Институт механики Академии наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

О МЕТОДЕ, ПРЕДЛОЖЕННОМ П. Ф. ПАПКОВИЧЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ И ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТОНКОЙ ПЛИТЫ С ДВУМЯ ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРОМКАМИ, И О НЕКОТОРЫХ ЕГО ОБОБЩЕНИЯХ

Г. А. Гринберг

(Ленинград)

1. Изучение вопросов изгиба прямоугольных плит с двумя закрепленными противолежащими кромками, а также плоской задачи теории упругости для прямоугольной области привело П. Ф. Папковича к постановке следующей математической задачи: найти одновременное разложение двух независимых друг от друга вещественных функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$, заданных в интервале от $y = -\frac{1}{2}b$ до $y = +\frac{1}{2}b$, в ряды вида

$$f_1(y) = \sum a_k L_1[F_k(y)], \qquad f_2(y) = \sum a_k L_2[F_k(y)] \tag{1.1}$$

где a_k — некоторые неизвестные комплексные постоянные, одинаковые в обоих разложениях, $L_i[\cdots]$ — два различных линейных оператора с постоянными коэффициентами, вид которых зависит от рассматриваемой конкретной задачи[1], а $F_k(y)$ — введенные Папковичем в рассмотрение функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$F_k^{(IV)}(y) + 2s_k^2 F_k''(y) + s_k^4 F_k(y) = 0 \tag{1.2}$$

и граничным условиям

$$F_k(\pm 0{,}5b) = 0, \qquad F_k'(\pm 0.5b) = 0 \tag{1.3}$$

Эти функции, которые по всей справедливости следует называть функциями Папковича, распадаются на две группы:

1) четные в отношении y функции $F_k(y)$, имеющие вид:

$$F_k(y) = u_k \sin u_k \cos s_k y - (s_k y) \sin s_k y \cos u_k \qquad (u_k = 0.5bs_k) \tag{1.4}$$

где величины u_k удовлетворяют уравнению $\sin 2u_k + 2u_k = 0$;

2) нечетные функции

$$F_k(y) = u_k \cos u_k \sin s_k y - (s_k y) \cos s_k y \sin u_k \tag{1.5}$$

где величины u_k удовлетворяют уравнению $\sin 2u_k - 2u_k = 0$.

Суммирование по k в формулах (1.1) распространяется на все различные функции $F_k(y)$.

---

[1] Так, в случае плиты с двумя закрепленными кромками вид этих операторов зависит от характера граничных условий на двух других кромках ([1] стр. 638).

В качестве простейших примеров разложений типа (1.1) можно привести, например, следующие:

1) $$L_1[F_k(y)] = F_k(y), \qquad L_2(y) = s_k^2 F_k(y) \tag{1.6}$$

т. е. должно быть одновременно при $-\frac{1}{2}b \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}b$

$$f_1(y) = \sum a_k F_k(y), \qquad f_2(y) = \sum a_k s_k^2 F_k(y) \tag{1.7}$$

Такое задание соответствует случаю, когда незакрепленные кромки свободно оперты (в этом случае задача может быть решена также при помощи обычных тригонометрических рядов);

2) $$L_1[F_k(y)] = F_k(y), \qquad L_2[F_k(y)] = s_k F_k(y)$$

так что должно быть

$$f(y) = \sum a_k F_k(y), \qquad f_2(y) = \sum a_k s_k F_k(y) \tag{1.8}$$

Это соответствует случаю бесконечной полуполосы, закрепленной по контуру. Ряд других примеров можно найти в книге Папковича [1].

П. Ф. Папкович неоднократно подчеркивал фундаментальную роль, которую должны, по его мнению, играть функции $F_k(y)$ и совокупные разложения типа (1.1) по ним в решении всей указанной выше группы задач теории упругости. При всем том самый основной вопрос о возможности таких одновременных разложений хотя бы для каких-либо классов функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ до настоящего времени, сколько нам известно, никем не исследовался надлежащим образом, и задача ставится всегда как задача о нахождении коэффициентов a_k этих разложений в предположении, что разложения законны и обладают определенными свойствами в отношении своей сходимости. П. Ф. Папковичем приведены некоторые общие соображения, связанные с решением бигармонического уравнения, свидетельствующие в пользу возможности таких разложений [1] (§ 35), однако соображения эти не могут рассматриваться как в достаточной мере доказательные с математической точки зрения. Поэтому мы займемся в первую очередь восполнением в некоторой степени этого пробела, т. е. исследованием самой возможности подобных совокупных разложений.

При этом первоначально рассмотрим случай разложений (1.7), для которого Папковичем выведена в предположении одновременного их существования и равномерной сходимости во всем интервале $-\frac{1}{2}b \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}b$ ряда для $f_2(y)$ и дважды продифференцированного по y ряда для $f_1(y)$ следующая формула для коэффициентов a_k:

$$a_k = \left\{ \int_{-1/2 b}^{1/2 b} [f_1''(x) F_k''(x) - f_2(x) s_k^2 F_k(x)]\, dx \right\} : \left\{ \int_{-1/2 b}^{1/2 b} \{[F_k''(x)]^2 - s_k^4 [F(x)]^2\} dx \right\} \tag{1.9}$$

Формула эта легко получается при указанных предположениях из найденного Папковичем общего свойства функций $F_k(y)$, выражаемого интегральным соотношением[1]

$$\int_{-1/2 b}^{1/2 b} [s_k^2 s_n^2 F_k(x) F_n(x) - F_k''(x) F_n''(x)]\, dx = 0 \quad \text{при} \quad k \neq n \tag{1.10}$$

дающим возможность определить из дважды продифференцированного по y первого ряда (1.7) и из второго ряда (1.7) коэффициенты a_k путем умножения первого ряда на $F_k''(y)$, второго — на $s_k^2 F_k(y)$, вычитания второго результата из первого и почленного интегрирования получившегося ряда по y по всему интервалу от $-\frac{1}{2} b$ до $\frac{1}{2} b$.

2. Итак, займемся определением сумм бесконечных рядов вида (1.7), когда коэффициенты a_k в них даются формулой (1.9).

