Институт механики Академии наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

О ВЫЧИСЛЕНИИ ФУНКЦИИ ДАВЛЕНИЯ И ФУНКЦИИ РАСХОДА В СЛУЧАЕ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ

В. П. Пилатовский

(Москва)

Фильтрация упругой жидкости в плоском пласте приводит к рассмотрению уравнения теплопроводности [1]; решения этого уравнения обычно даются в форме разложения в ряды по функциям Бесселя; эти ряды не всегда удобны для практических вычислений ввиду их медленной сходимости в области малых и средних значений параметра времени.

Задачи о радиальной фильтрации целесообразно решать методами операционного исчисления; в этом направлении известны работы [2,3].

В настоящей статье предлагается метод приближенного решения задачи о радиальной фильтрации упругой жидкости в пласте, образованном системой кольцевых областей с общим центром.

В пределах каждой области поток предполагается однородным. Предлагаемый ниже метод основан на представлении решения задачи в виде суммы n членов асимптотического разложения, полученного для области малых значений параметра времени, и остаточного члена разложения, вычисляемого при помощи специального тригонометрического ряда, коэффициенты которого находятся алгебраически по изображению искомого решения и по изображению n членов асимптотического разложения.

Ниже подробно показано применение метода в решении задачи о радиальном потоке жидкости к скважине конечного радиуса, на контуре которой задан расход жидкости.

1. Общая постановка задач о радиальной фильтрации упругой жидкости в пласте при постоянных граничных условиях. Система концентричных окружностей с радиусами $r_1, \ldots, r_n$ в неограниченном плоском пласте постоянной мощности b образует ряд кольцевых областей $S_1, \ldots, S_n$. В каждой области $S_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ фильтрационные свойства пласта и насыщающей его жидкости известны и принимаются постоянными; обозначим через $\varkappa_\nu^2$ коэффициент пьезопроводности, $c_\nu = k_\nu / \mu$ — коэффициент фильтрации, где k_ν — проницаемость пористой среды и μ — вязкость пластовой жидкости в кольцевой области S_ν.

Дифференциальное уравнение радиального течения упругой жидкости в кольцевой области S_ν приводится к виду [1]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\varkappa_\nu^2}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.1}$$

Скорость фильтрации v_r в кольцевой области S_ν через давление $p = p(r, t)$ в пласте определяется

$$v_r = -c_\nu \frac{\partial p}{\partial r} \tag{1.2}$$

Расход жидкости через боковую поверхность цилиндра, секущего пласт нормально по окружности радиусом r, выражается

$$q = -2\pi r c_\nu \frac{\partial p}{\partial r} \tag{1.3}$$

причем q рассчитывается на единицу мощности пласта.

Задачи о радиальной фильтрации упругой жидкости целесообразно рассматривать в безразмерных параметрах длины ρ, времени τ, функции давления $h(\rho, \tau)$ и функции расхода $\omega(\rho, \tau)$.

Переменные ρ и τ определим так:

$$\rho = \frac{r}{R}, \qquad \tau = \frac{\varkappa_\nu^2 t}{R^2} \tag{1.4}$$

где R — радиус некоторой произвольно взятой концентрической окружности, t — текущее время, r — расстояние рассматриваемой точки M от общего центра окружностей O.

Функцию расхода $\omega(\rho, \tau)$ определяем через $h(\rho, \tau)$:

$$\omega(\rho, \tau) = \rho \frac{\partial h}{\partial \rho} \tag{1.5}$$

Давление в точке $M(r)$ пласта через $h(\rho, \tau)$ представим

$$p(r, t) = Ph(\rho, \tau) \tag{1.6}$$

где P — величина произвольно выбранного перепада давления.

