Институт механики Академии наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

КОЛЕБАНИЯ ПЛАВАЮЩЕГО КОНТУРА НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

М. Д. Хаскинд

(Николаев)

1. Гидродинамическая постановка задач о качке цилиндрических судов приводит к задаче об отыскании гармонической функции

$$\Phi(y, z, t) = \varphi(y, z)\, e^{j\sigma t} \qquad (j = \sqrt{-1}) \tag{1.1}$$

удовлетворяющей граничным условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \nu\varphi = 0 \quad \text{при } z = 0, \ |y| > a \quad \left(\nu = \frac{\sigma^2}{g}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = v_n(l) \quad \text{на контуре } L \tag{1.3}$$

и асимптотическим условиям (1.4)

$$\varphi = \left(j\frac{g}{\sigma} r_0 + B_+\right) e^{\nu z - j\nu y} \quad \text{при } y \to +\infty, \qquad \varphi = j\frac{g}{\sigma} r_0 e^{\nu z - j\nu y} + B e^{\nu z + j\nu y} \quad \text{при } y \to -\infty$$

где σ — частота колебаний, ν — частотный параметр, g — ускорение силы тяжести, $v_n(l)\, e^{j\sigma t}$ — нормальная составляющая скорости какой-либо точки контура, $2a = b$ — ширина контура L по ватерлинии, n — внешняя нормаль к контуру, $\Phi^* = jg\sigma^{-1} r_0 e^{\nu z + j(\sigma t - \nu y)}$ — потенциал скоростей набегающей системы регулярных волн, $2r_0$ их высота, B_+ и B_- — комплексные по j амплитуды излучаемых волн, причем во всех выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель $e^{j\sigma t}$, следует рассматривать только действительную часть.

В данной работе имеем в виду дать метод построения точного решения задачи в общем случае для широкого класса контуров, при помощи которого могут быть просчитаны до конца все гидродинамические характеристики. В частном виде этот метод применялся нами в работах [1, 2].

2. Для построения решения задачи будем пользоваться функцией

$$w = \varphi(y, z) + i\psi(y, z)$$

комплексного переменного $x = y + iz$ где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, не взаимодействующая с мнимой единицей $j = \sqrt{-1}$.

При помощи функции $w(x)$ условие (1.2) может быть представлено в форме

$$\mathrm{Im}\left(\frac{dw}{dx} + i\nu w\right) = 0 \qquad \text{при } z = 0, \ |y| > a \tag{2.1}$$

Условие (2.1) позволяет продолжить функцию $dw / dx + i\nu w$ в верхнюю полуплоскость. В результате получаем голоморфную функцию во всей плоскости x вне контура $L + \bar{L}$, где $\bar{L}$ — зеркальное отражение контура L в верхней полуплоскости.

Вблизи бесконечно удаленной точки справедливо разложение

$$\frac{dw}{dx} + i\nu w = \frac{a_0'}{x} + \frac{b_0'}{x^2} + \cdots \tag{2.2}$$

причем в силу условия (2.1) коэффициенты a_0', b_0', ... действительны относительно мнимой единицы i.

Для построения функции, принимающей всюду конечные значения, воспользуемся идеей Л. И. Седова, развитой им в задаче о глиссировании [3], и введем другую функцию $f(x) = r + is$, связанную с $w(x)$ уравнением

$$\frac{df}{dx} = \frac{dw}{dx} + i\nu w \tag{2.3}$$

Очевидно, что функция $f(x)$ голоморфна всюду вне контура $L + \bar{L}$ и ограничена в точках этого контура.

На основании (2.1) для функции $f(x)$ имеем условие

$$\frac{\partial r}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = 0, \ |y| > a \tag{2.4}$$

Составим граничное условие для функции r в точках контура L. Умножая обе части равенства (2.3) на величину

$$\frac{dx}{dl} = \frac{dy}{dl} + i\frac{dz}{dl}$$

где dl — элемент дуги контура L, получим

$$\frac{df}{dl} = \frac{dw}{dl} + i\nu w\left(\frac{dy}{dl} + i\frac{dz}{dl}\right)$$

Отделяя в этом соотношении действительную и мнимую части, в результате будем иметь

$$\frac{\partial r}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial l} - \nu\frac{dz}{dl}\varphi - \nu\frac{dy}{dl}\psi, \qquad \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \nu\frac{dz}{dl}\psi - \nu\frac{dy}{dl}\varphi \tag{2.5}$$

На контуре L имеем соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial l} = v_n(l) \tag{2.6}$$

Поэтому функция ψ на контуре L известна с точностью до постоянной l

$$\psi = \psi_1 - \int_0^l v_n(l)\, dl \tag{2.7}$$

где ψ_1 — значение функции ψ в точке $y = a$, $z = 0$, и интегрирование здесь и в дальнейших интегралах проводится по части контура L от точки $y = a$, $z = 0$.

Исключаем из соотношений (2.5) неизвестную функцию φ. Для этого, рассматривая первое соотношение как уравнение относительно φ, получаем

$$\varphi = r + e^{\nu z}\left(\varphi_1 - r_1 + \nu \int_0^l e^{-\nu z} r\, dz + \nu \int_0^l e^{-\nu z} \psi\, dy\right)$$

или же

$$r + \nu e^{\nu z} \int_0^l e^{-\nu z} r\, dz = \varphi - e^{\nu z}\left[\varphi_1 - r_1 + \nu \int_0^l e^{-\nu z} \psi\, dy\right] \tag{2.8}$$

где φ_1 и r_1 — значения функций φ и r в точке $(a,\ 0)$.

