k} = \frac{\partial F}{\partial u_k}, \ldots, F_{u_{jk}} = \frac{\partial F}{\partial u_{jk}}, \ldots \tag{2.4}$$

Введя новые переменные $F_u, F_{u_1}, \ldots$, получим

$$F(u) = \Phi(F_u, F_{u_1}, \ldots) = \frac{1}{2}(uF_u + u_1 F_{u_1} +, \ldots, + u_{kj} F_{u_{kj}} +, \ldots)$$

Пусть u° — функция, сообщающая минимум функционалу (2.2). Обозначим через $F_u{}^\circ, F_{u_1}{}^\circ, \ldots$ значения функции (2.4) при $u = u^\circ$.

Так как Φ — положительно-определенная форма от переменных $F_u, F_{u_1}, \ldots$, то

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(F_u - F_u{}^\circ,\ F_{u_1} - F_{u_1}{}^\circ, \ldots)\, d\Omega \geqslant 0 \tag{2.5}$$

Очевидно, что левая часть (2.5) достигает минимума при $u = u^\circ$, $F_u = F_u{}^\circ$, $F_{u_1} = F_{u_1}{}^\circ$ и этот минимум равен нулю.

Аналогичное (2.5) неравенство использовано К. Фридрихсом для построения функционала H в случае дифференциального уравнения второго порядка (см. [5], гл. IV, § 9, п. 2).

Преобразуем (2.5) к виду

$$\int\limits_{\Omega} \Phi(F_u, F_{u_1}, \ldots)\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \Phi(F_u{}^\circ, F_{u_1}{}^\circ, \ldots)\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} (u^\circ F_u + u_1^\circ F_{u_1} + \ldots)\, d\Omega \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Последний интеграл в (2.6) аналогичен по структуре первой вариации функционала (2.2) и может быть поэтому преобразован методом Эйлера-Остроградского. Имеем

$$\int\limits_{\Omega} (u^\circ F_u + u_1{}^\circ F_{u_1} + \ldots)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} u^\circ [F]_u\, d\Omega + \int\limits_{S} \psi(u^\circ, F_u, \ldots)\, dS \qquad (2.7)$$

где $[F]_u$ — левая часть (2.3), а S — граница области Ω.

Очевидно, что минимум левой части (2.6) не изменится если наложим на функции F_u, $F_{u_1}, \ldots$ дополнительное условие (2.3), которое выполняется при $u = u^\circ$.

Первый интеграл в правой части (2.7) при этом равен

$$\int\limits_{\Omega} u^\circ [F]_u\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} u^\circ 2f\, d\Omega \qquad (2.8)$$

Если далее интеграл по поверхности S в правой части (2.7) равен нулю вследствие граничных условий, наложенных на u°, или вследствие того, что мы на переменные F_u, $F_{u_1}, \ldots$ наложим дополнительное условие, вытекающее из граничных условий, наложенных на функции $F_u{}^\circ$, $F_{u_1}{}^\circ, \ldots$, то из (2.7), (2.8) и (2.6) найдем, принимая во внимание выражение функционала (2.2):

$$\min H = \min \int\limits_{\Omega} \Phi(F_u, F_{u_1}, \ldots)\, d\Omega = - F_f(u^\circ) \qquad (2.9)$$

где на F_u, $F_{u_1}, \ldots$ наложены указанные выше ограничения.

2°. Рассмотрим краевую задачу для самосопряженного дифференциального уравнения (2.10) при краевых условиях (2.11):

$$Au = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k}\right] = f(x) \qquad (2.10)$$

$$u(a) = u'(a) = \cdots u^{(m-1)}(a) = 0$$

$$u(b) = u'(b) = \cdots u^{(m-1)}(b) = 0 \qquad (2.11)$$

Как известно [2], если коэффициенты $p_k(u)$ не отрицательные, а $p_m(x) > 0$ на интервале $a \leqslant x \leqslant b$, то оператор A положительно-определенный и задача об определении решения уравнения (2.10) при краевых условиях (2.11) приводится к задаче об определении минимума функционала:

$$F_f(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \int\limits_a^b \left\{\sum_{k=0}^{m} p_k(x) \left(\frac{d^k(u)}{dx^k}\right)^2\right\} dx - 2\int\limits_a^b f(x)\, u(x)\, dx \qquad (2.12)$$