Объемный расход жидкости, протекающей через окружность радиуса r, лежащую в области S_ν, в силу (1.5) и (1.6) определяется

$$q_\nu = -D_\nu \omega(\rho, \tau), \qquad D_\nu = 2\pi c_\nu P \tag{1.7}$$

При этом внутренний приток считается положительным. Уравнение (1.1) при подстановке (1.4) и (1.6) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h}{\partial \rho} = \frac{\partial h}{\partial \tau} \tag{1.8}$$

Функцию давления $h(\rho, \tau)$ ищем при начальном условии

$$h(\rho, \tau)\big|_{\tau=0} = 0, \qquad p(r, t)\big|_{t=0} = 0 \tag{1.9}$$

Функция $h(\rho, \tau)$ всюду непрерывна, следовательно, ограничена в любой точке пласта. Кроме того, при постоянных граничных условиях функция $h(\rho, \tau)$ должна удовлетворять одному из следующих требований, задаваемых на каждой границе: либо, во-первых, на контуре скважины, галлереи или внешнем контуре круговой залежи функция $h(\rho, \tau)$ принимает значение

$$h = \frac{p}{P} \tag{1.10}$$

либо, во-вторых, на контуре скважины, галлереи или на внешнем контуре круговой залежи функция расхода $\omega(\rho, \tau)$ определяет постоянный приток жидкости:

$$q = D_e \omega_e(\rho, \tau) - D_i \omega_i(\rho, \tau) \tag{1.11}$$

либо, в-третьих, на общей границе двух смежных кольцевых областей, имеющих различные фильтрационные свойства, расход жидкости непрерывен:

$$D_i \omega_i (\rho, \tau) = D_e \omega_e (\rho, \tau) \tag{1.12}$$

В равенствах (1.11) и (1.12) индексы i и e обозначают, что соответствующие величины относятся к внешней и внутренней областям.

Задачи о радиальной фильтрации целесообразно рассматривать, пользуясь операционным исчислением. Для этого перейдем от оригиналов $h(\rho, \tau)$, $\omega(\rho, \tau)$ к их изображениям по Карсону[4]:

$$H(\rho, s) = s \int_0^\infty e^{-s\tau} h(\rho, \tau)\, d\tau \doteq h(\rho, \tau) \tag{1.13}$$

$$\Omega(\rho, s) = s \int_0^\infty e^{-s\tau} \omega(\rho, \tau)\, d\tau \doteq \omega(\rho, \tau) \tag{1.14}$$

Вместо (1.8) с учетом (1.9) имеем изображающее уравнения для ν-й кольцевой области пласта

$$\frac{d^2 H_\nu}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dH_\nu}{d\rho} - sH_\nu = 0 \tag{1.15}$$

Интегралом уравнения (1.15) будет[5]

$$H_\nu(\rho, s) = A_\nu I_0(\rho\sqrt{s}) + B_\nu K_0(\rho\sqrt{s}) \tag{1.16}$$

где $I_0(z)$ и $K_0(z)$ — функция Бесселя первого и второго рода нулевого порядка от чисто мнимого аргумента, A_ν, B_ν — постоянные интегрирования, определяемые по граничным условиям для каждой кольцевой области S_ν. На основании (1.5), (1.14) и свойств $I_0(z)$, $K_0(z)$ получим изображение функции дебита:

$$\Omega_\nu(\rho, s) = \rho\sqrt{s}\,[A_\nu I_1(\rho\sqrt{s}) - B_\nu K_1(\rho\sqrt{s})] \tag{1.17}$$

Поскольку на границах кольцевых областей заданы постоянные краевые условия, изображения $H(\rho, s)$ и $\Omega(\rho, s)$ на этих границах принимают значения

$$H_\nu(\rho, s) = \frac{p_\nu}{P}, \qquad \Omega_\nu(\rho, s) = -\frac{q_\nu}{D_\nu} \tag{1.18}$$

Условия (1.18) для $H_\nu(\rho, s)$ и $\Omega_\nu(\rho, s)$ в каждой конкретной задаче дают систему линейных алгебраических уравнений для A_ν и B_ν ($\nu = 1, \ldots, n$). Разрешая эту систему уравнений, мы выразим постоянные A_ν и B_ν через функции $I_0(\rho_\nu\sqrt{s})$, $I_1(\rho_\nu\sqrt{s})$, $K_0(\rho_\nu\sqrt{s})$, $K_1(\rho_\nu\sqrt{s})$.

Имея явное выражение для изображения $H_\nu(\rho, s)$, оригинал $h_\nu(\rho, \tau)$ можно представить при помощи формулы Меллина, непосредственное применение которой для нахождения числовых значений оригинала затруднительно и может быть осуществлено лишь в простейших случаях.