Поскольку всякая вещественная в интервале от $-\frac{1}{2} b$ до $\frac{1}{2} b$ функция $\varphi(y)$ может быть разбита на четную часть $-\frac{1}{2}[\varphi(y) + \varphi(-y)]$ и на нечетную $-\frac{1}{2}[\varphi(y) - \varphi(-y)]$, из которых первая должна разлагаться по четным функциям $F_k(y)$, определяемым формулами (1.4), а вторая — по нечетным $F_k(y)$, отвечающим формулам (1.5), достаточно рассматривать разложение в отдельности четных функций $\varphi(y)$ по четным $F_k(y)$ и нечетных $\varphi(y)$ по нечетным $F_k(y)$.

Проведем соответствующие рассуждения для четных функций — для нечетных они вполне аналогичны.

Пусть $f_1(y)$ и $f_2(y)$ — две произвольные функции, заданные в интервале от $y = 0$ до $y = \frac{1}{2} b$, которые предполагаем продолженными четным образом в интервал $-\frac{1}{2} b \leqslant y < 0$. Не уменьшая общности, в дальнейшем можно полагать, что $\frac{1}{2} b = 1$. Заметим, что согласно (1.4) при этом $s_k = u_k$. Интеграл в знаменателе формулы (1.9) вычисляется непосредственно с использованием формулы (1.4). Имеем

$$\int_{-1}^{1} \{[F_k''(x)]^2 - u_k^4 [F_k(x)]^2\}\, dx = 4u_k^4 \cos^4 u_k \tag{2.1}$$

Следовательно, поставленная выше задача приводится к нахождению пределов при $n \to \infty$ сумм

$$A_n = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{b_k F_k(y)}{4u_k^4 \cos^4 u_k}, \qquad B_n = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{b_k F_k(y)}{4u_k^2 \cos^4 u_k} \tag{2.2}$$

где

$$b_k = \int_{-1}^{1} [f_1''(x) F_k''(x) - f_2(x) u_k^2 F_k(x)]\, dx = 2\int_{0}^{1} [f_1''(x) F_k''(x) - f_2(x) u_k^2 F_k(x)]\, dx \tag{2.3}$$

Здесь $F_k(x)$ — это четные функции (1.4) и суммирование в формулах 2.2) распространяется на первые $4n$ корней функции

$$\varphi(z) = \sin 2z + 2z \tag{2.4}$$

[1] См. ниже п. 4, формула (4.7).

которые считаем пронумерованными в порядке возрастания (неубывания) модулей. При этом мы u_k и $-u_k$ считаем в этой сумме различными корнями[1]. Заметим, что это последнее обстоятельство приведет в силу четности относительно u_k всех входящих в формулы (2.2) величин к тому, что $\lim A_n$ и $\lim B_n$ при $n \to \infty$ будут равны удвоенным значениям соответствующих рядов

$$\sum a_k F_k(y), \qquad \sum a_k u_k^2 F_k(y)$$

в которых суммирование распространяется, как указывалось выше, на все различные значения функций $F_k(y)$ (четных).

Займемся в первую очередь разысканием предела суммы A_n, которая при учете формулы (2.3) и при изменении порядка суммирования и интегрирования может быть записана таким образом:

$$A_n = 2\int_0^1 f_1''(x)\, P_n(x, y)\, dx - 2\int_0^1 f_2(x)\, Q_n(x, y)\, dx \tag{2.5}$$

Здесь

$$Q_n(x, y) = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{F_k(x)\, F_k(y)}{u_k^2 \cos^2 u_k \varphi'(u_k)}, \qquad P_n(x, y) = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{F_k''(x)\, F_k(y)}{u_k^4 \cos^2 u_k \varphi'(u_k)} \tag{2.6}$$

где $\varphi'(u_k) = (2\cos 2u_k + 2) = 4\cos^2 u_k$ — производная при $z = u_k$ от функции (2.4), корнями которой являются величины u_k.

Рассмотрим суммы (2.6), причем начнем с первой из них. Находим при помощи (1.4)

$$Q_n(x, y) = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{(\sin u_k \cos u_k x - x \sin u_k x \cos u_k)\,(\sin u_k \cos u_k y - y \sin u_k y \cos u_k)}{\cos^2 u_k\, \varphi'(u_k)} \tag{2.7}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{R_n} \frac{(\sin z \cos xz - x \sin xz \cos z)\,(\sin z \cos yz - y \sin yz \cos z)}{\cos^2 z\, \varphi(z)}\, dz \tag{2.8}$$

взятый в положительном направлении по кругу радиуса R_n, описанному из начала координат в плоскости z; при этом выберем R_n таким образом, чтобы, во-первых, внутрь круга попали как раз все учитываемые в сумме $Q_n(x, y)$ первые $4n$ корней u_k уравнения $\varphi(z) = 0$, для чего должно быть $|u_{4n}| < R_n < |u_{4n+1}|$, и чтобы, во-вторых, R_n отличалось на конечную величину как от каждого из значений $|u_{4n}|$ и $|u_{4n+1}|$, так и от значений $z = z_s = \frac{1}{2}(2s + 1)\pi$, где s — целое число, соответствующих корням уравнения $\cos z = 0$.

---

[1] Уравнение $\sin 2u + 2u = 0$ имеет всегда, наряду с некоторым корнем $u_k \neq 0$, также корни $-u_k$, $\bar{u}_k$, $-\bar{u}_k$, где $\bar{u}_k$ — комплексный сопряженный корень, равные ему по модулю (при $u_k = 0$ функция $F_k(x) \equiv 0$). Таким образом, суммы A_n и B_n охватывают по n таких четверок корней с равными между собой, но возрастающими от одной четверки к следующей модулями.

При указанных условиях интеграл J_n равен сумме вычетов подинтегральной функции в особых ее точках, которые соответствуют корням $z = u_k$ $(k = 1,2, \ldots, 4n)$, функции $\varphi(z)$ (полюсы первого порядка) и корням $z = z_s$ уравнения $\cos z = 0$, попадающим внутрь контура (полюсы второго порядка). Первые из них дают, как нетрудно видеть, в сумме как раз интересующую нас величину $Q_n(x, y)$. Что же касается вычетов в точках $z = z_s$, то, как показывает непосредственное вычисление, они все равны нулю, так что равна нулю и их сумма.

Формула (2.8) принимает поэтому такой вид:

$$J_n = Q_n(x, y) \tag{2.9}$$

Пусть теперь $n \to \infty$, в соответствии с чем и $R_n \to \infty$. Тогда, как нетрудно видеть из формулы (2.8), интеграл J_n, в котором $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y < 1$, стремится к нулю, притом равномерно в отношении x при неизменном y, меньшем единицы (это следует хотя бы из леммы Жордана). В силу (2.9) имеем поэтому при указанных условиях

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(x, y) = 0 \tag{2.10}$$

а из только что доказанной равномерности стремления к нулю величины $Q_n(x, y) = J_n$ при $0 \leqslant y < 1$ следует, что

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 f_2(x)\, Q_n(x, y)\, dx = 0 \tag{2.11}$$

и это для всякой абсолютно интегрируемой в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ функции $f_2(x)$.

