Институт механики Академии наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

О ФИЛЬТРАЦИИ В ТРАПЕЦОИДАЛЬНЫХ ПЛОТИНАХ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ВЕРХОВЫМ ОТКОСОМ

Г. К. Михайлов

(Москва)

1. Настоящая статья является продолжением гидромеханического исследования задачи о фильтрации в земляной плотине трапецоидального профиля с вертикальным верховым откосом начатого, П. Я. Полубариновой-Кочиной [1,2] и продолженного автором [3].

Для основных геометрических размеров (см. фиг. 1 на стр. 195), характеризующих фильтрационный поток в плотине, были приведены [3] формулы в интегралах от гипергеометрических функций

$$l = A\int_0^1 \frac{x^{\sigma-1}F(\sigma, \sigma, \sigma+{}^1/_2, x)}{\sqrt{x+a}}\,dx \tag{1.1}$$

$$H = A\int_0^b \frac{(1-x)^{\sigma-1}F(\sigma, {}^1/_2, \sigma+{}^1/_2, 1-x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-(1+a)x}}\,dx \qquad \left(b=\frac{1}{1+a}\right) \tag{1.2}$$

$$B = A\int_0^1 a^{\sigma-{}^1/_2}x^{\sigma-1}\,\frac{F(\sigma, \sigma, \sigma+{}^1/_2, -ax)}{\sqrt{1-x}}\,dx \qquad (a\leqslant 1) \tag{1.3}$$

или

$$B = A\int_0^1 x^{\sigma-1}\,\frac{F(\sigma, \sigma, \sigma+{}^1/_2, -x)}{\sqrt{a-x}}\,dx + A\int_{1/a}^1 \frac{F\left(\sigma, \frac{1}{2}, \sigma+\frac{1}{2}, \frac{ax}{1+ax}\right)}{a^{{}^1/_2-\sigma}x^{1-\sigma}(1+ax)^{\sigma}\sqrt{1-x}}\,dx \quad (a\geqslant 1) \tag{1.4}$$

Здесь

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)\,\Gamma(\gamma)}{n!\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma+n)}x^n = 1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$

есть гипергеометрическая функция Гаусса, $\Gamma(x)$ — эйлеров интеграл второго рода, A — произвольная постоянная, которую, интересуясь только отношениями рассматриваемых размеров, примем равной единице, a — параметр, определяющий относительную ширину плотины $\beta = B/H$, $b = 1/(1+a)$ — вспомогательный параметр, введенный для сокращения записи, $\varphi = \pi\sigma$ — угол наклона низового откоса к горизонту.

Преобразуем формулы (1.1)—(1.4) к виду, удобному для вычислений, для чего разложим входящие в них интегралы в ряды.

2. Подставим в (1.1) значение гипергеометрической функции в виде ряда и, учитывая, что

$$\int_0^1 x^p (1-x)^q (1-tx)^{-r}\, dx = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} F(r,\ p+1,\ q+p+2,\ t) \quad (2.1)$$

найдем

$$l = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+\sigma)\,\Gamma(\sigma+{}^1/_2)}{\Gamma^2(\sigma)\,\Gamma(n+\sigma+{}^1/_2)\, n!\,(n+\sigma)} F\left(\tfrac{1}{2},\ n+\sigma,\ n+\sigma+1, \tfrac{-1}{a}\right)$$

В силу известного соотношения[1]

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \gamma-\beta, \gamma,\ \tfrac{x}{x-1}\right) \quad (2.2)$$

окончательно будем иметь

$$l = \sqrt{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+\sigma)\,\Gamma(\sigma+{}^1/_2)}{\Gamma^2(\sigma)\,\Gamma(n+\sigma+{}^1/_2)\, n!\,(n+\sigma)} F\left(\tfrac{1}{2},\ 1,\ n+\sigma+1,\ b\right) \quad (2.3)$$

Полученное разложение удобно при $a > 1$. Для случая $a < 1$ преобразуем входящую в (2.3) гипергеометрическую функцию при помощи формулы

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1-x) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, x) +$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} x^{\gamma-\alpha-\beta} (1-x)^{1-\gamma} F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ x) \quad (2.4)$$

В результате, учитывая, что $F(\alpha, 0, \gamma, x) = 1$ при любых α, γ и x, окончательно найдем

$$l = \sqrt{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+\sigma)\,\Gamma(\sigma+{}^1/_2)}{\Gamma^2(\sigma)\,\Gamma(n+\sigma+{}^1/_2)\, n!} \left[\frac{F({}^1/_2,\ 1,\ {}^3/_2-n-\sigma,\ ab)}{n+\sigma-{}^1/_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(n+\sigma)\,\Gamma({}^1/_2-n-\sigma)}{\sqrt{\pi}} a^{n+\sigma-{}^1/_2} \sqrt{1+a}\right] \quad (2.5)$$

Полученное разложение удобно при $a < 1$.