Умножая теперь (2.8) на $\nu\,(dy\,/\,dl)$ и складывая его со вторым уравнением (2.5), получаем условие для r на контуре L:

$$\frac{\partial r}{\partial n} + \nu \frac{dy}{dl}\left[r + \nu e^{\nu z} \int_0^l e^{-\nu z} r\, dz\right] = v_n + \nu \frac{dz}{dl} \psi - \nu \frac{dy}{dl} e^{\nu z}\left[\varphi_1 - r_1 + \nu \int_0^l e^{-\nu z} \psi\, dy\right] \tag{2.9}$$

Пусть функция $x = y + iz = F(\tau)$ осуществляет конформное отображение внешности контура $L + \bar{L}$ в плоскости x на внешность единичного круга с центром в начале координат в плоскости τ.

Введем далее вспомогательную переменную

$$\zeta = \xi + i\eta, \qquad \tau = e^{\zeta}, \qquad x = F(e^{\zeta}) = F_1(\zeta)$$

В плоскости ζ контуру L отвечает отрезок оси η от $-\pi$ до 0, а частям координатной оси $z = 0$ и $|y| > a$ соответствуют полупрямые $\eta = 0$ и $\eta = -\pi$ $(\xi \geqslant 0)$.

Нетрудно видеть, что в плоскости ζ условие (2.4) примет вид:

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{при } \eta = 0 \text{ и } \eta = -\pi \tag{2.10}$$

Преобразуем условие (2.9). Для этого заметим, что при $\xi = 0$ справедливы равенства

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial \xi}\left|\frac{d\zeta}{dx}\right|, \qquad \frac{dy}{dl} = -\frac{dy}{d\eta}\left|\frac{d\zeta}{dx}\right|, \qquad \frac{dz}{dl} = -\frac{dz}{d\eta}\left|\frac{d\zeta}{dx}\right| \tag{2.11}$$

Поэтому, умножая обе части равенства (2.9) на модуль величины $dx\,/\,d\zeta$, получим условие при $\xi = 0$ для значений $-\pi < \eta < 0$:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} - \nu \frac{dy}{d\eta}\left[r + \nu e^{\nu z} \int_0^\eta e^{-\nu z} r\, dz\right] = \Phi_n(\eta) \tag{2.12}$$

где

$$\Phi_n(\eta) = v_n \left|\frac{dx}{d\zeta}\right| - \nu \frac{dz}{d\eta} \psi + \nu \frac{dy}{d\eta} e^{\nu z}\left[\varphi_1 - r_1 + \nu \int_0^\eta e^{-\nu z} \psi\, dy\right] \tag{2.13}$$

Для отыскания функции f представим ее в виде следующего ряда:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau^{-n} + a_0 \ln \tau = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\xi + in\eta} + a_0 (\xi + i\eta) \tag{2.14}$$

причем из условия (2.10) следует, что все a_n — действительные коэффициенты. Для того чтобы удовлетворить условию (2.12), составим выражения для r и $dr/d\xi$ при $\xi=0$:

$$r=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\eta, \qquad \frac{dr}{d\xi}=-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos n\eta + a_0 \tag{2.15}$$

и разложим $\Phi_n(\eta)$ в ряд Фурье по косинусам в промежутке $(-\pi,\ 0)$:

$$\Phi_n(\eta)=\frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\eta \tag{2.16}$$

Воспользовавшись этими разложениями, мы сможем условие (2.12) представить в форме

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos n\eta - \nu \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{dy}{d\eta}\left[\cos m\eta + \nu e^{\nu z}\int_0^{\eta} e^{-\nu z}\cos m\eta\, dz\right]+a_0=$$

$$=\frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\eta \tag{2.17}$$

Разложим далее в ряд Фурье по косинусам в промежутке $(-\pi,\ 0)$ следующую функцию:

$$-\nu\frac{dy}{d\eta}\left[\cos m\eta + \nu e^{\nu z}\int_0^{\eta} e^{-\nu z}\cos m\eta\, dz\right]=\frac{A_{0m}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}\cos n\eta \tag{2.18}$$

где

$$A_{nm}=-\frac{2\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[\cos m\eta + \nu e^{\nu z}\int_0^{\eta}\cos m\eta\, dz\right]\frac{dy}{d\eta}\cos n\eta\, d\eta \tag{2.19}$$

Подставив теперь разложение (2.18) в (2.17) и, сравнив коэффициенты при $\cos n\eta$ в обеих частях равенства (2.17), получим бесконечную систему уравнений для коэффициентов a_n и уравнение, определяющее a_0:

$$a_n=\sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} a_m + B_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{2.20}$$

$$a_0=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(b_0 - a_m A_{0m}\right) \tag{2.21}$$

Здесь

$$C_{nm}=\frac{A_{nm}}{n}, \qquad B_n=-\frac{b_n}{n} \tag{2.22}$$

Коэффициенты A_{nm} зависят от частотного параметра ν и от геометрических свойств контура L. Контур $L+L$ является симметричным как относительно оси y, так и относительно оси z, и характерным его параметрами являются отношение T/a, где T — осадка контура L и коэффициент полноты площади, ограниченной этим контуром. Только эти два параметра существенно влияют на величину гидродинамических характеристик.