Составим дифференциальное уравнение Эйлера для функционала (2.12). Имеем

$$[F]_u = F_u - \cdots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F_{u^{(k)}} + \cdots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{u^{(m)}} = 2f \qquad (2.13)$$

где F — подинтегральное выражение в первом интеграле правой части (2.12), т. е.

$$F = \sum_{k=0}^{m} p_k \left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)^2 = \sum_{k=0}^{m} p_k \, [u^{(k)}]^2$$

$$u^{(k)} = \frac{d^k u}{dx^k}, \qquad F_{u^{(k)}} = \frac{\partial F}{\partial u^{(k)}}, \qquad u^\circ = u, \qquad F_{u^\circ} = F_u \tag{2.14}$$

Из (2.14) следует

$$F_{u^{(k)}} = 2p_k u^{(k)} \qquad (k=1, \ldots, m) \tag{2.15}$$

Введем новые переменные $F_u, \ldots, F_{u^{(k)}}$ и разрешим систему относительно $u^{(k)}$. Получим

$$u^{(k)} = p_k{}' F_{u^{(k)}}, \qquad p_k{}' = \frac{1}{2p_k}$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} u^{(k)} F_{u^{(k)}} = \frac{1}{2} \sum p_k{}' F^2_{u^{(k)}} = \Phi \tag{2.16}$$

В рассматриваемом случае интеграл (2.7) преобразуется методом Эйлера-Остроградского к хорошо известному виду [6]:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{m} u_0{}^{(k)} F_{u^{(k)}}\right) dx = \int_a^b u^\circ \, [F]_u \, dx + [u^\circ \psi_0 + u^{\circ\prime} \psi_1 + \cdots + u^{\circ(m-1)} \psi_{m-1}] \tag{2.17}$$

где $[F]_u$ — левая часть (2.13).

В силу краевых условий (2.11) второй член в (2.17) равен нулю. Если наложим на функции $F_u, \ldots, F_{u^{(m)}}$ условие (2.13), то получим из (2.9), принимая во внимание (2.17):

$$\min H = \min \int_\Omega \Phi \, d\Omega = \min \int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{m} p_k{}' F^2_{u^{(k)}}\right) d\Omega = -F_f(u^\circ) \tag{2.18}$$

Примечание. В случае уравнения второго порядка условие (2.13) будет удовлетворено, если положим в (2.18)

$$F_{u^{(1)}} = 2\sigma, \qquad F_u = 2\left(\frac{d\sigma}{dx} + f\right)$$

3°. Рассмотрим теперь задачу о преобразовании проблемы минимума к проблеме максимума для линейного самосопряженного уравнения второго порядка эллиптического типа

$$Au = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + c(P)\, u = f \tag{2.19}$$

при краевых условиях вида

$$u\,|_S = 0 \tag{2.20}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{m} \cos(\nu, x_j) \sum_{k=1}^{m} p_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right]_S = 0 \tag{2.21}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{m} \cos(\nu, x_j) \sum_{k=1}^{m} p_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} + p_0 u\right]_S = 0 \tag{2.22}$$

где p_{jk} — непрерывно дифференцируемые функции независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$ в конечной области $\Omega + S$, ν — внешняя нормаль к S.