3. Для преобразования формулы (1.2) воспользуемся известной из теории гипергеометрических функций формулой

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, 1-x) = -\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \{[\ln x - R]\, F(\alpha, \beta, 1, x) + S(x)\} \quad (3.1)$$

где

$$R = 2\psi(0) - \psi(\beta-1) - \psi(\alpha-1), \qquad \psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(1+x)}{dx}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}{n!^2\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} x^n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\beta+k-1} - \frac{2}{k}\right)$$

[1] Здесь и ниже формулы для преобразований гипергеометрических функций взяты из сочинений К. Ф. Гаусса [4].

Пусть, кроме того, вычислены коэффициенты разложения

$$\frac{F(\sigma, {}^1/_2, \sigma + {}^1/_2, 1-x)}{(1-x)^{1-\sigma}} \equiv -\frac{\Gamma(\sigma + {}^1/_2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma)} \frac{(\ln x - R)\,F(\sigma, {}^1/_2, 1, x) + S(x)}{(1-x)^{1-\sigma}} \equiv$$

$$\equiv \frac{\Gamma(\sigma + {}^1/_2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n - \nu_n \ln x)\, x^n \tag{3.2}$$

Заметим, что

$$\psi(0) = -C = -0.5772\ldots, \qquad \mu_0 = R = \frac{1}{\sigma} - C - \psi(\sigma) + \ln 4$$

$$\psi\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -C - \ln 4, \qquad \nu_0 = 1$$

$$\psi(\sigma - 1) = \psi(\sigma) - \frac{1}{\sigma}$$

Теперь H можно представить в форме

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma + {}^1/_2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma)} \int_0^b \frac{\mu_n x^n - \nu_n x^n \ln x}{\sqrt{x}\sqrt{1-(1+a)x}}\, dx \qquad \left(b = \frac{1}{1+a}\right)$$

Принимая во внимание интегральное представление эйлеровых интегралов первого рода и формулу

$$\int_0^1 x^{n-{}^1/_2} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\, dx = -2\frac{\sqrt{\pi}}{n!}\,\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\left[\ln 2 + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}\right] \tag{3.3}$$

найдем для величины напора H выражение

$$H = \sqrt{b}\,\frac{\Gamma(\sigma + {}^1/_2)}{\Gamma(\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + {}^1/_2)}{n!}\, b^n \left\{\mu_n + 2\nu_n\left[\ln 2\sqrt{1+a} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}\right]\right\} \tag{3.4}$$

удобное при $a > 1$. В случае $a < 1$ разобьем участок интегрирования в (1.2) на две части и введем обозначение $H = H_1 + H_2$, где

$$H_1 = \int_0^{{}^1/_2} \frac{F(\sigma, {}^1/_2, \sigma + {}^1/_2, 1-x)\, dx}{(1-x)^{1-\sigma}\sqrt{x}\sqrt{1-(1+a)x}}, \qquad H_2 = \int_{{}^1/_2}^{b} \frac{F(\sigma, {}^1/_2, \sigma + {}^1/_2, 1-x)\, dx}{(1-x)^{1-\sigma}\sqrt{x}\sqrt{1-(1+a)x}} \tag{3.5}$$

Преобразовывая H_1 согласно (3.1), найдем

$$H_1 = \frac{\Gamma(\sigma + {}^1/_2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma)} \int_0^{{}^1/_2} \frac{RF(\sigma, {}^1/_2, 1, x) - S(x) - F(\sigma, {}^1/_2, 1, x)\ln x}{(1-x)^{1-\sigma}\sqrt{x}\sqrt{1-(1+a)x}}\, dx$$

Пусть вычислены коэффициенты разложения

$$\frac{RF(\sigma, {}^1/_2, 1, x) - S(x) - F(\sigma, {}^1/_2, 1, x)\ln x}{(1-x)^{1-\sigma}\sqrt{1-(1+a)x}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\mu_n'}{(1-x)^{1-\sigma}} - \nu_n' \ln x\right] x^n \tag{3.6}$$

Последние вычисления значительно упрощаются при $1 + a \sim 1$. Учитывая, что

$$-\int_0^{{}^1/_2} x^n \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{1 + (n + {}^1/_2)\ln 2}{2^{n+{}^1/_2}\,(n + {}^1/_2)^2} \tag{3.7}$$