Для симметричных контуров отображающая функция $x = F(\tau)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет следующий вид:

$$x = k_0\tau + \frac{k_1}{\tau} + \frac{k_2}{\tau^3} + \cdots \tag{2.23}$$

где k_n — действительные числа. Одна из простейших функций

$$x = \frac{a+T}{2}\tau + \frac{a-T}{2\tau} \tag{2.24}$$

реализует конформное отображение внешности эллипса с полуосями a и T на внешность единичного круга $\tau = e^{i\eta}$.

Если в (2.23) сохранить еще один член, содержащий τ^{-3}, то получим функцию, реализующую конформное отображение внешности семейства плавных симметричных контуров на внешность единичного круга в плоскости τ:

$$x = y + iz = k_0\tau + k_1\tau^{-1} + k_2\tau^{-3} \tag{2.25}$$

Полагая $\tau = e^{i\eta}$ $(\xi = 0)$ и отделяя действительную и мнимую части в (2.25), получим уравнения контура в параметрической форме:

$$y = (k_0 + k_1)\cos\eta + k_2\cos 3\eta, \qquad z = (k_0 - k_1)\sin\eta - k_2\sin 3\eta \tag{2.26}$$

Введем безразмерные параметры p и q при помощи соотношения

$$k_0 = \frac{T}{1+p+q}, \qquad k_1 = -pk_0, \qquad k_2 = qk_0 \tag{2.27}$$

тогда, положив в (2.26) $\eta = 0$, будем иметь

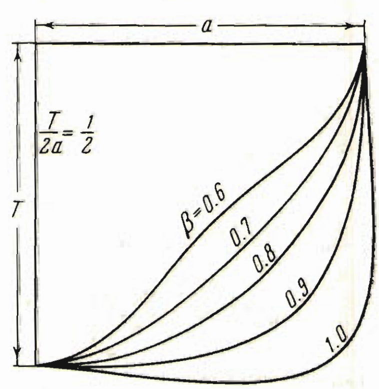
$$\frac{1+p+q}{1-p+q} = \frac{T}{a} \tag{2.28}$$

Вычисляя далее площадь, ограничиваемую контуром L, и пользуясь обозначением коэффициента полноты $\beta = S / 2aT$, получим равенство:

$$\beta = \frac{\pi}{4}\,\frac{1-p^2-q^2}{(1+p+q)^2}\,\frac{T}{a} \tag{2.29}$$

Соотношениями (2.28) и (2.29) определяются значения параметров p и q через T/a и β.

На фиг. 1 приводятся очертания контуров для различных значений β при $T/2a = 0.5$.



Фиг. 1

Очевидно, что если в разложении (2.23) сохранить последующий член, содержащий τ^{-5}, то получим более широкий класс контуров. Однако для задач о качке достаточно класса контуров, которые характеризуются двумя параметрами.

Из всего сказанного следует, что выражение (2.25) может быть положено в основу расчета коэффициентов A_{nm} для широкого класса контуров главных очертаний. Вычислим эти коэффициенты для эллиптического контура $L+\bar{L}$ и проведем анализ разрешимости системы бесконечных уравнений (2.20). Из (2.24) имеем для координат эллиптического контура: $y = a\cos\eta$, $z = T\sin\eta$. Поэтому выражение (2.19) примет вид:

$$A_{nm} = -\frac{2\lambda}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos m\eta - \alpha e^{-\alpha\sin\eta}\int_0^{\eta} e^{\alpha\sin t}\cos mt\cos t\,dt\right]\cos n\eta\sin\eta\,d\eta \quad (2.30)$$

где

$$\lambda = \nu a, \qquad \alpha = \lambda\frac{T}{a} \quad (2.31)$$

Прежде всего покажем, что $\lim A_{nm} = 0$ при $T/a \to \infty$. Рассмотрим для этого интеграл

$$J = \alpha e^{-\alpha\sin\eta}\int_0^{\eta} e^{\alpha\sin t}\cos t\cos mt\,dt \quad (2.32)$$

Подстановка $\sin\eta - \sin t = u/\alpha$ преобразует его к виду

$$J = \int_0^{\alpha\sin\eta} e^{-u}\cos mt(u)\,du$$

Отсюда без труда устанавливаем, что $\lim J = \cos m\eta$ при $T/a \to \infty$ для значений $0 < \eta < \pi$; поэтому $A_{nm} \to 0$ при $T/a \to \infty$.