Для ряда простейших задач о радиальном течении упругой жидкости в пласте приведем без вывода изображения $H(\rho, s)$ и $\Omega(\rho, s)$ функций давления $h(\rho, \tau)$ и расхода $\omega(\rho, \tau)$.

1. В задаче о внешнем притоке упругой жидкости к круговой скважине радиусом R, дренирующей неограниченный однородный пласт при заданном постоянном перепаде давления P, имеем:

$$H(\rho, s) = \frac{K_0(\rho\sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s})}, \qquad \Omega(\rho, s) = -\rho\sqrt{s}\,\frac{K_1(\rho\sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s})} \tag{1.19}$$

В статье [2] значения $\omega(1, \tau)$ табулированы.

2. В задаче о внешнем притоке упругой жидкости к круговой скважине радиусом R, дренирующей неограниченный однородный пласт при заданном постоянном дебите q, имеем:

$$H(\rho, s) = \frac{K_0(\rho\sqrt{s})}{\sqrt{s}\,K_1(\sqrt{s})}, \qquad \Omega(\rho, s) = -\rho\frac{K_1(\rho\sqrt{s})}{K_1(\sqrt{s})} \tag{1.20}$$

В статье [2] значения $h(1, \tau)$ табулированы.

3. В задаче о круговой галлерее радиусом R, дренирующей неограниченный однородный пласт при заданном постоянном перепаде давления P, имеем:

$$H_i(\rho, s) = \frac{I_0(\rho\sqrt{s})}{I_0(\sqrt{s})}, \qquad H_e(\rho, s) = \frac{K_0(\rho\sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s})} \tag{1.21}$$

$$\Omega_i(\rho, s) = \rho\sqrt{s}\,\frac{I_1(\rho\sqrt{s})}{I_0(\sqrt{s})}, \qquad \Omega_e(\rho, s) = -\rho\sqrt{s}\,\frac{K_1(\rho\sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s})} \tag{1.22}$$

Здесь индексы i и e обозначают, что соответствующие величины относятся к внешней и внутренней областям. На контуре галлереи

$$\Omega(1, s) = \frac{1}{I_0(\sqrt{s})\,K_0(\sqrt{s})} \tag{1.23}$$

В этой задаче, насколько нам известно, значения $\omega(1, \tau)$ не табулированы.

4. В задаче о круговой галлерее радиусом R, дренирующей неограниченный однородный пласт при заданном постоянном дебите галлереи q, имеем:

$$H_i(\rho, s) = I_0(\rho\sqrt{s})\,K_0(\sqrt{s}), \qquad H_e(\rho, s) = I_0(\sqrt{s})\,K_0(\rho\sqrt{s}) \tag{1.24}$$

$$\Omega_i(\rho, s) = \rho\sqrt{s}\,I_1(\rho\sqrt{s})\,K_0(\sqrt{s}), \qquad \Omega_e(\rho, s) = -\rho\sqrt{s}\,I_0(\sqrt{s})\,K_1(\rho\sqrt{s}) \tag{1.25}$$

На контуре галлереи

$$\Omega(1, s) = -1 \tag{1.26}$$

В работе [6] доказано, что изображению (1.24) отвечает оригинал

$$\omega(\rho, \tau) = \int_0^\tau \frac{1}{2x}\exp\left(-\frac{1+\rho^2}{4x}\right) I_0\left(\frac{\rho}{2x}\right) dx \tag{1.27}$$

Там же значения $\omega(\rho, \tau)$ табулированы для $0 \leqslant \rho \leqslant 2.4$, $0 \leqslant \tau \leqslant 5$.

Перейдем к общему вопросу вычисления числовых значений функций $h(\rho, \tau)$ и $\omega(\rho, \tau)$. Для решения этого вопроса предлагается ниже метод, который подробно рассмотрен на примере вычисления значений функции давления $h(\rho, \tau)$ в случае второй задачи из приведенного выше перечня.