окончательно найдем

$$H_1 = \frac{\Gamma(\sigma + {}^1/_2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n' \frac{1 + (n + {}^1/_2)\ln 2}{2^{n+{}^1/_2}(n + {}^1/_2)^2} + \mu_n' \frac{F(1 - \sigma,\, n + {}^1/_2,\, n + {}^3/_2,\, {}^1/_2)}{2^{n+{}^1/_2}(n + {}^1/_2)} \tag{3.8}$$

Интеграл H_2 введением переменной интегрирования $x(1 + a)$ приведем к виду

$$H_2 = \sqrt{b}\left[\int_0^1 \frac{F(\sigma, {}^1/_2, \sigma + {}^1/_2, 1 - bx)}{(1 - bx)^{1-\sigma}\sqrt{x(1 - x)}}\,dx - \int_0^{{}^1/_2(1+a)} \frac{F(\sigma, {}^1/_2, \sigma + {}^1/_2, 1 - bx)}{(1 - bx)^{1-\sigma}\sqrt{x(1 - x)}}\,dx\right]$$

и введем обозначение $H_2 = H_{22} - H_{21}$, где H_{22} и H_{21} — соответственно уменьшаемое и вычитаемое последней формулы.

Подставляя в формулу для H_{22} разложение гипергеометрического ряда, найдем

$$H_{22} = \sqrt{\pi b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \sigma)\,\Gamma(n + {}^1/_2)\,\Gamma(\sigma + {}^1/_2)}{n!\,\Gamma(n + \sigma + {}^1/_2)\,\Gamma(\sigma)} F\left(1 - \sigma - n,\, \frac{1}{2},\, 1,\, b\right)$$

Прилагая к последнему выражению формулы (2.4) и (2.2), окончательно найдем

$$H_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \sigma)\,\Gamma(n + {}^1/_2)\,\Gamma(\sigma + {}^1/_2)}{n!\,\Gamma(n + \sigma + {}^1/_2)\,\Gamma(\sigma)} \left\{\frac{\Gamma(n + \sigma - {}^1/_2)}{\Gamma(n + \sigma)} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \sigma - n, -a\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\Gamma({}^1/_2 - \sigma - n)}{\Gamma(1 - \sigma - n)} (ba)^{n+\sigma-{}^1/_2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n + \sigma + \frac{1}{2}, -a\right)\right\} \tag{3.9}$$

Выражение для H_{21}, возвращаясь к прежней переменной интегрирования, напишем в виде

$$H_{21} = \int_0^{{}^1/_2} (1 - x)^{\sigma-1} \frac{F(\sigma, {}^1/_2, \sigma + {}^1/_2, 1 - x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 - (1 + a)x}}\,dx =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \int_0^{{}^1/_2} (1 - x)^{\sigma-{}^3/_2} x^{m-{}^1/_2} F\left(\sigma, \frac{1}{2}, \sigma + \frac{1}{2}, 1 - x\right) dx$$

где λ_m — коэффициенты разложения

$$\sqrt{\frac{1 - x}{1 - x - ax}} \equiv 1 + \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}\left(1 + \frac{3a}{4}\right)x^2 + \ldots \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m x^m$$

или окончательно

$$H_{21} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_m \frac{\Gamma(n + \sigma)\,\Gamma(n + {}^1/_2)\,\Gamma(\sigma + {}^1/_2)}{n!\,\Gamma(n + \sigma + {}^1/_2)\,\Gamma(\sigma)} \frac{F({}^3/_2 - n - \sigma,\, m + {}^1/_2,\, m + {}^3/_2,\, {}^1/_2)}{(m + {}^1/_2)\,2^{m+{}^1/_2}\sqrt{\pi}} \tag{3.10}$$

При этом следует помнить, что в случае $1 + a \sim 1$ двойной ряд в (3.10) обращается в простой.

В результате, используя разложения (3.8) — (3.10), можно вычислять величину H из соотношения $H = H_1 + H_{22} - H_{21}$. Все вычисления сильно упрощаются при $a \ll 1$.

4. Выражение для B в случае $a < 1$ получается из формулы (1.3) при подстановке в нее гипергеометрического ряда.