Нетрудно также вычислить значения A_{nm} при $\alpha = 0$ $(T/a = 0)$:

$$A_{nm}^{(1)} = -\frac{2\lambda}{\pi}\int_0^{\pi}\cos m\eta\cos n\eta\sin\eta\,dn \quad (2.33)$$

Коэффициенты $A_{nm}^{(1)}$ отличны от нуля только для индексов n и m одинаковой четности. Имеем

$$\begin{aligned} A^{(1)}_{2s+1,\,2l+1} &= \frac{2\lambda}{\pi}\left[\frac{1}{4(l+s+1)^2-1} + \frac{1}{4(l-s^2)-1}\right] \\ A^{(1)}_{2s,\,2l} &= \frac{2\lambda}{\pi}\left[\frac{1}{4(l+s)^2-1} + \frac{1}{4(l-s)^2-1}\right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

Для удобства вычислений коэффициентов A_{nm} при любых α расчленим выражение (2.30) на две части:

$$A_{nm} = A_{nm}^{(1)} + A_{nm}^{(2)} \quad (2.35)$$

где $A_{nm}^{(1)}$ определяются из формул (2.34), а значения $A_{nm}^{(2)}$ по формуле

$$A_{nm}^{(2)} = -\frac{2\lambda}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\alpha\sin\eta}\right)\cos n\eta\int_0^{\eta}\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha\sin t}\right)\cos t\,dt\right]d\eta \quad (2.36)$$

Воспользуемся разложением

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha\sin t}\right) = -2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,2kI_{2k}(\alpha)\sin 2kt +$$

$$+2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\,I_{2k+1}(\alpha)\cos(2k+1)\eta \quad (2.37)$$

где $I_n(\alpha)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента,

$$(-1)^k I_{2k}(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{ch}(\alpha\sin x)\cos 2kx\,dx$$

$$(-1)^k I_{2k+1}(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sh}(\alpha\sin x)\sin(2k+1)x\,dx$$

Подставив разложение (2.37) в (2.36) и произведя необходимые вычисления, для коэффициентов $A_{nm}^{(2)}$ получаем следующее выражение:

$$A_{nm}^{(2)} = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2kI_{2k}(\alpha)\times$$

$$\times\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{E_{n+2k+m}^{(2)}+E_{n-2k-m}^{(2)}-2E_n^{(2)}}{2k+m}+\frac{E_{n+2k-m}^{(2)}+E_{n-2k+m}^{(2)}-2E_n^{(2)}}{2k-m}\right]-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)I_{2k+1}(\alpha)\times$$

$$\times\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{E_{2k+1+m+n}^{(1)}+E_{2k+1+m-n}^{(1)}}{2k+1+m}+\frac{E_{2k+1-m+n}^{(1)}+E_{2k+1-m-n}^{(1)}}{2k+1-m}\right] \qquad (2.38)$$

Здесь

$$E_n^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-\alpha\sin\eta}\sin n\eta\,d\eta,\qquad E_n^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-\alpha\sin\eta}\cos n\eta\,d\eta \qquad (2.39)$$

причем $E_{2p}^{(1)}=0$, $E_{2p+1}^{(2)}=0$ и поэтому индексы n и m у коэффициентов $A_{nm}^{(2)}$ одинаковой четности. Коэффициенты $E_{2p+1}^{(1)}$ и $E_{2p}^{(2)}$ выражаются через функции Бесселя I_n и функции Ломмеля-Вебера Ω_n. Имеем

$$E_{2p+1}^{(1)} = -(-1)^p I_{2p+1}(\alpha) - \Omega_{2p+1}(i\alpha),\qquad E_{2p}^{(2)} = (-1)^p I_{2p}(\alpha) + i\Omega_{2p}(i\alpha)$$

где

$$\Omega_{2p}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\sin x)\cos 2px\,dx \qquad (2.40)$$

$$\Omega_{2p+1}(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin x)\sin(2p+1)x\,dx$$

Таким образом, система уравнений (2.20) распадается на две независимые системы бесконечных уравнений — одна для a_n с нечетными индексами и другая для a_n с четными индексами:

$$a_{2s+1} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{sl}^{(1)}a_{2l+1} + B_{2s+1}\qquad (s = 0, 1, 2,\ldots) \qquad (2.41)$$

$$a_{2s} = \sum_{l=1}^{\infty} C_{sl}^{(2)}a_{2l} + B_{2s}\qquad (s = 1, 2, 3,\ldots) \qquad (2.42)$$

где

$$C_{sl}^{(1)} = \frac{A_{2s+1,\,2l+1}}{2s+1},\qquad C_{sl}^{(2)} = \frac{A_{2s,\,2l}}{2s} \qquad (2.43)$$

Выясним, при каких условиях суммы $|C_{s_0}{}^{(i)}| + |C_{s_1}{}^{(i)}| + \cdots$ при всех значениях s остаются меньше одного и того же числа, меньшего единицы, и, следовательно, при этих условиях системы (2.41) и (2.42) принадлежат к числу вполне регулярных систем, хорошо изученных и удобных для решения. Прежде всего в силу предельного перехода в (2.32) имеем $\lim(|C_{s_0}{}^{(i)}| + |C_{s_1}{}^{(i)}| + \cdots) = 0$ при $T/a \to \infty$. Поэтому при достаточно больших T/a системы (2.41) и (2.42) являются вполне регулярными.

Покажем также, что системы (2.41) и (2.42) являются вполне регулярными при малых значениях T/a. Используя разложения (2.18) при $\eta = 0$ и формулы (2.34) и (2.43), можно показать, что при $T/a = 0$

$$\sum_{l=0}^{\infty} |C_{sl}{}^{(1)}| = \frac{4\lambda}{\pi(2s+1)}\left(1 - \frac{1}{4(2s+1)^2 - 1}\right) \qquad (s=0, 1, 2\ldots)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} |C_{sl}{}^{(2)}| = \frac{4\lambda}{\pi s}\left(1 - \frac{1}{16s^2 - 1} - \frac{1}{8s^2 - 2}\right) \qquad (s=1, 2, 3,\ldots)$$

Отсюда

$$\sum_{l=0}^{\infty} |C_{sl}{}^{(1)}| \leqslant \frac{8\lambda}{3\pi}, \qquad \sum_{l=1}^{\infty} |C_{sl}{}^{(2)}| \leqslant \frac{92\lambda}{30\pi}$$

Здесь знак равенства в первой сумме имеет место при $s = 0$, а во второй сумме при $s = 1$. Таким образом, указанные суммы при малых T/a меньше одного и того же числа, меньшего единицы, если $\lambda < \frac{30}{92}\pi$.