2. О вычислении функции давления $h(\rho, \tau)$ в случае второй задачи. В статье [2] задача о падении давления в какой-либо точке неограниченного однородного пласта в случае движения упругой жидкости к круглой скважине радиусом R, работающей при постоянном дебите, сведена к вычислению функции давления в форме

$$h(\rho, \tau) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{(1 - e^{-u^2\tau})\,[J_1(u)\,Y_0(\rho u) - J_0(\rho u)\,Y_1(u)]}{u^2\,[J_1^2(u) + Y_1^2(u)]}\,du \tag{2.1}$$

где ρ и τ определены из (1.4), $J_0(u)$, $J_1(u)$, $Y_0(u)$, $Y_1(u)$ обозначают известные функции Бесселя. Падение давления в какой-либо точке пласта, находящейся от оси скважины на расстоянии $r > R$, определяется

$$\Delta p = \frac{q\mu}{2\pi k}\,h(\rho, \tau) \tag{2.2}$$

В статье [2] показано, что изображение по Карсону функции $h(\rho, \tau)$ приводится к $H(\rho, s)$ в форме (1.20). Вычисление значений $h(\rho, \tau)$ согласно (2.1) затруднительно. В работах [7,8] предложен способ нахождения числовых значений функции при помощи специального тригонометрического разложения функции, заданной своим лапласовым изображением. Применим этот метод к рассматриваемой задаче.

Если для функции $f(t)$ известно ее изображение по Лапласу

$$F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (\operatorname{Re} s > \alpha) \tag{2.3}$$

тогда между изображением $F(s)$ и оригиналом $f(t)$ существует зависимость [7,8]

$$f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\pi\sigma k/\lambda} f\left(t + \frac{\pi k}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\pi} e^{\sigma t} \sum_{\nu} e^{i\nu\lambda t} F(\sigma + i\nu\lambda)$$

$$(t\lambda < \pi;\ \nu = \pm 1, \pm 3, \ldots) \tag{2.4}$$

где λ и σ — произвольные положительные числа. Если функция $f(t)$ растет не быстрее, чем $e^{\alpha t}$, то подходящим выбором λ и σ можно добиться того, что сумма, стоящая в левой части равенства (2.4), будет как угодно малой и мы приближенно получим

$$f(t) \approx \frac{\lambda}{\pi} e^{\sigma t} \sum_{\nu} e^{i\nu\lambda t} F(\sigma + i\nu\lambda) \quad (\nu = \pm 1, \pm 3, \ldots) \tag{2.5}$$

Степень погрешности в формуле (2.5) легко найти в случае, когда функция $f(t)$ положительна. Тогда получим

$$f(t) - e^{-\pi\sigma/\lambda} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) < f(t) < f(t) - e^{-\pi\sigma/\lambda} f\left(t + \frac{\pi}{\lambda}\right) + e^{-2\pi\sigma/\lambda} f\left(t + \frac{2\pi}{\lambda}\right) \tag{2.6}$$

В рассматриваемой задаче $h(\rho, \tau) > 0$, поэтому неравенства (2.6) выполняются, если положить $f(\tau) = h(\rho, \tau)$. Коэффициенты $F(\sigma + i\nu\lambda)$ тригонометрического разложения (2.5) найдем из условия

$$sF(s) = H(\rho, s) = \frac{K_0(\rho\sqrt{s})}{\sqrt{s}\,K_1(\sqrt{s})} \tag{2.7}$$

Зависимость (2.7) определяет изображение $F(s)$ по Лапласу через изображение $H(\rho, s)$ по Карсону.

Вычисление коэффициентов $F(\sigma + i\nu s)$ приводит к задаче нахождения значений функций Бесселя $K_0(z)$ и $K_1(z)$ для комплексных значений аргумента z. Опуская детали выводов, приводим аналитические выражения для вычисления значений $K_0(z)$ и $K_1(z)$ в случае, когда z комплексно

$$z = ae^{i\theta} = a\cos\theta + ia\sin\theta \tag{2.8}$$

Согласно определению [5] функций $I_0(z)$, $K_0(z)$, $I_1(z)$ и $K_1(z)$ имеем

$$A + iB = K_0(z) = -I_0(z)\left(\ln\frac{z}{2} + \gamma\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \tag{2.9}$$

$$C + iD = zK_1(z) = zI_1(z)\left(\ln\frac{z}{2} + \gamma\right) + I_0(z) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L_n}{n!\,(n-1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \tag{2.10}$$

$$P_0 + iQ_0 = I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad P_1 + iQ_1 = zI_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!\,(n-1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \tag{2.11}$$

$$S_0 + iT_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad S_1 + iT_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L_n}{n!\,(n-1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \tag{2.12}$$

где $L_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, а γ — постоянная Эйлера ($\gamma = 0.5772\ldots$).