Интегрирование приводит к ряду эйлеровых интегралов первого рода, который легко привести к виду

$$B = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{n+\sigma-1/2} \frac{\Gamma^3(n+\sigma)\Gamma(\sigma+1/2)}{n!\,\Gamma^2(n+\sigma+1/2)\,\Gamma^2(\sigma)} \tag{4.1}$$

Для вычисления величины B в случае $a > 1$ введем обозначение $B = B_1 + B_2$, где B_1 и B_2 — соответственно первый и второй интегралы формулы (1.4). Интеграл B_1 разлагается в ряд точно так же, как и интеграл l, в результате чего найдем

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{a-1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma^2(n+\sigma)\Gamma(\sigma+1/2)}{n!\,(n+\sigma)\,\Gamma(n+\sigma+1/2)\,\Gamma^2(\sigma)} F\left(\tfrac{1}{2},\, 1,\, n+\sigma+1,\, -\tfrac{1}{a-1}\right) \tag{4.2}$$

Величина B_2 введением под интегралом нового переменного интегрирования $1/(1+ax)$ приводится к виду

$$B_2 = \int_b^{1/2} (1-x)^{\sigma-1} \frac{F(\sigma,\, 1/2,\, \sigma+1/2,\, 1-x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{(1+a)x-1}}\,dx$$

Используя приведенные выше обозначения (3.1) и (3.2), представим этот интеграл в виде

$$B_2 = \frac{\Gamma(\sigma+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_b^{1/2} \frac{(\mu_n - \nu_n \ln x)}{\sqrt{(a+1)x-1}}\, x^{n-1/2}\,dx$$

Вводя обозначения

$$I^n = -\int_b^{1/2} x^{n-1/2} \frac{\ln x}{\sqrt{(a+1)x-1}}\,dx, \qquad J^n = \int_b^{1/2} x^{n-1/2} \frac{dx}{\sqrt{(a+1)x-1}} \tag{4.3}$$

получим

$$B_2 = \frac{\Gamma(\sigma+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n J^n + \nu_n I^n \tag{4.4}$$

Окончательно будем иметь

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{a-1}} \frac{\Gamma^2(n+\sigma)\Gamma(\sigma+1/2)}{n!\,(n+\sigma)\,\Gamma(n+\sigma+1/2)\,\Gamma^2(\sigma)} F\left(\tfrac{1}{2},\, 1,\, n+\sigma+1,\, -\tfrac{1}{a-1}\right) + $$
$$+ \frac{\Gamma(\sigma+1/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma)} \left(\mu_n J^n + \nu_n I^n\right) \tag{4.5}$$

Заметим, что для J^n и I^n справедливы рекуррентные соотношения

$$J^n = \frac{\sqrt{a-1}}{n(a+1)2^n} + \frac{2n-1}{2n(a+1)} J^{n-1} \tag{4.6}$$

$$I^n = \frac{\sqrt{a-1}\,\ln 2}{n(a+1)2^n} + \frac{2n-1}{2n(a+1)} I^{n-1} + \frac{1}{n} J^n - \frac{1}{n(a+1)} J^{n-1} \tag{4.7}$$

и, кроме того,

$$J^\circ = \frac{\ln(a+\sqrt{a^2-1})}{\sqrt{a+1}} \tag{4.8}$$

$$I^\circ = J^\circ \ln 2 + \frac{1}{\sqrt{a+1}} \int\limits_1^{a+\sqrt{a^2-1}} \frac{x-1}{x+1}\frac{\ln x}{x}\,dx \tag{4.9}$$

или

$$I^\circ = \frac{1}{\sqrt{a+1}}\Big\{[\ln 2 + 2\ln(a+\sqrt{a^2-1}+1) - \tfrac{3}{2}\ln(a+\sqrt{a^2-1})] \times$$

$$\times \ln(a+\sqrt{a^2-1}) - \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(a+\sqrt{a^2-1})^n}\Big\} \tag{4.10}$$

5. Для фильтрационного расхода Q рассматриваемой плотины можно написать выражение [3]

$$Q = kl\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} - k\frac{(^1/_2-\sigma)\,\Gamma^2(1-\sigma)}{\Gamma^2(^3/_2-\sigma)\operatorname{ctg}^2\varphi}\int\limits_0^1 \frac{F(^1/_2,\, ^1/_2,\, ^3/_2-\sigma,\, x)}{\sqrt{x(x+a)}}\,dx \tag{5.1}$$

где k — коэффициент фильтрации.