Ограничимся рассмотрением первого краевого условия (2.20). Если квадратичная форма $\Sigma p_{jk} x_j x_k$ положительно-определенная, то при краевом условии (2.20) оператор A — положительно-определенный [2] и указанная краевая задача приводится к задаче о минимуме функционала

$$F_f(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \int_\Omega F(u)\, d\Omega - 2\int_\Omega fu\, d\Omega \tag{2.23}$$

где

$$F(u) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_{jk} u_j u_k + cu^2, \qquad u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Составим дифференциальное уравнение Эйлера для функционала (2.23). Получим

$$F_u - \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_k} = 2f \tag{2.24}$$

где

$$F_u = 2cu, \qquad F_{u_j} = \frac{\partial F}{\partial u_j} = 2\sum_{k=1}^m p_{jk} u_k \tag{2.25}$$

Введем новые переменные F_{u_j}, F_u и разрешим уравнения (2.25) относительно u_k. Получим

$$2u_k = \sum_{j=1}^m p_{jk}' F_{u_j} \qquad (k=1, \ldots, m) \tag{2.26}$$

где матрица $\| p_{jk}' \|$ — обратная по отношению к матрице $\| p_{jk} \|$.

Далее так как F — квадратичная форма относительно u и u_k, то

$$F = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^m u_k F_{u_k} + \frac{1}{c} u F_u\right\} = \frac{1}{4}\left\{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_{jk}' F_{u_j} F_{u_k} + \frac{1}{c} F_u^2\right\} = \Phi \tag{2.27}$$

В рассматриваемом случае интеграл (2.7) преобразуется методом Эйлера-Остроградского к следующему хорошо известному виду:

$$\int_\Omega \left\{u^\circ F_u + \sum_{k=1}^m u_k^\circ F_{u_k}\right\} d\Omega = \int_\Omega u^\circ [F]_u\, d\Omega - \int_\Omega u^\circ \sum_{j=1}^m \cos(\nu, x_j)\, F_{u_j}\, dS \tag{2.28}$$

где $[F]_u$ — левая часть (2.24).

В силу краевого условия (2.20) второй интеграл в правой части (2.28) равен нулю.

Если наложим на функции $F_u, \ldots, F_{u_m}$ условие (2.24), то из (2.9) и (2.27) найдем

$$\min H = \min \int_\Omega \Phi\, d\Omega = \min \int_\Omega \frac{1}{4}\left\{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_{jk}' F_{u_j} F_{u_k} + \frac{1}{c} F_u^2\right\} d\Omega = -F_f(u^\circ) \tag{2.29}$$

Аналогичным образом можно построить функционал при других граничных условиях.

4°. Пусть u^* — решение уравнения (2.3). Тогда функции

$$F_u = \frac{\partial F(u^*)}{\partial u^*}, \qquad F_{u_k} = \frac{\partial F(u^*)}{\partial u_k^*}, \qquad F_{u_{kj}}{}^* = \frac{\partial F(u^*)}{\partial u_{kj}{}^*}, \ldots \tag{2.30}$$

удовлетворяют уравнению (2.3) и, следовательно, первый интеграл в правой части (2.7) равен

$$2\int\limits_\Omega u^\circ f\, d\Omega$$

Если в силу граничных условий, наложенных на u°, интеграл по поверхности в правой части (2.7) равен нулю, то из (2.9), принимая во внимание (2.30), найдем

$$\min H = \min \int\limits_\Omega F(u^*)\, d\Omega = -F_f(u^\circ) \tag{2.31}$$

Равенство (2.31) можно рассматривать как обобщение метода Треффтца. Метод Треффтца, как уже было отмечено, для решения первой краевой задачи теории потенциала и состоит в том, что допустимые функции точно удовлетворяют дифференциальному уравнению и приближенно граничному условию.

В случае, например, самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка (2.19) при краевом условии (2.20) имеем, принимая во внимание (2.23):

$$\min H = \min \int\limits_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_{jk} \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} + c u^{*2} \right\} d\Omega = -F_f(u^\circ)$$

В случае, например, краевой задачи для бигармонического уравнения

$$\nabla^4 u(x, y) = f, \qquad u\Big|_S = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = 0 \tag{2.32}$$

функционал (2.2), как известно, имеет вид:

$$F_f(u) = \int\limits_\Omega F(u)\, d\Omega - 2\int f\, d\Omega \tag{2.33}$$

где

$$F(u) = [\nabla^2 u]^2 = [u_{xx} + u_{yy}]^2 \tag{2.34}$$

Легко показать, что интеграл в правой части (2.7) равен нулю в силу условий на контуре (2.32).