Таким образом, непосредственно доказано, что предел второго интеграла в формуле (2.5) равен нулю, какова бы ни была функция $f_2(x)$, если только она абсолютно интегрируема в интервале от нуля до единицы, так что $\lim A_n$ при $n \to \infty$ вообще от этой функции не зависит.

Переходим теперь к рассмотрению второй суммы (2.6). Ее выгодно представить в такой форме:

$$P_n(x, y) = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{[F_k''(x) + u_k^2 F_k(x)]\, F_k(y)}{u_k^4 \cos^2 u_k \varphi'(u_k)} - \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{F_k(x)\, F_k(y)}{u_k^2 \cos^2 u_k \varphi'(u_k)} =$$

$$= -2T_n(x, y) - Q_n(x, y) \tag{2.12}$$

Здесь

$$T_n(x, y) = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{\cos x u_k F_k(y)}{u_k^2 \cos u_k \varphi'(u_k)} \tag{2.13}$$

Последнее слагаемое в выражении (2.12) даст при подстановке $P_n(x, y)$ в интеграл в формуле (2.5) член вида

$$\int_0^1 f_1''(x)\, Q_n(x, y)\, dx \tag{2.14}$$

который в соответствии с (2.11) обратится в пределе в нуль, по крайней мере если $f_1''(x)$ — абсолютно интегрируемая в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция. Остается поэтому исследовать сумму

$$T_n(x, y) = \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{\cos xu_k (\sin u_k \cos yu_k - y \sin yu_k \cos u_k)}{u_k \cos u_k \varphi'(u_k)} \tag{2.15}$$

и предел соответствующего ей интеграла в формуле (2.5).

Для того чтобы провести это исследование, будем опять исходить из некоторого комплексного интеграла, а именно

$$M_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{R_n} \frac{\cos xz (\sin z \cos yz - y \sin yz \cos z)}{z \cos z \varphi(z)} dz \tag{2.16}$$

взятого по тому же контуру, как раньше интеграл J_n.

Выражая M_n через вычеты подинтегральной функции, замечая, что те из них, которые относятся к корням функции $\varphi(z)$, дают в сумме как раз $T_n(x, y)$, и обозначая через $(a_{-1})_{z_s}$ вычеты в точках $z_s = \frac{1}{2}(2s+1)\pi$, находим

$$M_n = T_n(x, y) + \sum_{(s)} (a_{-1})_{z_s} \tag{2.17}$$

где суммирование по s распространяется на все корни z_s, попавшие внутрь круга R_n.

Учитывая, что по лемме Жордана M_n стремится к нулю при $n \to \infty$, притом равномерно в отношении x при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и при фиксированном значении y, лежащем в интервале $0 \leqslant y < 1$, находя значения вычетов $(a_{-1})_{z_s}$ и объединяя вычеты, соответствующие равным по величине, но обратным по знаку корням $\pm z_s$, получим из (2.17)

$$\lim_{n=\infty} T_n(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\cos xz_s \cos yz_s}{z_s^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^2} \cos \frac{(2s+1)(x+y)\pi}{2} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^2} \cos \frac{(2s+1)(x-y)\pi}{2} \right\} \tag{2.18}$$

т. е., если учесть известные значения входящих в (2.18) рядов:

$$\lim_{n=\infty} T_n(x, y) = \frac{1}{4} \{1 - |x+y| + 1 - |x-y|\} \tag{2.19}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n=\infty} T_n(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-y) & \text{при } x < y \\ \frac{1}{2}(1-x) & \text{при } x > y \end{cases} \tag{2.20}$$

Возвращаясь теперь к формуле (2.5) и используя соотношения (2.11), (2.12), (2.15) и (2.20), а также учитывая то, что было сказано об обращении в нуль предела интеграла (2.14) и о равномерности стремления к нулю M_n при $n \to \infty$, получаем в предположении абсолютной интегрируемости функций $f_2(x)$ и $f_1''(x)$

$$\lim_{n=\infty} A_n = -4\int_0^1 f_1''(x) \lim_{n=\infty} T_n(x, y)\, dx = -2\int_0^y f_1''(x)(1-y)\, dx -$$

$$-2\int_y^1 f_1''(x)(1-x)\, dx = 2[f_1(y) - f_1(1) + (1-y) f_1'(0)] \qquad (2.21)$$

Вспоминая, что, согласно сказанному выше, $\lim A_n$ при $n \to \infty$ должен равняться двойному значению суммы ряда

$$V_1(y) = \sum a_k F_k(y) \qquad (2.22)$$

с коэффициентами (2.23)

$$a_k = \left\{2\int_0^1 [f_1''(x) F_k''(x) - f_2(x) F_k(x)]\, dx\right\} : \left\{\int_{-1}^{+1} \{[F_k''(x)]^2 - u_k^4 [F_k(x)]^2\}\, dx\right\}$$

(двойному, так как в (2.22) суммирование распространяется на все различные четные функции $F_k(y)$, тогда как в A_n каждая такая функция входит дважды из-за отдельного учета корней $+u_k$ и $-u_k$), можем сформулировать полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $f_1(y)$ — непрерывная вместе со своей первой производной в интервале $0 \leqslant y \leqslant 1$ функция, обладающая абсолютно интегрируемой в этом интервале второй производной, и пусть $f_2(y)$ — какая-либо другая абсолютно интегрируемая в этом интервале функция. Тогда при $0 \leqslant y < 1$ сумма $V_1(y)$ ряда (2.22) с коэффициентами (2.23) равна

$$V_1(y) = f_1(y) - f_1(1) + (1-y) f_1'(0) \qquad (2.24)$$

Для того чтобы сумма ряда равнялась $f_1(y)$, требуется еще выполнение дополнительных условий $f_1'(0) = 0$ и $f_1(1) = 0$. Первое из этих условий выполняется само собой, если речь идет не о разложении заданной только в интервале (0,1) непрерывной в нем и обладающей непрерывной первой производной функции $f_1(y)$, продолжаемой четным образом в интервале $(-1, 0)$, а о разложении заданной в интервале $(-1, +1)$ непрерывной четной функции с непрерывной производной. Условие же $f_1(1) = 0$ должно быть наложено дополнительно [1].