При $a > 1$ интеграл в формуле (5.1) разлагается в ряд так, как это было сделано выше при разложении выражений для l и B_1. В результате разложения найдем

$$\frac{Q}{k} = l\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} -$$

$$-\frac{(^1/_2-\sigma)\sqrt{b}\,\Gamma^2(1-\sigma)}{\pi\Gamma(^3/_2-\sigma)\operatorname{ctg}^2\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(n+{}^1/_2)}{n!\,(n+{}^1/_2)\,\Gamma(n+{}^3/_2-\sigma)}\,F\left(\tfrac{1}{2},\, 1,\, n+\tfrac{3}{2},\, b\right) \tag{5.2}$$

Для получения разложения, пригодного при $a < 1$, преобразуем гипергеометрическую функцию, стоящую под знаком суммы в (5.2), к аргументу $a:(1+a)$. Воспользуемся для этого формулой

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+n,1-x) = \frac{(n-1)!\,\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}X - \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}(-x)^nY \tag{5.3}$$

где

$$X = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!\,\Gamma(\alpha+k)\,\Gamma(\beta+k)}{(n-1)!\,k!\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}(-x)^k$$

$$Y = [\ln x + \psi(\alpha+n-1) + \psi(\beta+n-1) - \psi(n) - \psi(0)]\times$$

$$\times F(\alpha+n,\beta+n,n+1,x) + \sum_{k=1}^{\infty}u_kx^k$$

$$u_k = \frac{n!\,\Gamma(\alpha+n+k)\,\Gamma(\beta+n+k)}{k!\,(n+k)!\,\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}\sum_{m=1}^{k}\left(\frac{1}{n+m+\alpha-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n+m+\beta-1}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{m}\right)$$

Учитывая, что при произвольном β

$$F(\alpha,\beta,\beta,x) = (1-x)^{-\alpha} \tag{5.4}$$

будем окончательно иметь

$$F\left(\frac{1}{2}, 1, n+\frac{3}{2}, b\right) = \frac{2n+1}{2n} X_n - \frac{\Gamma(n+{}^3/_2)}{n!\sqrt{\pi}} (-ab)^n Y_n \tag{5.5}$$

где

$$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!\,\Gamma(k+{}^1/_2)}{(n-1)!\sqrt{\pi}} (-ab)^k.$$

$$Y_n = \{\ln(ab) + \psi(n-\tfrac{1}{2}) + C\}(1+a)^{n+{}^1/_2} +$$

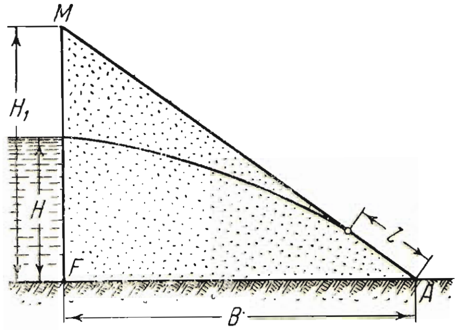
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+{}^1/_2)}{k!\,\Gamma(n-{}^1/_2)} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m(n+m-{}^1/_2)}$$

Формулы (5.2) и (5.5) вместе с (2.3) дают разложение для величины фильтрационного расхода, пригодное при $a < 1$.

Для некоторого улучшения сходимости можно предварительно разбить участок интегрирования у интеграла, входящего в формулу (5.1), на две части, как то было сделано при составлении разложения для величины напора H.

6. При помощи приведенных в разделах 2—5 формул были проведены некоторые вычисления [3, 5].

Однако, помимо этих вычислительных результатов, из полученных зависимостей оказалось возможным непосредственно вывести конечные формулы, характеризующие величину фильтрационного расхода в плотинах рассматриваемого профиля.



Фиг. 1

Исследуем случай весьма пологого низового откоса, когда $\varphi \to 0$.

При этом, очевидно, отношение H/B стремится к нулю и исходная расчетная схема теряет свой непосредственный смысл. Для того чтобы избежать обращения отдельных параметров задачи в 0 или в ∞, перейдем к новым безразмерным параметрам

$$H^* = \frac{H}{H_1} = \frac{H\operatorname{ctg}\varphi}{B}, \qquad Q^* = \frac{Q}{Q_1} = \frac{2QB}{kH_1^2} = \frac{Q\operatorname{ctg}^2\varphi}{kB} \tag{6.1}$$

Величина Q^* есть отношение фильтрационного расхода плотины при напоре H к фильтрационному расходу треугольного клина AMF (фиг. 1) при поднятии уровня воды в верхнем бьефе до гребня M.

Соответственно устремим во всех приведенных выше формулах угол φ к нулю и вместе с тем устремим к бесконечности параметр a, причем таким образом, чтобы величина $t = \varphi \ln a$ оставалась все время конечной. Последнее необходимо, как убедимся ниже, для получения конечных значений H^* и Q^*.