Из (2.31), принимая во внимание (2.33), (2.34) и (2.32), найдем

$$\min H = \min \int\limits_\Omega F(u^*)\, d\Omega = \min \int\limits_\Omega [\nabla^2 u^*]^2 d\Omega = -F_f(u^\circ)$$

где u^* удовлетворяет уравнению (2.32), т. е.

$$\nabla^2 [\nabla^2 u^*] = f$$

Обозначая $\nabla^2 u^* = q$, получим теорему, установленную З.Х. Рафальсоном (см.[2], § 34).

§ 3. Приближенное решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения и оценка погрешности. 1°. В этом параграфе мы применим результаты, изложенные в предыдущих параграфах, к приближенному решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (2.10) при краевых условиях (2.11).

Для простоты полагаем в (2.11) $a=0$, $b=1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Решение этой краевой задачи, как известно, может быть представлено при помощи функции Грина в виде [6]

$$u(x)=\int_0^1 G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi \tag{3.1}$$

где $G(x, \xi)=G(\xi, x)$ непрерывна вместе с производными до порядка $2m$ и удовлетворяет однородному уравнению (2.10) при $\xi \neq x$, а в точке $x=\xi$ имеет особенность

$$G^{(2m-1)}(x+0, \xi)-G^{(2m-1)}(x-0, \xi)=\frac{1}{p_m(x)} \tag{3.2}$$

причем $G(x, \xi)$ удовлетворяет также краевым условиям (2.11).

Положим теперь $G(x, \xi)=g_0(x, \xi)+v(x, \xi)$, где $v(x, \xi)$ непрерывна вместе со своими производными до порядка $2m$, $g_0(x, \xi)$ — главная часть функции Грина, обладающая теми же особенностями, что и $G(x, \xi)$, и удовлетворяющая краевым условиям (2.11), причем полагаем, что $g_0(x, \xi)=g_0(\xi, x)$.

В частности, за функцию $g_0(x, \xi)$ можно взять функцию Грина $G(x, \xi)$ для уравнения (2.10) при краевых условиях (2.11), считая, что в (2.10) $p_0=\cdots=p_{m-1}=0$, $p_m \neq 0$, т. е. за функцию $g_0(x, \xi)$ можно взять функцию Грина для оператора

$$-\frac{d^m}{dx^m}\left(p_m(x) \frac{d^m}{dx^m}\right)$$

при краевых условиях (2.11), которую легко построить.

В случае, например, уравнения четвертого порядка ($m=2$) при $p_m=1$ имеем

$$\begin{aligned} g_0(x, \xi) &= \tfrac{1}{6} x^2(\xi-1)(2x\xi+x-3\xi) \qquad (0 \leqslant x \leqslant \xi) \\ g_0(x, \xi) &= \tfrac{1}{6} \xi^2(x-1)(2\xi x+\xi-3x) \qquad (\xi \leqslant x \leqslant 1) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Для уравнения второго порядка ($m=1$) имеем при $p_m=1$

$$g_0(x, \xi)=x(1-\xi) \quad (0 \leqslant \xi \leqslant x), \qquad g_0(x, \xi)=\xi(1-x) \quad (x \leqslant \xi \leqslant 1) \tag{3.4}$$

Очевидно, что можно взять другую функцию в качестве $g_0(x, \xi)$, обладающую теми же свойствами.