Если система коэффициентов B_n ограничена по модулю в своей совокупности, т. е. независимо от индекса n, что, очевидно, имеет место в нашем случае, так как $B_n = -b_n/n$, где b_n являются коэффициентами ряда Фурье, то, как следует из теории вполне регулярных систем, системы (2.41) и (2.42) имеют единственное ограниченное решение для неизвестных коэффициентов, причем для решения вполне регулярных систем можно воспользоваться методом последовательных приближений.

Покажем еще, что при малых и больших значениях T/a и любых λ системы (2.41) и (2.42) удовлетворяют условиям разрешимости при помощи бесконечных определителей. Для этого представим, например, систему (2.41) в несколько иной форме:

$$a_{2s+1} = \sum_{l=0}^{\infty} C_{sl}' a_{2l+1} + B_{2s+1}' \qquad (s = 0, 1, 2,\ldots)$$

где

$$C_{ll}' = 0, \qquad C_{sl}' = \frac{A_{2s+1,\,2l+1}}{2s+1-A_{2s+1,\,2s+1}}, \qquad B_{2s+1}' = -\frac{b_{2s+1}}{2s+1-A_{2s+1,\,2s+1}}$$

Легко видеть, что ряд $|B_1'| + |B_3'| + |B_5'| + \cdots$ сходится и что при малых и больших значениях T/a двойной ряд, составленный из суммы коэффициентов $C_{sl}'^2$ сходится для всех λ. Принимая во внимание, что $C_{ll}' = 0$ при любом l, убеждаемся в выполнении достаточных условий для разрешимости системы (2.41) при помощи бесконечных определителей. Подобным путем доказывается разрешимость уравнений (2.42).

3. Если функция $f(x)$ определена, то, рассматривая соотношение (2.3) как дифференциальное уравнение относительно $w(x)$ и стремясь частично удовлетворить условиям (1.4), найдем

$$w(x) = e^{-i\nu x}\left[j\frac{g}{\sigma} r_0 (1 - ij) + A^1 + iA_2 + \int\limits_{+\infty}^{x} \frac{df}{dx} e^{i\nu x}\, dx \right] \tag{3.1}$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования.

Из формулы (3.1) получаем, что на далеких расстояниях от контура L волновое движение определяется функциями

$$\begin{aligned} w(x) &= \left[j\frac{g}{\sigma} r_0 (1 - tj) + A_1 + iA_2 \right] e^{-i\nu x} \qquad \text{при } x \to +\infty \\ w(x) &= \left[j\frac{g}{\sigma} r_0 (1 - ij) + B_1 + iB_2 \right] e^{-i\nu x} \qquad \text{при } x \to -\infty \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$B_1 + iB_2 = A_1 + iA_2 + \int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{df}{dx} e^{i\nu x}\, dx$$

В этой формуле путь интегрирования проходит по кривой, соединяющей точки $x = +\infty$ и $x = -\infty$ и расположенной в нижней полуплоскости ниже контура L.

Легко поэтому видеть, что указанный путь интегрирования можно заменить контуром C, охватывающим контур $L + \bar{L}$ и обходимым по ходу часовой стрелки:

$$B_1 + iB_2 = A_1 + iA_2 + \int\limits_{C} \frac{df}{dx} e^{i\nu x}\, dx$$

Заменив здесь функцию f разложением (2.14) и полагая затем $\tau = \zeta^{-1}$, будем иметь следующее выражение:

$$B_1 + B_2 = A_2 + iA_2 - a_0 \int\limits_{K} e^{i\nu x} \frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{n-1}^{\infty} n a_n \int\limits_{K} \zeta^{n-1} e^{i\nu x} d\zeta$$

Здесь K — замкнутый контур, содержащий точку $\zeta = 0$ и обходимый против хода часовой стрелки.

Введем обозначение

$$D_n = D_n^{(1)} + iD_n^{(2)} = \int\limits_{K} \zeta^{n-1} e^{i\nu x}\, d\zeta \tag{3.3}$$

Тогда предыдущее равенство примет вид:

$$B_1 + iB_2 = A_1 + iA_2 - a_0 (D_0^{(1)} + iD_0^{(2)}) + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (D_n^{(1)} + iD_n^{(2)}) \tag{3.4}$$

Отделяя в (3.2) действительную часть, убеждаемся, что для полного удовлетворения условий (1.4) следует положить

$$\begin{aligned} A_1 &= jA_2 = B_+ \\ B_1 &= -jB_2 = B_- \end{aligned} \tag{3.5}$$