3. Мы изучили вопрос о значении суммы ряда (2.22) с коэффициентами (2.23). Аналогичное исследование можно провести и в отношении ряда

$$V_2(y) = \sum a_k u_k^2 F_k(y) \qquad (3.1)$$

где коэффициенты a_k опять предполагаем имеющими значения (2.23). Однако при попытке непосредственного применения и в этом случае

[1] Заметим, что выражение в правой части формулы (2.24) и сумма ряда (2.22) совпадают не только при $y < 1$, но и при $y = 1$, поскольку при этом правые стороны формул (2.24) и (2.22) обращаются в нуль (последнее, так как все функции $F_k(y)$ при $y = 1$ обращаются в нуль).

того же метода, как в п. 2, мы сталкиваемся с той трудностью, что подлежащая при этом исследованию сумма B_n содержит лишний множитель u_k^2 в каждом члене по сравнению с соответствующими членами суммы A_n, в силу чего комплексные интегралы типа J_n, долженствующие служить для преобразования этих сумм, содержат лишний множитель z^2 в числителе и перестают стремиться к нулю при $R_n \to \infty$. Это обстоятельство вынуждает сперва заняться преобразованием коэффициентов b_k к иному виду для выяснения условий, обеспечивающих сходимость ряда (3.1). При этом можно поступить следующим образом: бесконечный ряд (3.1) для $V_2(y)$ представляет собой предел при $n \to \infty$ суммы B_n, определяемой (2.2), а эта последняя сумма может быть в свою очередь представлена в виде

$$B_n = 2\left(B_n^{(1)} - B_n^{(2)}\right) \tag{3.2}$$

где

$$B_n^{(1)} = \int_0^1 f_1''(x) \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{u_k^2\left[F_k''(x) + u_k^2 F_k(x)\right] F_k(y)}{4u_k^4 \cos^4 u_k}\, dx =$$

$$= -2\int_0^1 f_1''(x) \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{\cos u_k x F_k(y)}{\cos u_k\, \varphi'(u_k)}\, dx \tag{3.3}$$

$$B_n^{(2)} = \int_0^1 \psi(x) \sum_{k=1}^{k=4n} \frac{F_k(x) F_k(y)}{\cos^2 u_k\, \varphi'(u_k)}\, dx \tag{3.4}$$

причем

$$\psi(x) = f_1''(x) + f_2(x) \tag{3.5}$$

Относительно функции $\psi(x)$ будем предполагать, что она имеет первые две производные, из которых вторую будем считать абсолютно интегрируемой в промежутке (0, 1). Тогда выражение

$$\int_0^1 \psi(x) F_k(x)\, dx = u_k \sin u_k \int_0^1 \psi(x) \cos u_k x\, dx - u_k \cos u_k \int_0^1 x\psi(x) \sin u_k x\, dx$$

можно преобразовать при помощи интегрирования по частям и при учете соотношения $\sin 2u_k + 2u_k = 0$ k виду

$$\int_0^1 \psi(x) F_k(x)\, dx = \tag{3.6}$$

$$= 2\psi(1) - \psi'(0)\frac{\sin u_k}{u_k} - \left[\int_0^1 \psi''(x)\frac{\sin u_k \cos u_k x}{u_k}\, dx - \int_0^1 (x\psi)''\frac{\cos u_k \sin u_k x}{u_k}\, dx\right]$$

а $B_n^{(2)}$ можно в соответствии с этим переписать так:

$$B_n^{(2)} = 2\psi(1)\sum_{k=1}^{k=4n} \frac{F_k(y)}{\cos^2 u_k\, \varphi'(u_k)} - \psi'(0)\, N_n^{(1)}(0, y) - \tag{3.7}$$

$$- \left\{\int_0^1 \psi''(x)\, N_n^{(1)}(x, y)\, dx - \int_0^1 (x\psi)''\, N_n^{(2)}(x, y)\, dx\right\}$$

где

$$N_n^{(1)}(x,\ y)=\sum_{k=1}^{k=4n}\frac{\sin u_k\cos xu_k}{u_k\cos^2 u_k\varphi'(u_k)}F_k(y)$$

$$N_n^{(2)}(x,\ y)=\sum_{k=1}^{k=4n}\frac{\sin xu_k}{u_k\cos u_k\varphi'(u_k)}F_k(y) \tag{3.8}$$

Пользуясь тем же методом, как при нахождении пределов сумм $P_n(x, y)$ и $Q_n(x, y)$ при $n\to\infty$, легко найдем, что если $0\leqslant y<1$, то[1]

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{k=4n}\frac{F_k(y)}{\cos^2 u_k\varphi'(u_k)}=-\frac{1}{2} \tag{3.9}$$

$$\lim_{n=\infty}N_n^{(1)}(x, y)=N_\infty^{(1)}(x, y)=\begin{cases}0 & \text{при } x<y\\ \frac{1}{2}x & \text{при } x>y\end{cases} \tag{3.10}$$

$$\lim_{n=\infty}N_n^{(2)}(x, y)=N_\infty^{(2)}(x, y)=\begin{cases}0 & \text{при } x<y\\ \frac{1}{2} & \text{при } x>y\end{cases} \tag{3.11}$$

причем из (3.10), в частности, следует, что

$$\lim_{n=\infty}N_n^{(1)}(0, y)=0 \tag{3.12}$$

Подставляя эти значения в (3.7), получим, что

$$\lim_{n=\infty}B_n^{(2)}=-\psi(1)=\frac{1}{2}\left\{\int_y^1 x\psi''(x)\,dx-\int_y^1(x\psi)''\,dx\right\}=-\psi(y) \tag{3.13}$$

Далее (3.3) даст в результате интегрирования по частям и при учете (1.4) и (3.8)

$$B_n^{(1)}=-2f_1''(1)\,N_n^{(2)}(1, y)+2\int_0^1 f_1'''(x)\,N_n^{(2)}(x, y)\,dx \tag{3.14}$$

Отсюда, принимая во внимание (3.11), находим

$$\lim_{n=\infty}B_n^{(1)}=-f_1''(1)+\int_y^1 f_1'''(x)\,dx=-f_1''(y) \tag{3.15}$$