Далее из (3.1) имеем

$$u(x)=\int_0^1 f(\xi) g_0(x, \xi)\, d\xi+\int_0^1 f(\xi) v(x, \xi)\, d\xi \tag{3.5}$$

где $v(x, \xi)$ как функция от ξ удовлетворяет краевым условиям (2.11) и уравнению

$$A_\xi v(x, \xi) = -A_\xi g_0(x, \xi) + \psi_0(\xi) = \psi(x, \xi) \tag{3.6}$$

где

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \psi_0(x)\, dx = 1, \qquad \psi_0(x) = 0 \qquad \text{при} \begin{cases} 0 \leqslant \xi < x - \varepsilon \\ x + \varepsilon < \xi \leqslant 1 \end{cases}$$

и A_ξ — линейный дифференциальный оператор (2.10), где независимой переменной является ξ.

Таким образом, для определения $u(x)$ из (3.5) надо найти значение второго интеграла в правой части (3.5).

Имеем по формулам (1.4)—(1.8)

$$\left| \int_0^1 f(\xi)\, v(x, \xi)\, d\xi - \tfrac{1}{2}\left[b_n(x) + b_n^*(x)\right] \right| < \delta \tag{3.7}$$

$$\delta = \tfrac{1}{2} \sqrt{F_f(u_n) + H(\sigma_n)}\ \sqrt{F_\psi[v_n(x)] + H[\tau_n(x)]} \tag{3.8}$$

где u_n, σ_n — допустимые функции в задаче об определении минимума функционалов (2.12) и (2.18) соответственно, v_n, τ_n — допустимые функции в задаче об определении минимума тех же функционалов (2.12) и (2.18), где вместо f взята правая часть (3.6).

2°. Рассмотрим численный пример. Пусть требуется найти решение краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}\frac{du}{dx} + u = 1, \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{3.9}$$

В рассматриваемом случае, принимая во внимание (3.4) и (3.9), найдем из (3.6)

$$-\frac{d}{d\xi} v(x, \xi) + v(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & \text{при } 0 \leqslant \xi \leqslant x \\ \xi(1-x) & \text{при } x \leqslant \xi \leqslant 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

$$v(x, 0) = v(x, 1) = 0 \tag{3.11}$$

Для определения $u(x)$ и $v(x, \xi)$ применим метод Галеркина. Положим

$$\begin{aligned} u(x) &= x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x + \cdots + \alpha_n x^{n-1} + \cdots) \\ v(x, \xi) &= \xi(1-\xi)(\alpha_1' + \alpha_2'\xi + \cdots + \alpha_n \xi^{n-1} + \cdots) \end{aligned} \tag{3.12}$$

и ограничимся одним коэффициентом в каждом разложении (3.12). Правые части (3.12) удовлетворяют краевым условиям (3.9) и (3.11) соответственно.

Уравнения Галеркина будут

$$\tfrac{11}{30}\alpha_1 = -\tfrac{1}{6}, \qquad \tfrac{11}{30}\alpha_1' = \tfrac{1}{12}(x^4 - 2x^3 + x) \tag{3.13}$$

Откуда

$$\alpha_1 = -\tfrac{5}{11}, \qquad \alpha_1' = \tfrac{5}{22}(x^4 - 2x^3 + x) \tag{3.14}$$

Далее имеем на основании (2.18)

$$H(\sigma) = \int_0^1 [(\sigma' + f)^2 + \sigma^2]\, d\xi \qquad \left(\sigma' = \frac{d\sigma}{d\xi}\right) \tag{3.15}$$

$$H(\tau) = \int_0^1 [(\tau' + f)^2 + \tau^2]\, d\xi \qquad \left(\tau' = \frac{d\tau'}{d\xi}\right) \tag{3.16}$$

Полагая в (3.15) и (3.16)

$$\sigma = \beta_1 + \beta_2\xi + \beta_3\xi^2 + \cdots, \qquad \tau = \beta_1' + \beta_2'\xi + \beta_3'\xi^2 + \cdots \tag{3.17}$$