Следовательно, заменив в (3.4) i на j и затем на $-j$, получаем выражение для B_+ и B_-:

$$B_+ = \frac{1}{2}\left[a_0\left(D_0^{(1)} + jD_0^{(2)}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n\left(D_n^{(1)} + jD_n^{(2)}\right)\right]$$
$$B_- = -\frac{1}{2}\left[a_0\left(D_0^{(1)} - jD_0^{(2)}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n\left(D_n^{(1)} - jD_n^{(2)}\right)\right] \qquad (3.6)$$

Эти формулы позволяют вычислить B_+ и B_-, если, кроме a_n, известны также D_n. Для вычисления последних рассмотрим плавные контуры, для которых согласно (2.25) отображающая функция имеет вид:

$$x = k_0\tau + k_1\tau^{-1} + k_2\tau^{-3} = k_1\zeta + \frac{k_0}{\zeta} + k_2\zeta^3$$

Подставим это выражение в (3.3) и затем положим

$$\zeta = \left(\frac{k_0}{k_1}\right)^{1/2} t = \left(-\frac{1}{p}\right)^{1/2} t$$

В результате будем иметь

$$D_n = \left(-\frac{1}{p}\right)^{1/2 n} \int_{K'} t^{n-1} \exp\left[\frac{i\mu}{2}\left(t + \frac{1}{t} + \gamma t^3\right)\right] dt$$

где

$$\mu = 2\nu\sqrt{k_0k_1} = 2\nu k_0(-p)^{1/2}, \qquad \gamma = \frac{k_0k_2}{k_1^2} = qp^{-2} \qquad (3.7)$$

Разлагая далее $\exp\left[\frac{1}{2}i\mu\gamma t^3\right]$ в ряд по степеням t, найдем

$$D_n = \left(-\frac{1}{p}\right)^{1/2 n} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\gamma}{2}\right)^k \frac{i^k}{k!} \int_{K'} t^{n+3k-1} \exp\left[\frac{i\mu}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] dt$$

Интегральные слагаемые в этой форме легко определяются через функции Бесселя, и окончательно получаем следующее выражение:

$$D_n = 2\pi\left(-\frac{1}{p}\right)^{1/2 n} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mu\gamma}{2}\right)^k \frac{i^{n+4k+1}}{k!} J_{n+3k}(\mu) \qquad (3.8)$$

Отметим некоторые частные случаи. Прежде всего при $T/a \to 1$ $(p \to 0)$ выражение (3.8) принимает вид:

$$D_n = 2\pi i\left(\frac{i\mu_0}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i^4\mu_0^4 q}{2^4}\right)^k \left(\frac{1}{k!\,(n+3k)!}\right) \qquad \left(\mu_0 = 2\nu k_0 = \frac{2\nu T}{1+q}\right) \qquad (3.9)$$

Далее, рассматривая случай эллиптического контура и полагая в (3.8) $q = 0$ $(\gamma = 0)$, получаем

$$D_n = 2\pi i^{n+1}\left(\frac{a+T}{a-T}\right)^{1/2 n} J_n\left(\nu\sqrt{a^2 - T^2}\right) \qquad \text{при } a > T \qquad (3.10)$$

$$D_n = 2\pi i^{n+1}\left(\frac{a+T}{T-a}\right)^{1/2 n} I_n\left(\nu\sqrt{T^2 - a^2}\right) \qquad \text{при } a < T \qquad (3.11)$$

В частности, при $T = a$ имеем

$$D_n = 2\pi i^{n+1} \frac{(\nu T)^n}{n!} \tag{3.12}$$

что также вытекает из более общей формулы (3.9).

Наконец, отметим, что для эллиптического контура формулам (3.6) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} B_+ &= \pi j a_0 J_0 (\nu \sqrt{a^2 - T^2}) - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \left(\frac{a+T}{a-T}\right)^{1/2 n} j^{n+1} J_n (\nu \sqrt{a^2 - T^2}) \\ B_- &= \pi j a_0 J_0 (\nu \sqrt{a^2 - T^2}) + \pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \left(\frac{a+T}{a-T}\right)^{1/2 n} (-j)^{n+1} J_n (\nu \sqrt{a^2 - T^2}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

в котором при $T > a$ и $T = a$ нужно произвести замену согласно (3.11) и (3.12).

Перейдем теперь к определению постоянных r_1, φ_1 и ψ_1, от которых линейно зависят коэффициенты a_n и, следовательно, B_+ и B_-. Положим $\eta = 0$ в выражении (2.15) для r, тогда получим следующее уравнение:

$$r_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{3.14}$$

Далее, положив в (3.1) $x = a$, затем заменив функцию f разложением (2.14) и отделив действительную и мнимую части, получим уравнения для φ_1 и ψ_1:

$$\varphi_1 = \left(j \frac{g}{\sigma} r_0 + A_+\right) e^{-j\nu a} + a_0 P_0 - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n P_n \tag{3.15}$$

$$\psi_1 = \left(\frac{g}{\sigma} r_0 - jB_-\right) e^{-j\nu a} + a_0 Q_0 - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n Q_n \tag{3.16}$$

где

$$P_n + iQ_n = e^{-i\nu a} \int_{+\infty}^{1} e^{i\nu x(\tau)} \tau^{-n-1} d\tau = -e^{-i\nu a} \int_{0}^{1} \zeta^{n-1} e^{i\nu x(\zeta)} d\zeta \tag{3.17}$$

Для вычисления функций P_n и Q_n прежде всего установим рекуррентное соотношение. Рассматривая класс контуров плавных очертаний и интегрируя в (3.17) по частям, находим

$$k_1 (P_{n+1} + iQ_{n+1}) + 3k_2 (P_{n+3} + iQ_{n+3}) - k_0 (P_{n-1} + iQ_{n-1}) + \\ + \frac{n}{i\nu} (P_n + iQ_n) = \frac{i}{\nu} \tag{3.18}$$

Отсюда все функции P_n и Q_n выражаются через эти же функции со значками $n = 0, 1, 2, 3$. В частности, для эллиптического контура ($k_2 = 0$) функции P_n и Q_n выражаются только через P_0, Q_0, P_1 и Q_1, причем при $T = 0$ эти функции выражаются через функции Ганкеля.