На основании зависимостей (2.9) — (2.12) получим следующие выражения для A, B, C и D:

$$A = -P_0\left(\ln\frac{a}{2} + \gamma\right) + Q_0\theta + S_0, \qquad B = -P_0\theta - Q_0\left(\ln\frac{a}{2} + \gamma\right) + T_0 \tag{2.13}$$

$$C = P_1\left(\ln\frac{a}{2} + \gamma\right) - Q_1\theta + P_0 - S_1, \qquad D = P_1\theta + Q_1\left(\ln\frac{a}{2} + \gamma\right) + Q_1 - T_1$$

где P_0, Q_0, S_0, T_0, P_1, Q_1, S_1 и T_1 вычисляются при помощи рядов

$$P_0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\cos 2n\theta, \qquad Q_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\sin 2n\theta \tag{2.14}$$

$$S_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n}{(n!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\cos 2n\theta, \qquad T_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_n}{(n!)^2}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\sin 2n\theta$$

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!\,(n-1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\cos 2n\theta, \qquad Q_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!\,(n-1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\sin 2n\theta$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L_n}{n!\,(n-1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\cos 2n\theta, \qquad T_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L_n}{n!\,(n-1)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\sin 2n\theta$$

Если в разложениях (2.13), (2.14) удержать пять первых членов, то при $a \leqslant 2$ погрешность вычисления не превзойдет 10^{-5}. По данному значению z находим P_0, Q_0, S_0, T_0, P_1, Q_1, S_1, T_1, а затем согласно (2.13) — (2.14) получим A, B, C и D. Таким образом, согласно (2.10) и (2.11) определяем значения функций $K_0(z)$ и $zK_1(z)$, а по ним находим коэффициенты разложения (2.5) в силу (2.8):

$$F(\sigma + i\nu\lambda) = \frac{K_0(\rho\sqrt{\sigma + i\nu\lambda})}{(\sigma + i\nu\lambda)\sqrt{\sigma + i\nu\lambda}\ K_1(\sqrt{\sigma + i\nu\lambda})} \tag{2.15}$$

Непосредственное использование ряда (2.5) для вычисления значений $h(\rho, \tau)$ приводит к необходимости вычислить достаточно большое число коэффициентов $F(\sigma + i\nu\lambda)$ тригонометрического ряда. Улучшение сходимости ряда (2.5) можно достичь следующим образом. Замечаем, что для достаточно больших по модулю значений s изображение $H(\rho, s)$ определяется асимптотическим разложением для $K_0(z)$ и $K_1(z)$. Тогда имеем

$$H(\rho, s) = H_n(\rho, s) + \Delta_n(\rho, s) \tag{2.16}$$

Изображение H_n обозначает n первых членов асимптотического разложения $H(\rho, s)$. Таким образом, равенству изображений (2.16) отвечает равенство оригиналов:

$$h(\rho, \tau) = h_n(\rho, \tau) + \delta_n(\rho, \tau) \tag{2.17}$$

где $h_n(\rho, \tau)$ вычисляются по изображению $H_n(\rho, s)$. Поправку $\delta_n(\rho, \tau)$ вычислим при помощи ряда (2.5), где полагаем

$$F(s) = \Delta_n(\rho, s) = \frac{K_0(\rho\sqrt{s})}{s\sqrt{s}\,K_1(\sqrt{s})} - H_n(\rho, s) \tag{2.18}$$

При достаточно большом n коэффициенты $F(\sigma + ik\lambda)$ быстро убывают, и тогда тригонометрический ряд, построенный для поправки $\delta_n(\rho, \tau)$, быстро сходится. Итак, задача о нахождении функции давления $h(\rho, \tau)$ сведена к вычислению n членов асимптотического ряда и соответствующей поправки $\delta_n(\rho, \tau)$.