и ограничиваясь двумя членами в каждом разложении (3.19), найдем

$$\begin{aligned} 2\beta_1 + \beta_2 &= 0, & 2\beta_1' + \beta_2' &= 0 \\ \beta_1 + \tfrac{8}{3}\beta_2 &= 4, & \beta_1' + \tfrac{8}{3}\beta_2' &= -2x(1-x) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Откуда

$$\beta_1 = \frac{12}{13}, \qquad \beta_1' = \frac{6}{13}x(1-x), \qquad \beta_2 = -\frac{24}{13}, \qquad \beta_2' = -\frac{12}{13}x(1-x) \tag{3.19}$$

Далее найдем

$$\begin{aligned} F_f(u_n) &= -\frac{5}{66}, & F_f(v_n) &= -\frac{30}{11}\frac{1}{12^2}(x^4 - 2x^3 + x)^2 \\ H(\sigma_n) &= \frac{1}{13}, & H(\tau_n) &= \frac{4}{3.13}x^2(1-x)^2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\frac{1}{2}[b_n(x) + b_n^*(x)] = -\frac{1}{2}\left[\frac{5}{11}\frac{1}{12}(x^4 - 2x^3 + x) + \frac{1}{26}x(1-x)\right] \tag{3.21}$$

Подставляя (3.20) и (3.21) в (3.7) и (3.8), найдем

$$\left|\int_0^1 f(\xi)\, v(x, \xi) - \frac{1}{2}[b_n(x) + b_n^*(x)]\right| < \delta$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{13} - \frac{5}{66}}\sqrt{\frac{4}{39}x^2(1-x)^2 - \frac{30}{11}\left[\frac{1}{12}x(x^3 - 2x^2 + 1)\right]^2} \tag{3.22}$$

При $x = 0.5$ получим, принимая во внимание (3.5):

$$|u(0.5) - 0.114274| < \delta = 0.001153 \tag{3.23}$$

или

$$0.113121 < u(0.5) < 0.115427$$

Погрешность δ составляет, таким образом, около 1% от точного значения.

Точное решение рассматриваемого уравнения будет

$$u(x) = \frac{\operatorname{ch}(0.5 - x)}{\operatorname{ch} 0.5} - 1 \tag{3.24}$$

При $x = 0.5$ из (3.26) получим $u(0.5) = 0.113195$. Таким образом, найденная оценка лишь незначительно отличается от истинной погрешности, а именно $0.114274 - 0.113195 = 0.001079$.

3°. В качестве второго примера на применение оценок, полученных в § 1, найдем приближенное решение и оценку погрешности краевой задачи для уравнения

$$Au = -\frac{d}{dx}\frac{du}{dx} + (1 + x)\,u = f(x) = 1 \tag{3.25}$$

при краевых условиях $u(0) = u(1) = 0$.

Для построения приближенного решения и оценки погрешности воспользуемся формулами (1.22), для чего необходимо ввести операторы A_1 и A_2, которые удовлетворяют неравенствам (1.11) и (1.14).

Функционал F_f в рассматриваемом случае, как это следует из (2.12), имеет вид:

$$F_f(u) = \int_0^1 \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + (1 + x)\,u^2\right] dx - 2\int_0^1 f(x)\,dx \tag{3.26}$$

Нетрудно убедиться, что для выполнения неравенства (1.14) достаточно положить

$$A_1 u = -\frac{d}{dx}\frac{du}{dx} + k_1^2 u = 1, \qquad A_2 u = -\frac{d}{dx}\frac{du}{dx} + k_2^2 u = 1 \tag{3.27}$$

где $k_1^2 = 2$ и $k_2^2 = 1$. Применим теперь формулы (1.22). Имеем

$$\left|u_0 - \frac{1}{2}(u_{01} + u_{02})\right| < \delta = \frac{1}{2}\sqrt{(f, u_{01} - u_{02})(v_{01} - v_{02})} \tag{3.28}$$

где u_0 — решение задачи (3.25), u_{01} и u_{02} — решения уравнений (3.27) при краевых условиях (3.25), v_{01}, v_{02} — функция Грина для операторов A_1 и A_2 при краевых условиях (3.25), причем в данном случае

$$(f, u_{01} - u_{02}) = \int_0^1 [u_{01}(x) - u_{02}(x)]\,dx \tag{3.29}$$

так как $f(x) = 1$. Далее имеем

$$u_{01} = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{2}\,(0.5 - x)}{2\operatorname{ch}{}^1/_2\sqrt{2}}, \qquad u_{02} = 1 - \frac{\operatorname{ch}(0.5 - x)}{\operatorname{ch} 0.5} \tag{3.30}$$

Важно заметить, что функции v_{01}, v_{02} равны в нашем случае значениям функций Грина для операторов A_1 и A_2 соответственно при $x = \xi$.