---

[1] При применении метода к нахождению предела суммы, входящей в левую часть формулы (3.9), следует эту сумму предварительно переписать так:

$$\sum_{k=1}^{k=4n}\frac{F_k(y)}{4\cos^4 u_k}=\sum_{k=1}^{k=4n}\frac{u_k(\sin u_k\cos u_k y-y\sin u_k y\cos u_k)}{\cos^2 u_k\,\varphi'(u_k)}=$$

$$=-\sum_{k=1}^{k=4n}\frac{\sin u_k(\sin u_k\cos u_k y-y\sin u_k y\cos u_k)}{\cos u_k\,\varphi'(u_k)}$$

причем использовано уравнение $\sin 2u_k+2u_k=0$, из которого следует, что

$$u_k=-\sin u_k\cos u_k$$

Соотношения (3.2), (3.13), (3.15) и (3.5) дают вместе

$$\lim_{n=\infty} B_n = 2\,[\lim_{n=\infty} B_n^{(1)} - \lim_{n=\infty} B_n^{(2)}] = 2f_2(y) \tag{3.16}$$

что и требовалось показать, ибо, как уже не раз указывалось выше, $\lim B_n = 2V_2(y)$ при $n \to \infty$. Таким образом, установлена следующая теорема.

Теорема 2. Если функция $f_2(x)$ непрерывна в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ и имеет в этом интервале непрерывную первую производную и абсолютно интегрируемую вторую производную и если таким же условиям удовлетворяет функция $\varphi(x) = f_1''(x)$, то при $0 \leqslant y < 1$ имеет место соотношение

$$V_2(y) = f_2(y) \tag{3.17}$$

Тем самым показано, что по крайней мере при указанных выше ограничениях оба разложения

$$f_1(y) = \sum a_k F_k(y), \qquad f_2(y) = \sum a_k u_k^2 F(y) \tag{3.18}$$

с коэффициентами (2.23) справедливы для двух независимых друг от друга четных функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ одновременно. В доказательстве этого и состояла как раз наша первая непосредственная цель.

4. Следует отметить, что указанная Папковичем форма (1.9) коэффициентов a_k разложений (1.7) не является единственно возможной и может быть заменена, например, такой:

$$a_k = -\frac{1}{2}\left\{\int\limits_{-{}^1/_2 b}^{{}^1/_2 b} (2f_1(x)\,F_k''(x) + [s_k^2 f_1(x) + f_2(x)]\,F_k(x))\,dx\right\}:$$

$$: \int\limits_{-{}^1/_2 b}^{{}^1/_2 b} ([F_k'(x)]^2 - s_k^2\,[F_k(x)]^2)\,dx \tag{4.1}$$

Чтобы это доказать, заметим прежде всего, что две какие-либо различные функции $F_k(x)$ и $F_m(x)$ удовлетворяют, с одной стороны, указанному Папковичем интегральному соотношению (1.10), положенному в основу вывода формы (1.9) коэффициента a_k, с другой же — соотношению вида

$$\int\limits_{-{}^1/_2 b}^{{}^1/_2 b} [2F_k'(x)\,F_n'(x) - (s_k^2 + s_n^2)\,F_k(x)\,F_n(x)]\,dx = 0 \qquad (k \neq n) \tag{4.2}$$

Исходя из (4.2), нетрудно притти к форме (4.1) для того же коэффициента. Оба соотношения (1.10) и (4.2) являются непосредственными следствиями тех дифференциальных уравнений вида (1.2), которым удовлетворяют функции $F_k(x)$ и $F_n(x)$, и соответствующих граничных условий. В самом деле, умножая первое из двух уравнений

$$F_k^{(\mathrm{IV})} + 2s_k^2 F_k'' + s_k^4 F_k = 0, \qquad F_n^{(\mathrm{IV})} + 2s_n^2 F_n'' + s_n^4 F_n = 0 \tag{4.3}$$

на $s_n^2 F_n$, а второе — на $s_k^2 F_k$, вычитая второй результат из первого и интегрируя получившееся соотношение от $x = -\frac{1}{2}b$ до $x = \frac{1}{2}b$, найдем, что

$$s_n^2 \int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_n F_k^{(IV)} dx - s_k^2 \int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_k F_n^{(IV)} dx + 2 s_k^2 s_n^2 \int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} (F_n F_k'' - F_k F_n'') dx +$$

$$+ s_n^2 s_k^2 (s_k^2 - s_n^2) \int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_k F_n \, dx = 0 \tag{4.4}$$

Замечая что в силу граничных условий (1.3)

$$\int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} (F_n F_k'' - F_k F_n'') dx = (F_n F_k' - F_k F_n') \Big|_{-1/2 b}^{1/2 b} = 0 \tag{4.5}$$

$$\int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_n F_k^{(IV)} dx = -\int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_n' F_k''' dx = \int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_n'' F_k'' dx = \int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_k F_n^{(IV)} dx \tag{4.6}$$

получим из (4.4) при $s_n^2 \neq s_k^2$

$$\int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} [F_k'' F_n'' - s_k^2 s_n^2 F_k F_n] \, dx = 0 \tag{4.7}$$

а это и есть формула (1.10).

С другой стороны, умножая первое из уравнений (4.3) на F_n, а второе — на F_k, вычитая второй результат из первого и интегрируя по x от $-\frac{1}{2}b$ до $\frac{1}{2}b$, находим

$$\int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} (F_n F_k^{(IV)} - F_k F_n^{(IV)}) dx + 2\left[s_k^2 \int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_k'' F_n \, dx - s_n^2 \int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_n'' F_k \, dx\right] +$$

$$+ (s_k^4 - s_n^4) \int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_k F_n \, dx = 0$$

что при учете формулы (4.6) и того, что

$$\int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_k'' F_n \, dx = -\int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_k' F_n' \, dx = \int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} F_n'' F_k \, dx \tag{4.8}$$

переходит в соотношение

$$\int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} [2 F_k' F_n' - (s_k^2 + s_n^2) F_k F_n] \, dx = 0 \qquad (s_n^2 \neq s_k^2)$$

т. е. в (4.2). Заметим, что можно также, учитывая (4.7), записать это соотношение еще в другой форме, а именно

$$\int\limits_{-1/2 b}^{1/2 b} \{(F_k'' + s_k^2 F_k) F_n + (F_n'' + s_n^2 F_n) F_k\} \, dx = 0 \qquad (s_n^2 \neq s_k^2) \tag{4.9}$$