Рассмотрим теперь при поставленных условиях предел выражения $\sigma l \sqrt{a}$, для чего выделим в формуле (2.3) первый член ряда

$$\sigma l \sqrt{a} = \sqrt{ab} \Big\{ F\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1+\sigma, b\right) +$$

$$+ \sigma^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+\sigma)\,\Gamma(\sigma+{}^1/_2)}{n!\,(n+\sigma)\,\Gamma^2(\sigma+1)\,\Gamma(n+\sigma+{}^1/_2)} F\left(\tfrac{1}{2}, 1, n+1+\sigma, b\right)\Big\} \qquad (6.2)$$

Так как ряд, входящий в последнюю формулу, сходится (в чем нетрудно убедиться, заметив, что значения $F\left(\frac{1}{2}, 1, n+1+\sigma, b\right)$ ограничены, и применив хотя бы признак сходимости Раабе), то, очевидно,

$$\lim \sigma l \sqrt{a} = \lim \sqrt{ab}\, F\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1+\sigma, b\right) = 1 \qquad (6.3)$$

Рассмотрим теперь предел величины $H\sqrt{a}$, для чего представим формулу (3.4) с выделенным первым членом:

$$H\sqrt{a} = \frac{\sqrt{\pi ab}\,\Gamma(\sigma+{}^1/_2)}{\Gamma(\sigma+1)} \left\{1 + \sigma \ln a + \sigma\left[\ln\frac{16}{ab} - C - \psi(\sigma)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\Gamma(\sigma+{}^1/_2)}{\Gamma(\sigma+1)} \sqrt{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n\,\Gamma(n+{}^1/_2)}{n!} \left\{\sigma\mu_n + 2\sigma\nu_n\left[\ln 2\sqrt{1+a} + \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}\right]\right\} \qquad (6.4)$$

Так как величины $\sigma\mu_n$ и ν_n конечны, то в силу стремления σ к 0, ab к 1 и a к ∞ будем иметь

$$\lim H\sqrt{a} = \pi(1+t) \qquad (6.5)$$

Перейдем к исследованию предела величины $2\sigma B\sqrt{a}$. Рассмотрим отдельно поведение $2\sigma B_1\sqrt{a}$ и $2\sigma B_2\sqrt{a}$:

$$2\sigma B_1\sqrt{a} = 2\sqrt{\frac{a}{a-1}} \Big\{ F\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1+\sigma, \tfrac{-1}{a-1}\right) +$$

$$+ \sigma^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,\Gamma^2(n+\sigma)\,\Gamma(\sigma+{}^1/_2)}{n!\,(n+\sigma)\,\Gamma^2(\sigma+1)\,\Gamma(n+\sigma+{}^1/_2)} F\left(\tfrac{1}{2}, 1, n+\sigma+1, \tfrac{-1}{a-1}\right)\Big\} \qquad (6.6)$$

В силу соображений, высказанных при отыскании предела выражения $\sigma l\sqrt{a}$, найдем

$$\lim 2\sigma B_1\sqrt{a} = 2 \qquad (6.7)$$

Представим теперь формулу (4.4) в виде

$$2\sigma B_2\sqrt{a} = \frac{2\sqrt{a}\,\Gamma(\sigma+{}^1/_2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma+1)} \Big\{\sigma\left[1 - \sigma\left(C + \psi(\sigma) - \ln 4\right)\right] J^\circ +$$

$$+ \sigma^2 I^\circ + \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n J^n + \nu_n I^n\Big\} \qquad (6.8)$$

Учтем, что при $n \geqslant 1$ будем иметь $J^n = O(a^{-1/2})$, $I^n = O(a^{-3/2})$. Это следует из рассмотрения формул (4.6) — (4.10). Учитывая также, что $\mu_n = O(\sigma^{-1})$, заметим, что член формулы (6.8), содержащий сумму, в пределе стремится к нулю.

В силу очевидных соотношений

$$\lim \sigma \sqrt{a}\, J^\circ = t, \qquad \lim \sigma^2 \sqrt{a}\, I^\circ = \frac{1}{2} t^2 \tag{6.9}$$

которые следуют из (4.8) и (4.10), окончательно будем иметь

$$\lim 2\sigma B_2 \sqrt{a} = 2t + t^2 \tag{6.10}$$

$$\lim 2\sigma B \sqrt{a} = 2 + 2t + t^2 \tag{6.11}$$

На основании (6.1), (6.5) и (6.11) найдем

$$\lim H^* = \lim \frac{H}{\pi\sigma B} = \frac{2}{\pi} \lim \frac{H\sqrt{a}}{2\sigma B \sqrt{a}} = \frac{2(1+t)}{2 + 2t + t^2} \tag{6.12}$$