Используя известные асимптотические разложения [5] для функций $K_0(z)$ и $K_1(z)$, найдем первые четыре члена асимптотического разложения для $H(\rho, s)$. В результате получим

$$H_4(\rho, s) = \frac{1}{\sqrt{\rho s}}\, e^{-(\rho-1)\sqrt{s}} \left\{1 + \frac{c_1}{\sqrt{s}} + \frac{c_2}{s} + \frac{c_3}{s\sqrt{s}}\right\} \qquad (\rho \geqslant 1) \tag{2.19}$$

где постоянные c_1, c_2, c_3 вычисляются по формулам

$$c_3 = -\frac{1}{8\rho} - \frac{3}{8}, \qquad c_2 = \frac{9}{128\,\rho^2} + \frac{15}{128} - \frac{3}{8}c_1$$
$$c_2 = -\frac{75}{1024\,\rho^3} - \frac{105}{1024} - \frac{3}{8}c_2 + \frac{15}{128}c_1 \tag{2.20}$$

Для того чтобы найти тригонометрический ряд для поправки $\delta_4(\rho, \tau)$, необходимо задаться числом ρ, определяющим положение точки M пласта.

Разберем подробно частный случай, когда $\rho = 1$; очевидно этот случай отвечает задаче о вычислении величин падения давления на контуре скважины.

Для рассматриваемой задачи в статье [2] приведены числовые значения $h(1, \tau)$. Эти значения, полученные путем численного интегрирования (2.1), позволяют оценить эффективность предлагаемого приближенного метода.

Полагая $\rho = 1$ в (2.19) и (2.20), найдем

$$H_4(1, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{0.5}{s} + \frac{0.375}{s\sqrt{s}} - \frac{0.375}{s^2} \tag{2.21}$$

Изображению (2.21) отвечает оригинал [4]

$$h_4(1, \tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \frac{3\tau^2}{16} \tag{2.22}$$

Изображение поправки $\Delta_4(\rho, s)$ согласно (1.18) дает

$$F(s) = \Delta_4(1, s) = \frac{K_0(\sqrt{s})}{s\sqrt{s}\,K_1(\sqrt{s})} - \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - \frac{0.5}{s} + \frac{0.375}{s\sqrt{s}} - \frac{0.375}{s^2}\right) \tag{2.23}$$

Коэффициенты $F(\sigma + i\nu\lambda)$ тригонометрического ряда (2.5), написанного для поправки $\sigma_4(1, \tau)$, найдем, если в (2.23) положить $s = \sigma + i\nu\lambda$. В рассматриваемой задаче для σ и λ приняты значения

$$\sigma = \frac{3}{4}, \qquad \lambda = \frac{1}{4}, \qquad s = \frac{1}{4}(3 + i\nu) \qquad (\nu = 1, 3, 5, \ldots) \tag{2.24}$$

На основании (2.8) и (2.24) имеем

$$a^2 = \frac{\sqrt{9 + \nu^2}}{4}, \qquad \sin 2\theta = \frac{\nu}{\sqrt{9 + \nu^2}}, \qquad \cos 2\theta = \frac{3}{\sqrt{9 + \nu^2}} \tag{2.25}$$

По формулам (2.25) были вычислены значения a, θ; затем при помощи (2.13), (2.14) найдены значения $K_0(\sqrt{s})$ и $\sqrt{s}\,K_1(\sqrt{s})$. Коэффициенты $F(\sigma + i\nu)$ вычислены по формуле (2.23) для $\nu = 1, 3, 5, \ldots, 17$. Обозначим действительную и мнимую части (2.23) через M_ν и N_ν; тогда после несложных упрощений разложение (2.5), написанное для поправки $\delta_4(1, \tau)$, дает выражение

$$\sigma_4(1, \tau) = \frac{1}{2\pi} e^{3\tau/4} \sum_\nu \left(M_\nu \text{ os} \frac{\nu\tau}{4} - N_\nu \sin\frac{\nu\tau}{4}\right) \qquad (\nu = 1, 3, \ldots, 17) \tag{2.26}$$