Пользуясь соотношением (4.2), легко найти при некоторых добавочных предположениях формулу (4.1). Вычитая для этого из продифференцированного по y и умноженного на $2F_n'(y)$ ряда (1.7) для $f_1(y)$ умноженный на $s_n^2 F_n(y)$ тот же ряд (1.7) для $f_1(y)$ и умноженный на $F_n(y)$ ряд (1.7) для $f_2(y)$ и объединяя справа члены, содержащие один и тот же коэффициент a_k, найдем, интегрируя от $y = -\frac{1}{2}b$ до $y = \frac{1}{2}b$ правую и левую части полученного соотношения и допуская возможность почленного интегрирования:

$$\int_{-{}^1/_2 b}^{{}^1/_2 b} \{2f_1'(y) F_n'(y) - [s_n^2 f_1(y) + f_2(y)] F_n(y)\}\, dy =$$
$$= 2a_n \int_{-{}^1/_2 b}^{{}^1/_2 b} \{[F_n'(y)]^2 - s_n^2 [F_n(y)]^2\}\, dy \tag{4.10}$$

причем использована формула (4.2). Замечая, что в силу (1.3)

$$\int_{-{}^1/_2 b}^{{}^1/_2 b} f_1'(y)\; F_n'(y)\; dy = - \int_{-{}^1/_2 b}^{{}^1/_2 b} f_1(y) F_n''(y)\, dy \tag{4.11}$$

получим из (4.10) как раз указанную выше формулу (4.1).

Отметим, что задание коэффициентов ряда (1.7) для $f_1(y)$ в форме (4.1) а не (1.9) позволяет освободиться от того, налагавшегося ранее в теореме 1 на функцию $f_1(y)$ ограничения, что для справедливости разложения должны выполняться, наряду с требованием непрерывности функции $f_1(y)$ и наличия у нее непрерывной первой и абсолютно интегрируемой в интервале $(-\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b)$ второй производной, еще условия $f_1(1) = 0$ и $f_1'(0) = 0$. Выполнение этих последних условий в данном случае больше уже не требуется [1].

Здесь все доказательство проведено для четных функций; для нечетных оно может быть дано совершенно аналогичным образом и поэтому не приводится.

5. Полученные результаты и особенно примененный при выводе их метод допускают разнообразные приложения не только к специально исследовавшемуся здесь случаю пары разложений (1.7), но и ко всей

[1] Это легко проверить, например, для четной $f_1(y)$, если провести, подобно тому, как это делалось в п. 2, нахождение предела суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=4n} a_k F_k(y)$$

при $n \to \infty$, причем учесть, что при $\frac{1}{2}b = 1$

$$\int_0^1 (F_k'^2 - u_k^2 F_k^2)\, dx = u_k^2 \cos^4 u_k$$

и преобразовать предварительно выражение (4.1) для a_k интегрированием по частям подобно тому, как это делалось в п. 3 в формуле (3.6).

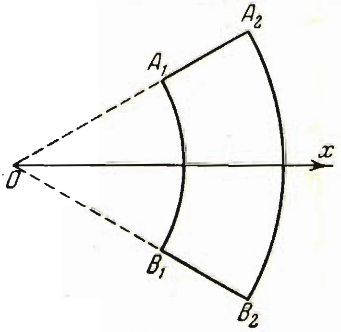
изложенной в п. 1 проблеме в целом. В частности, они дают возможность сведе́ния ряда других проблем того же класса к интегральным уравнениям, могущим служить для решения соответствующих задач. Пусть, например, требуется решить задачу об одновременном разложении функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ в ряды вида (1.8) в интервале $(-\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b)$; зададим соответствующие коэффициенты a_k формулой вида (1.9), а именно:

$$a_k = \left\{ \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} [f_1''(x) F_k''(x) - \psi(x) s_k^2 F_k(x)]\, dx \right\} :$$

$$: \left\{ \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} ([F_k''(x)]^2 - s_k^4 [F_k(x)]^2)\, dx \right\} \tag{5.1}$$

где $\psi(x)$ — произвольная пока, абсолютно интегрируемая в заданном интервале функция; первое условие (1.8) будет непосредственно удовлетворено, подставляя же значения a_k во второе равенство (1.8), придем к интегральному уравнению для функции $\psi(x)$. Сходным образом можно поступать и в случае более общих задач, сводящихся к одновременным разложениях типа (1.1). Заметим также, что можно исходить при указанном способе решения подобных задач не из формулы (1.9), а из (4.1).

6. Все изложенное выше относилось к обоснованию и некоторому развитию данного П. Ф. Папковичем метода решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи об изгибе тонкой прямоугольной плиты. Покажем теперь, каким образом можно, идя сходным путем и обобщая изложенные выше соображения, получить решение соответствующих бигармонических задач для области, имеющей вид кругового сектора или в более общем случае кругового прямоугольника, ограниченного дугами двух концентрических кругов и двумя отрезками радиусов, исходящих из общего центра O этих кругов (фиг. 1).



Фиг. 1

Обозначим внутренний и внешний радиусы такого кругового прямоугольника соответственно через r_1 и r_2, а угол между ограничивающими его радиусами — через 2α.

Введем полярные координаты с центром в точке O и с осью, делящей угол 2α пополам, и рассмотрим вопрос о решении двумерного неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta \Delta u = p(r, \theta) \tag{6.1}$$

для указанной области. Здесь, $p(r,\theta)$ — заданная функция координат. При этом на сторонах A_1A_2 и B_1B_2 будем считать заданными искомую функцию и ее нормальную производную, тогда как о характере граничных условий на дуговых сторонах контура пока никаких допущений делать не будем.