Функции Грина для операторов A_1 и A_2, согласно (3.27), будут

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\operatorname{sh} k_1(1-\xi)}{k_1 \operatorname{sh} k_1}\operatorname{sh} k_1 x, & G_2 &= \frac{\operatorname{sh} k_2(1-\xi)}{k_2 \operatorname{sh} k_2}\operatorname{sh} k_2 x \qquad (x < \xi) \\ G_1 &= \frac{\operatorname{sh} k_1\xi}{k_1 \operatorname{sh} k_1}\operatorname{sh} k_1(1-x), & G_2 &= \frac{\operatorname{sh} k_2\xi}{k_2 \operatorname{sh} k_2}\operatorname{sh} k_2(1-x) \qquad (x > \xi) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Отсюда

$$v_{01} = \frac{\operatorname{sh} k_1(1-x)}{k_1 \operatorname{sh} k_1}\operatorname{sh} k_1 x, \qquad v_{02} = \frac{\operatorname{sh} k_2(1-x)}{k_2 \operatorname{sh} k_2}\operatorname{sh} k_2 x \tag{3.32}$$

Подставляя (3.30) и (3.29) и полагая $k_1 = \sqrt{2}$, $k_2 = 1$, найдем

$$\int_0^1 (u_{01} - u_{02})\, dx = 2 \operatorname{th} 0.5 - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{th} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 0.006174 \qquad (3.33)$$

Подставляя (3.29), (3.31) и (3.23) в (3.28), найдем

$$\left| u_0(x) - \frac{1}{2}\left[1.5 - \frac{\operatorname{ch}(0.5 - x)}{\operatorname{ch} 0.5} - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{2}\,(0.5 - x)}{2 \operatorname{ch}\sqrt{2}}\right] \right| < \delta \qquad (3.34)$$

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{0.006174}\,\sqrt{\frac{\operatorname{sh}\sqrt{2}\,(1 - x)}{\sqrt{2}\operatorname{sh}\sqrt{2}}\operatorname{sh}\sqrt{2}\,x - \frac{\operatorname{sh}(1 - x)}{\operatorname{sh} 1}\operatorname{sh} x} \qquad (3.35)$$

При $x = 0.5$ получим из (3.37) и (3.38)

$$\left| u_0(0.5) - \frac{1}{2}\left[1.5 - \frac{1}{\operatorname{ch} 0.5} - \frac{1}{2 \operatorname{ch}\sqrt{2}}\right] \right| = | u_0(0.5) - 0.108259 | < \delta$$

$$\delta(0.5) = \frac{1}{2}\sqrt{0.006174}\,\sqrt{0.015856} = 0.004946$$

Погрешность δ при значении $x = 0.5$ составляет, таким образом, около 4.8% от точного значения.

Поступила 22 VIII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Слободянский М. Г. Оценки погрешности приближенного решения в линейных задачах, сводящихся к вариационным, и их применение к определению двусторонних приближений в статических задачах теории упругости. ПММ, т. XVI, вып. 4, 1952.
2. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. ГТТИ, 1950.
3. Слободянский М. Г. Определение производных искомых функций методом конечных разностей. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
4. Михлин С. Г. Некоторые теоремы теории операторов и их применение в теории упругих оболочек. ДАН СССР, т. LXXXIV, № 5, 1952.
5. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т. I. ГТТИ, 1933.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV. Гостехиздат, 1951.