Рассмотрим, наконец, поведение фильтрационного расхода Q. Учитывая, что входящий в (5.1) интеграл убывает с ростом a как $a^{-1/2}$, найдем, что

$$\lim \frac{Q\sqrt{a}}{\sigma k} = \lim \pi^2 \sigma l \sqrt{a} = \pi^2 \tag{6.13}$$

На основании (6.1), (6.11) и (6.13) будем иметь

$$\lim Q^* = \lim \frac{Q}{\pi^2 \sigma^2 kB} = \frac{2}{\pi^2} \lim \frac{Q\sqrt{a}}{\sigma k} \, \frac{1}{2B\sigma\sqrt{a}} = \frac{2}{2 + 2t + t^2} \tag{6.14}$$

Исключая из (6.12) и (6.14) параметр t и опуская знаки пределов при H^* и Q^*, найдем окончательно зависимость

$$Q^* = 1 - \sqrt{1 - H^{*2}} \tag{6.15}$$

7. Исследуем теперь случай весьма крутого низового откоса, когда $\varphi \to \frac{1}{2}\pi$. Для того чтобы сохранить смысл задачи, будем рассматривать, как и выше, безразмерные параметры H^* и Q^* (6.1). При стремлении угла $\pi\varepsilon = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ к нулю устремим вместе с ним к нулю и параметр a. В целях получения конечных значений H^* и Q^* предположим, что величина $s = -\varepsilon \ln a$ сохраняет конечное значение.

Рассмотрим при сделанных предположениях предел величины εl, для чего используем формулу (2.5), выделив в ней первый член:

$$\begin{aligned}
\varepsilon l = \sqrt{b}\Big[\frac{1}{\sqrt{\pi b}}\, a^{-\varepsilon}\Gamma\left(\tfrac{1}{2} - \varepsilon\right)\Gamma(1+\varepsilon) - F\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1+\varepsilon, ab\right)\Big] + \\
+ \varepsilon\sqrt{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\,\Gamma^2(n + {}^1/_2 - \varepsilon)}{n!\,\Gamma^2({}^1/_2 - \varepsilon)\,\Gamma(n+1-\varepsilon)} \Big[\frac{1}{n-\varepsilon} F\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1-n+\varepsilon, ab\right) + \\
+ \frac{1}{\sqrt{\pi b}}\, a^{n-\varepsilon}\,\Gamma\left(n + \tfrac{1}{2} - \varepsilon\right)\Gamma(\varepsilon - n)\Big]
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Нетрудно видеть, что член в (7.1), содержащий сумму, стремится к нулю при одновременном убывании ε и a. Окончательно будем иметь

$$\lim \varepsilon l = e^s - 1 \tag{7.2}$$

Заметим далее, рассматривая непосредственно интегральные представления величин H_1 и H_{21}, что эти величины при переходе к пределу сохраняют конечное значение.

Преобразуем теперь выражение (3.9) для H_{22}, выделяя первый член суммы, к следующему виду:

$$\varepsilon H_{22} = \sqrt{\pi}\left[\frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(^1/_2+\varepsilon)}(ab)^{-\varepsilon} F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; 1-\varepsilon, -a\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(^1/_2-\varepsilon)} F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1+\varepsilon, -a\right)\right] +$$

$$+ \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)\,\Gamma(n+^1/_2)\,\Gamma(n+^1/_2-\varepsilon)}{n!\,\Gamma(^1/_2-\varepsilon)\,\Gamma(n+1-\varepsilon)}\left[\frac{\Gamma(n-\varepsilon)}{\Gamma(n+^1/_2-\varepsilon)} F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1+\varepsilon-n, -a\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(\varepsilon-n)}{\Gamma(^1/_2+\varepsilon-n)}(ab)^{n-\varepsilon} F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, n+1-\varepsilon, -a\right)\right] \tag{7.3}$$

Легко заметить, что и здесь член, содержащий сумму, стремится к нулю при убывании ε и a. Поэтому получим окончательно

$$\lim \varepsilon H = e^s - 1 \tag{7.4}$$

Для величины B получим

$$B = \frac{\Gamma(^1/_2-\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}\sqrt{\pi}\,a^{-\varepsilon} - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\varepsilon)\,\Gamma^3(^3/_2-\varepsilon)}{\Gamma^2(2-\varepsilon)\,\Gamma^2(^1/_2-\varepsilon)}\,a^{1-\varepsilon} + \ldots \tag{7.5}$$