Предположим, что нам удалось найти частное решение u_0 уравнения (6.1), удовлетворяющее граничным условиям[1] на сторонах A_1A_2 и B_1B_2. Полагая $u = u_0 - w$, найдем для w уравнение

$$\triangle \triangle w = 0 \tag{6.2}$$

и граничные условия вида:

$$(w)_{\theta=\pm\alpha} = 0, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)_{\theta=\pm\alpha} = 0 \qquad \text{на } A_1A_2 \text{ и } B_1B_2 \tag{6.3}$$

Нетрудно проверить, что уравнение (6.2) имеет бесчисленное множество частных решений вида

$$w_k = r^{k+1}\psi_k(\theta) \tag{6.4}$$

где функция $\psi_k(\theta)$ зависит только от θ и должна удовлетворять уравнению

$$\psi_k^{(IV)} + [(k+1)^2 + (k-1)^2]\,\psi_k'' + (k^2-1)^2\psi_k = 0 \tag{6.5}$$

Подчиняя функции $\psi_k(\theta)$ граничным условиям

$$\psi_k(\pm\alpha) = 0, \qquad \psi_k'(\pm\alpha) = 0 \tag{6.6}$$

получим две группы частных решений уравнения (6.2), удовлетворяющих условиям (6.3), а именно:

1) Четные относительно θ решения, в которых ψ_k имеют вид:

$$\psi_k(\theta) = \cos(k+1)\alpha\cos(k-1)\theta - \cos(k-1)\alpha\cos(k+1)\theta \tag{6.7}$$

причем k — корни уравнения

$$\frac{\sin 2k\alpha}{2k\alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 0 \tag{6.8}$$

2) нечетные, когда

$$\psi_k(\theta) = \sin(k+1)\alpha\sin(k-1)\theta - \sin(k-1)\alpha\sin(k+1)\theta \tag{6.9}$$

причем k — корни уравнения

$$\frac{\sin 2k\alpha}{2k\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} = 0 \tag{6.10}$$

Такой вид имеет функции $\psi_k(\theta)$, если корни уравнений (6.8) и (6.10) не равны ± 1. Нетрудно убедиться непосредственным вычислением, что при $k = \pm 1$ четные решения рассматриваемого вида существуют лишь при $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, причем $\psi_{-1}(\theta) = \psi_1(\theta) = 1 + \cos 2\theta$, а нечетные — только

[1] Нетрудно, в частности, проверить непосредственно, что если $p(r,\theta) = p_0 = \text{const}$, а при $\theta = \pm\alpha$ как u, так и $\partial u / \partial\theta$ должны обращаться в нуль, то за u_0 может быть взята функция

$$u_0 = \frac{p_0}{8[1 + 2\cos^2 2\alpha]}\, r^4 \sin^2(\alpha+\theta)\sin^2(\alpha-\theta)$$

для значения угла α, удовлетворяющего условию[1] $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\alpha$, причем $\psi_{-1}(\theta) = \psi_1(\theta) = \sin 2\theta - 2\theta \cos 2\alpha$. Случай $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ представляет еще ту особенность, что при этом формулы (6.7) и (6.9) дают только половину возможных частных решений исходной задачи, так как из четных функций $\psi_k(\theta)$ остаются лишь те, которые отвечают нечетным значениям k, а из нечетных — только соответствующие четным k, а остальные обращаются тождественно в нуль[2]. Для полноты системы нужно в этом случае добавить еще решения:

$$\psi_{2s}(\theta) = (2s + 1)\cos(2s - 1)\theta + (2s - 1)\cos(2s + 1)\theta \tag{6.11}$$

а к нечетным функциям

$$\psi_{2s+1}(\theta) = (s + 1)\sin 2s\theta + s\sin 2(s + 1)\theta \tag{6.12}$$

где s — целое число, отличное от нуля.

Заметим еще, что при $k = 0$ обе функции $\psi_0(\theta)$, как четная, так и нечетная, обращаются тождественно в нуль при любом значении угла α, т. е. значению $k = 0$ не отвечают никакие частные решения вида (6.4), удовлетворяющие условиям (6.3).

Даваемые формулами (6.7) — (6.8) и (6.9) — (6.10) функции $\psi_k(\theta)$, удовлетворяющие условиям (6.6) жесткого закрепления на радиальных сторонах $\theta = \pm\alpha$ рассматриваемой секториальной области, являются эквивалентом для данного случая функций (1.4) и (1.5) Папковича, соответствующих их предельному случаю при $\alpha \to 0$, когда ограничивающие секториальную область радиусы стремятся к параллельности, а заключенная между ними область переходит в пределе в бесконечную полосу постоянной ширины[3].

7. Функции $\psi_k(\theta)$ удовлетворяют подобно функциям Папковича некоторым интегральным соотношениям, в частности, следующему:

$$2\int_{-\alpha}^{+\alpha} \psi_k' \psi_m' \, d\theta - [(k^2 - 1) + (m^2 - 1)] \int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_k \psi_m \, d\theta = 0 \qquad \text{при } k^2 \neq m^2 \tag{7.1}$$

вытекающим непосредственно из дифференциальных уравнений вида (6.5), которым удовлетворяют ψ_k и ψ_m, и из граничных условий (6.6).

---

[1] Так как $0 < \alpha < \pi$, то этому условию удовлетворяет один единственный угол 2α, лежащий между π и $^3/_2\pi$ и равный приблизительно 3.4924 (257°27′).

[2] Уравнения (6.8) и (6.10) переходят в этом случае в одно — $\sin k\pi / k\pi = 0$, из которого видно, что k может принимать любые целые значения, отличные от нуля.

[3] Для того чтобы осуществить переход от формул (6.7), (6.8) и (6.9), (6.10) к формулам (1.4) и (1.5) Папковича и соответствующим уравнениям $\sin 2u_k + 2u_k = 0$ и $\sin 2u_k - 2u_k = 0$, следует положить в наших формулах

$$k\alpha = u_k = \frac{1}{2} b s_k, \quad r = R + x, \quad r\theta = y, \quad 2R\alpha = b$$

ввести в правые части формул (6.7) и (6.9) добавочные постоянные множители, равные соответственно $\mp R s_k$, и затем перейти к пределу $\alpha = 0$, считая при этом величины x, y и b неизменными, а R стремящимся к бесконечности так, чтобы соблюдалось условие $2R\alpha = b = \text{const}$.

Действительно, умножая уравнение (6.5) на ψ_m, вычитая из полученного результата аналогичное уравнение для ψ_m, умноженное на ψ_k, и интегрируя найденное соотношение по θ от $-\alpha$ до α, придем к следующей формуле:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (\psi_m \psi_k^{(IV)} - \psi_k \psi_m^{(IV)})\, d\theta + 2(k^2+1)\int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_m \psi_k''\, d\theta - 2(m^2+1)\int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_k \psi_m''\, d\theta +$$

$$+ (k^2 - m^2)\left[(k^2-1) + (m^2-1)\right]\int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_k \psi_m\, d\theta = 0 \qquad (7.2)$$

Замечая, что [1]

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_m \psi_k^{(IV)} d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_m'' \psi_k''\, d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_k \psi_m^{(IV)}\, d\theta \qquad (7.3)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_m \psi_k''\, d\theta = -\int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_m' \psi_k'\, d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_k \psi_m''\, d\theta \qquad (7.4)$$

сразу приходим при $k^2 \neq m^2$ к формуле (7.1).