Имеем

$$P_0 + iQ_0 = -\frac{\pi}{2} i e^{-i\lambda} H_0^{(1)}(\lambda), \qquad P_1 + iQ_1 = \frac{\pi}{2} e^{-i\lambda} H_1^{(1)}(\lambda) + \frac{i}{\lambda} \qquad (\lambda = \nu a) \tag{3.19}$$

Наиболее простые выражения функций P_n и Q_n получаем для контура, имеющего форму полуокружности. В этом случае $x(\tau) = a\tau$ и, следовательно,

$$P_n + iQ_n = \lambda^n e^{-i\lambda} \int\limits_{+\infty}^{\lambda} \frac{e^{it}\,dt}{t^{n+1}}$$

Соответствующее рекуррентное соотношение имеет вид:

$$P_n + iQ_n = \frac{i\lambda}{n}\,(P_{n-1} + i\,Q_{n-1}) - \frac{1}{n}$$

Отсюда все P_n и Q_n выражаются только через P_0 и Q_0. Последние же выражаются через интегральный синус и косинус

$$P_0 + iQ_0 = e^{-i\lambda}\,(ci\lambda + isi\lambda)$$

Поэтому

$$P_n + iQ_n =$$

$$= -\frac{1}{n} - \frac{i\lambda}{n\,(n-1)} - \frac{(i\lambda)^2}{n\,(n-1)\,(n-2)} - \cdots + \frac{(i\lambda)^n}{n!}\,e^{-i\lambda}\,(ci\lambda + isi\lambda) \quad (3.20)$$

Вернемся к системе уравнений (3.14) — (3.16). Коэффициенты a_n и, следовательно, B_+ и B_- линейно зависят от νr_1, $\nu\varphi_1$ и $\nu\psi_1$. Поэтому определитель $\Delta(\nu)$ системы (3.14) — (3.16) относительно неизвестных r_1, φ_1 и ψ_1 при $\nu = 0$ равен единице. Так как $\Delta(\nu)$ есть непрерывная функция от $\nu \geqslant 0$, то $\Delta(\nu) > 0$ при достаточно малых ν. Следовательно, при малых ν величины r_1, φ_1 и ψ_1 определяются единственным способом.

4. Выведем теперь общие формулы для вычисления гидродинамических сил. Прежде всего для давления в любой точке жидкости имеем

$$p = -\rho j\sigma\varphi\,(y, z)\,e^{j\sigma t}$$

Здесь не учтено гидростатическое давление, результирующая и момент которого легко вычисляются.

Обозначим через Y, Z и M_x проекции гидродинамических сил и их момент, действующие на контур L; тогда для них имеем

$$Y = -\int\limits_L p\cos(n, y)\,dl, \qquad Z = -\int\limits_L p\cos(n, z)\,dl$$

$$M_x = -\int\limits_L p\,(y\cos(n, z) - z\cos(n, y))\,dl$$

или же

$$Y = -\rho j\,\frac{g}{\sigma}\,e^{j\sigma t}\int\limits_L \nu\varphi\,dz, \qquad Z = \rho j\,\frac{g}{\sigma}\,e^{j\sigma t}\int\limits_L \nu\varphi\,dy$$

$$M_x = \rho j\,\frac{g}{\sigma}\,e^{j\sigma t}\int\limits_L \nu\varphi\,(y\,dy + z\,dz)$$

Для дальнейшего вычисления воспользуемся соотношениями, вытекающими из (2.5)

$$\nu\,\frac{dz}{dl}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial l} - \nu\,\frac{dy}{dl}\,\psi - \frac{\partial r}{\partial l}, \qquad \nu\,\frac{dy}{dl}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \nu\,\frac{dz}{dl}\,\psi - \frac{\partial r}{\partial n}$$

Поэтому предыдущие формулы принимают вид:

$$Y = -\rho j \frac{g}{\sigma} e^{j\sigma t} \int_L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} - \nu \frac{dy}{dl} \psi - \frac{\partial r}{\partial l} \right) dl$$

$$Z = \rho j \frac{g}{\sigma} e^{j\sigma t} \int_L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \nu \frac{dz}{dl} \psi - \frac{\partial r}{\partial n} \right) dl \tag{4.1}$$

$$M_x = \rho j \frac{g}{\sigma} e^{j\sigma t} \int_L \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} z + \frac{d\varphi}{\partial n} y - \nu \left(z \frac{dy}{dl} - \frac{dz}{dl} y \right) \psi - \left(\frac{\partial r}{\partial l} z + \frac{\partial r}{\partial n} y \right) \right] dl$$

Проведем вначале вычисление вертикальной составляющей гидродинамических сил. На основании условия (2.4) имеем

$$\int_L \frac{\partial r}{\partial n} dl = \frac{1}{2} \int_{L+\overline{L}} \frac{\partial r}{\partial n} dl = -\frac{1}{2i} \int_{L+\overline{L}} df$$

причем интегрирование проводится по ходу часовой стрелки.