и окончательно

$$\lim B = \pi e^s \tag{7.6}$$

Рассмотрим теперь величину $\pi\varepsilon^2 Q$. Предварительно заметим, что

$$\lim \pi\varepsilon^2 l\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = e^s - 1 \tag{7.7}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{k}\lim \pi\varepsilon^2 Q = e^s - 1 -$$

$$- \lim\frac{\varepsilon}{\pi}\left[-\pi Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma^2(n+^1/_2)}{n!\,(n+^1/_2)\,\Gamma(n+1+\varepsilon)} F\left(\tfrac{1}{2}, 1, n+\tfrac{3}{2}, b\right)\right]$$

Учитывая, что

$$\lim \varepsilon Y_0 = -s, \qquad \lim \varepsilon F\left(\tfrac{1}{2}, 1, n+\tfrac{3}{2}, b\right) = 0 \qquad (n \geqslant 1)$$

будем иметь

$$\frac{1}{k}\lim \pi\varepsilon^2 Q = e^s - 1 - s \tag{7.8}$$

Переходя к параметрам H^* и Q^*, найдем

$$\lim H^* = 1 - e^{-s}, \qquad \lim Q^* = 1 - e^{-s}(1+s) \tag{7.9}$$

Исключая из последних соотношений параметр s и опуская знаки предела перед H^* и Q^*, окончательно найдем выражение для относительного фильтрационного расхода в следующем виде:

$$Q^* = H^* - (1-H^*)\ln\frac{1}{1-H^*} \tag{7.10}$$

8. Полученные формулы (6.15) и (7.10) отвечают предельным случаям наклона низового откоса и не отражают по сути своего вывода никаких реальных схем. Однако эти формулы могут быть приведены к обычному виду, если вернуться к первоначальным параметрам H, Q, φ.

Формула (6.15) переходит в

$$Q = \frac{kH^2}{B + \sqrt{B^2 - H^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}} = k\,(B - \sqrt{B^2 - H^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi})\ \operatorname{tg}^2 \varphi \tag{8.1}$$

Формула (7.10) переходит в

$$Q = k \operatorname{tg} \varphi \left[H - (B \operatorname{tg} \varphi - H) \ln \frac{B \operatorname{tg} \varphi}{B \operatorname{tg} \varphi - H} \right] \tag{8.2}$$

Формулы (8.1) и (8.2) характеризуют поведение фильтрационного расхода, вообще говоря, только при стремлении угла φ к 0 и к $\frac{1}{2}\pi$. Однако эти формулы могут быть приняты в качестве предельных для произвольных наклонов низового откоса, так как вычисления показывают, что они дают соответственно нижний и верхний пределы величины фильтрационного расхода при любых промежуточных значениях угла φ. При этом формулы (8.1) и (8.2) допускают любые сочетания исходных параметров.

Как указывалось [5], отклонение величины фильтрационного расхода, вычисленной по формуле (8.1), от фильтрационного расхода, вычисленного по (8.2), не превышает 16.4%. В большинстве практических случаев оценка фильтрационного расхода по формуле (8.1) дает отклонение от строгого гидромеханического решения порядка не более 5%.

Отметим, что формула (8.1) известна в гидравлике как гидравлическая формула Н. Н. Павловского. Она была выведена ранее [6, 7] из гидравлических предпосылок для плотин с произвольным углом φ. Формула (8.2) также была выведена ранее из гидравлических предпосылок Н. Т. Мелещенко [8]. Приведенное исследование подтверждает высокую точность этих приближенных формул.

Поступила 4 XI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Пример движения грунтовых вод через земляную плотину при наличии испарения. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1939.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. Изд. АН СССР, М.—Л., 1942.
3. Михайлов Г. К. К задаче о фильтрации в анизотропных земляных плотинах трапецоидального профиля на горизонтальном водоупоре. ДАН СССР, т. LXXX, № 4, 1951.
4. Gauss C. F., Werke, 3. B, стр. 123—162, 207—230, 1876.
5. Михайлов Г. К. О фильтрации в трапецоидальных плотинах на горизонтальном водоупоре. Гидротехника и мелиорация, № 1, 1952.
6. Schaffernak F. Über die Standsicherheit durchlässiger geschütteter Dämme. Allgemeine Bauzeitung, 82, Nr. 4, Wien, 1917.
7. Павловский Н. Н. О фильтрации воды через земляные плотины. Изд. сектора гидротехники и гидротехнических сооружений, Л., 1931.
8. Мелещенко Н. Т. О расчете фильтрации через земляные плотины по методу проф. Н. Н. Павловского. Гидротехническое строительство, № 2—3, 1932.