Значения коэффициентов M_ν и N_ν, вычисленные по формулам (2.13), (2.14) и (2.23), приведены в табл. 1. В силу (2.17), (2.22) и (2.26) найдем искомое выражение для функции давления $h(1, \tau)$ при $\tau < 4\pi$:

$$h(1, \tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{2}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \frac{3\tau^2}{16} + \\ + \frac{1}{2\pi} e^{3\tau/4} \sum_\nu \left(M_\nu \cos\frac{\nu\tau}{4} - N_\nu \sin\frac{\nu\tau}{4}\right) \qquad (\nu = 1, 3, \ldots, 17) \tag{2.27}$$

Таблица 1

Значения коэффициентов M_ν, N_ν тригонометрического ряда

ν	M_ν	N_ν	ν	M_ν	N_ν
1	0.21841	—0.36554	11	—0.00291	0.00622
3	—0.13757	—0.09621	13	—0.00120	0.00400
5	—0.05959	0.01193	15	—0.00048	0.00259
7	—0.02046	0.01571	17	0.00027	0.00168
9	—0.00746	0.01025			

В табл. 2 приведены значения $h(1, \tau)$ ($\tau \leqslant 5$), вычисленные по формуле (2.27); эти значения $h(1, \tau)$ сопоставляются с теми значениями, которые получены Эвердингеном и Херстом в результате численного

Таблица 2

Значения функции $h(1, \tau)$

τ	по (2.1)	по (2.27)	по (2.22)
0.05	0.229	0.229	0.259
0.10	0.315	0.313	0.369
0.20	0.424	0.424	0.524
0.50	0.616	0.615	0.601
1.00	0.802	0.799	0.723
1.50	0.927	0.926	0.728
2.00	1.020	1.019	0.644
2.50	1.101	1.098	0.477
3.00	1.169	1.166	0.233
4.00	1.275	1.283	—0.486
5.00	1.362	1.353	—1.510

интегрирования интеграла (2.1); там же приведены результаты вычисления $h(1, \tau)$ по асимптотической формуле (2.22). Табл. 2 показывает, что приближенное выражение (2.27) для функции давления $h(1, \tau)$ дает незначительную погрешность вычисления. Применение рассмотренного метода к задаче о вычисления падения давления в какой-либо внешней точке ($\rho > 1$) не вызывает каких-либо дополнительных затруднений, при этом придется пользоваться общими уравнениями (2.18), (2.19) и (2.20) для определения значений коэффициентов соответствующего тригонометрического разложения (2.5).

Точно так же предлагаемый метод вычисления функции давления с успехом можно применить и к решению других задач радиального течения упругой жидкости.

Задача сведется к нахождению соответствующего изображения решения по Лапласу. Затем по найденному изображению вычисляются коэффициенты тригонометрического ряда (2.5) для соответствующей поправки и решение представляется в форме (2.17), где $h_n(\rho, \tau)$ определяется по n членам асимптотического разложения $H(\rho, s)$, а $\delta_n(\rho, \tau)$ — поправка, вычисляемая при помощи разложения (2.5).

Поступила 28 III 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. ДАН СССР, т. LII, № 2, 1946.
2. A. F. van Ewerdingen and W. Hurst. The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs. Journ. Petroleum Technology. vol. I, No 12, 1949.
3. Щелкачев В. Н. Применение операционных методов к решению задачи о движении упругой жидкости в упругом пласте. ДАН СССР, т. LXXIX, № 5, 1951.
4. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Гостехиздат, 1950.
5. Грей Э. и Метьюз Г. В. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Изд. иностр. литературы, 1949.
6. Пилатовский В. П. Взаимодействие концентрических галлерей, дренирующих неограниченный пласт при упругом режиме. Инженерный сборник, т. XV, 1953.
7. Пилатовский В. П. О приближенном вычислении значений функции, заданной лапласовым изображением. ДАН, т. LXXXII, № 2, 1952.
8. Пилатовский В. П. О вычислении остаточного члена асимптотического разложения функции, заданной своим лапласовым изображением. ДАН, т. LXXXIII, № 5, 1952.