Воспользовавшись далее выражением (2.14) и теоремой о вычетах, находим

$$\int_L \frac{\partial r}{\partial n} dl = \pi a_0$$

и, следовательно,

$$Z = \rho j \frac{g}{\sigma} e^{j\sigma t} \left[\int_L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \nu \frac{dz}{dl} \psi \right) dl - \pi a_0 \right] \tag{4.2}$$

Интегральное слагаемое в формуле (4.2) также легко вычисляется. В самом деле, в точках контура L имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_2 \cos(n, y) + v_3 \cos(n, z) + v_4 (y \cos(n, z) - z \cos(n, y)) =$$
$$= -v_2 \frac{dz}{dl} + v_3 \frac{dy}{dl} + v_4 \left(y \frac{dy}{dl} + z \frac{dz}{dl} \right) \tag{4.3}$$
$$\psi = \psi_1 - \int_0^l \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \psi_1 + v_2 z - v_3 (y - a) - \frac{v_4}{2} (y^2 - a^2 + z^2)$$

Здесь v_2, v_3 и v_4 — комплексные по j амплитуды поступательных и угловых скоростей.

Подставляя (4.3) в (4.2), находим простую формулу

$$Z = -\rho j \frac{g}{\sigma} e^{j\sigma t} (\pi a_0 + b v_3 + \nu S v_3) \tag{4.4}$$

где $b = 2a$ — ширина контура L по ватерлинии, а S — площадь, ограниченная этим контуром.

Теперь приступим к вычислению Y. Произведя интегрирование с учетом (4.3), будем иметь

$$Y = -\rho j \frac{g}{\sigma} e^{j\sigma t} (\varphi_{-1} - \varphi_1 + r_1 - r_{-1}) + \rho j \sigma e^{j\sigma t} \Big[S v_2 - a b v_3 +$$
$$+ \left(hS - \frac{2}{3} a^3 \right) v_4 - \psi_1 b \Big] \tag{4.5}$$

где φ_{-1} и r_{-1} — значения функций φ и r в точке $y = -a$ и $z = 0$, а h —

глубина погружения центра тяжести площади. Величина r_{-1} легко определяется. Полагая $\eta = -\pi$ в выражении (2.15) для r, получаем

$$r_{-1} = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$$

Поэтому

$$r_1 - r_{-1} = 2(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) \tag{4.6}$$

Значение же функции φ в точке $y = -a$ и $z = 0$ определяется при помощи величин, аналогичных функциям P_n

$$\varphi_{-1} = j\frac{g}{\sigma} r_0 e^{j\nu a} + B_- e^{-j\nu a} + a_0 P_0' - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n P_n' \tag{4.7}$$

где

$$P_n' + iQ_n' = e^{i\nu a} \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{i\nu x(\tau)}}{\tau^{n+1}} d\tau \tag{4.8}$$

Подобным путем вычисляется момент гидродинамических сил, выражение которого представим в преобразованном виде:

$$M_x = \frac{1}{\nu} Y + \rho j \frac{g}{\sigma} e^{j\sigma t} \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{L+\overline{L}} \overline{x}\, df + M_0$$

где

$$M_0 = \rho j \frac{g}{\sigma} e^{j\sigma t} \int_L \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \nu z \frac{dy}{dl} \psi + \nu \frac{dz}{dl} y\psi \right) dl$$

Для класса контуров плавных очертаний имеем

$$\overline{x} = y - iz = k_0\overline{\tau} + k_1\overline{\tau}^{-1} + k_2\overline{\tau}^{-3}$$

и так как на единичной окружности $\overline{\tau} = \tau^{-1}$, то $\overline{x} = k_0\tau^{-1} + k_1\tau + k_2\tau^3$.

Воспользовавшись этим выражением, а также (2.14), найдем

$$M_x = \frac{1}{\nu} Y + \pi\rho j \frac{g}{\sigma} e^{j\sigma t} (k_1 a_1 + 3k_2 a_3) + M_0 \tag{4.9}$$

причем на основании (4.3) значение M_0 определяется из формулы

$$M_0 = \rho j \frac{g}{\sigma} e^{j\sigma t} \Big[S(1 + 3\nu h) v_2 - 2\nu a S v_3 + \Big(2\nu I_y + 2\nu I_z - \nu a^2 S + hS - \frac{2a^3}{3} \Big) v_4 - 2\nu\psi_1 S \Big] \tag{4.10}$$

Здесь I_y и I_z представляют собой моменты инерции площади S относительно осей y и z.

Поступила 25 XI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Плоская задача о колебаниях пластинки на поверхности тяжелой жидкости. Известия АН СССР, ОТН, № 7—8, 1942.
2. Хаскинд М. Д. Давление волн на заграждение. Инженерный сборник, т. IV, вып. 2, 1948.
3. Седов Л. И. Плоская задача о глиссировании по поверхности тяжелой жидкости. Труды конференции по теории волнового сопротивления, ЦАГИ, 1937.