Отметим кстати, что получающаяся при $m = -k$ функция $\psi_{-k}(\theta)$ только знаком отличается от $\psi_k(\theta)$, т. е. $\psi_{-k}(\theta) = -\psi_k(\theta)$, что непосредственно видно из формул (6.7) и (6.9).

Это же верно для функций (6.11), тогда как функции (6.12) не изменяются при замене $(2s+1)$ на $-(2s+1)$.

Соотношение (7.1) аналогично выведенной нами выше формуле (4.2) для функций Папковича.

Пользуясь формулой (7.1) и соображениями, подобными тем, которые излагались выше в пп. 3—4 применительно к доказательству возможности одновременного разложения двух произвольных функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ в ряды вида (1.7) по функциям Папковича, можно доказать возможность одновременного разложения двух функций $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ определенных классов в ряды сходного типа, а именно

$$f_1(\theta) = \sum a_k \psi_k(\theta) \quad (-\alpha < \theta < \alpha), \quad f_2(\theta) = \sum a_k k^2 \psi_k(\theta) \quad (-\alpha < \theta < \alpha) \qquad (7.5)$$

в которых суммирование распространяется на все существенно различные (т. е. линейно независимые) функции, соответствующие интервалу $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$. Для определения коэффициентов a_k составляем при этом следующую линейную комбинацию из рядов (7.5) и производной от первого из них по θ:

$$2f_1'(\theta)\psi_m'(\theta) - \left[(m^2-1) f_1(\theta) + f_2(\theta) - f_1(\theta)\right]\psi_m(\theta) =$$

$$= \sum a_k \left\{2\psi_k'(\theta)\psi_m'(\theta) - \left[(m^2-1) + (k^2-1)\right]\psi_k(\theta)\psi_m(\theta)\right\} \qquad (7.6)$$

[1] Формулы (7.3) и (7.4) проверяются интегрированием по частям при учете условий (6.6), которые выполняются как для ψ_k, так и для ψ_m.

Предполагая, что все рассматриваемые ряды сходятся равномерно, проинтегрируем это соотношение по θ от $-\alpha$ до α и учтем (7.1). Это дает формулу

$$a_m = \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} (2f_1' \psi_m' - [(m^2-2) f_1 + f_2] \psi_m)\, d\theta \right\} : \left\{2 \int_{-\alpha}^{\alpha} [\psi_m'^2 - (m^2-1) \psi_m^2]\, d\theta\right\} \tag{7.7}$$

Числитель этой формулы можно представить еще в двух разных видах, если учесть, что

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f_1' \psi_m'\, d\theta = - \int_{-\alpha}^{\alpha} f_1 \psi_m''\, d\theta = - \int_{-\alpha}^{\alpha} f_1'' \psi_m\, d\theta \tag{7.8}$$

Совокупные разложения вида (7.5) могут быть использованы для точного или приближенного решения задачи изгиба тонкой плиты[1], имеющей форму кругового сектора или в более общем случае форму, изображенную на фиг. 1, когда радиальные стороны закреплены, а прочие устроены каким-либо образом. Действительно, представим искомое смещение u в виде $u = u_0(r, \theta) - w$, где $u_0(r, \theta)$ — указанное в п. 6 частное решение задачи, а w удовлетворяет уравнению (6.2) и условиям (6.3).

Представим далее w в такой форме:

$$w = \sum (A_k r^k + B_k r^{-k})\, r\psi_k(\theta) \tag{7.9}$$

где A_k и B_k — постоянные, причем граничные условия на радиальных сторонах выполнены. Подчиняя затем полное решение $u = u_0 - w$ оставшимся условиям на других сторонах области, придем к задаче, аналогичной общей задаче Папковича, связанной с формулами (1.1), а именно к задаче об одновременном разложении двух произвольных функций $F_1(\theta)$ и $F_2(\theta)$ в ряды вида

$$F_1(\theta) = \sum a_k L_1 [\psi_k(\theta)], \qquad F_2(\theta) = \sum a_k L_2 ([\psi_k(\theta)] \tag{7.10}$$

где L_1 и L_2 — два линейных дифференциальных оператора с постоянными коэффициентами, вид которых зависит от конкретных условий на дуговых сторонах. В частности, если одна из сторон $r = r_i$ $(i = 1, 2)$ закреплена или оперта, то одно условие получает вид:

$$u_0(r_i, \theta) = \sum a_m \psi_m(\theta) \tag{7.11}$$

где

$$a_m = (A_m r_i^m + B_m r_i^{-m})\, r_i \tag{7.12}$$

и достаточно сюда подставить значение a_m из (7.7), в котором следует положить $f_1(\theta) = u_0(r_i, \theta)$, чтобы удовлетворить этому соотношению. Функция $f_2(\theta)$, входящая в (7.7), остается при этом совершенно произвольной

[1] И для решения плоской задачи теории упругости для областей такой формы.

(в пределах допустимого класса функций, конечно), и произвольность эта может быть использована для того, чтобы удовлетворить второму граничному условию на дуге $r = r_i$. Таким путем придем, как правило, к интегральному уравнению для нахождения $f_2(\theta)$. Сходным образом можно поступать и в других случаях.

8. Отметим, что функции $\psi_k(\theta)$ в частных решениях вида (6.4) можно подчинять не только условиям (6.6) жесткого закрепления на радиальных сторонах, но и любым другим, например, считая эти стороны свободными. Так, например, считая $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ и ограничиваясь четными относительно θ функциями, найдем в случае условий этого последнего типа следующие частные решения w_k уравнения $\triangle\triangle w = 0$:

$$w_k = r^k [\cos (k - 2)\,\theta + \alpha_k \cos k\theta] \tag{8.1}$$

где k — любое целое число

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 - \dfrac{4}{(1-\nu)}\dfrac{1}{k} & \text{при четных } k \\ 1 + \dfrac{2(1+\nu)}{(1-\nu)}\dfrac{1}{k} & \text{при нечетных } k \end{cases} \tag{8.2}$$

а ν — коэффициент Пуассона.

При помощи этих функций можно легко получить, например, хорошее приближенное решение задачи об изгибе полукруглой плиты со свободным диаметром и закрепленным дуговым краем, находящейся под действием постоянной по ее площади нагрузки.

Поступила 12 XI 1952

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, ч. II. Гос. изд-во судостроительной промышленности, Л., 1941.