Институт механики Академии наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН ПРИ ПЕРЕХОДЕ ИЗ НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЫ В ДВИЖУЩУЮСЯ

С. С. Войт

(Москва)

Задача об отражении и преломлении сферических волн при переходе из одной среды в другую рассматривалась многими авторами: Зоммерфельдом, Оттом, В. А. Фоком, Л. М. Бреховских и др.

Наиболее полный анализ решения этой задачи дан в работах Л. М. Бреховских; подробная библиография по этому вопросу имеется в его статье [1].

В настоящей работе рассматривается задача об отражении и преломлении сферических звуковых волн при переходе из неподвижной жидкой среды в движущуюся жидкую среду с другими свойствами. Полученное решение исследуется методами асимптотических разложений.

§ 1. Пусть имеются два полупространства, заполненные жидкостями и разделенные горизонтальной плоскостью, которая принимается за плоскость xy прямоугольной системы координат. Ось z направлена вверх. Верхняя и нижняя среды характеризуются соответственно плотностями ρ, ρ_1 и скоростями распространения звука в этих средах c, c_1. Верхняя среда покоится, а нижняя движется со скоростью U в направлении оси x. В точке $z=h$ в верхней среде находится источник гармонических звуковых волн частоты σ. Задача состоит в изучении акустического поля этого источника.

Введем потенциалы скоростей звуковых волн для верхней и нижней сред соответственно $\Phi(x, y, z, t)$ и $\Phi_1(x, y, z, t)$.

Как известно, эти потенциалы должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=c^2\Delta\Phi$$
$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}+2U\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t\,\partial x}+U^2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}=c_1^2\Delta\Phi_1 \tag{1.1}$$

Первое граничное условие при $z=0$ получается из требования общей границы раздела между жидкостями.

Пусть уравнение поверхности раздела

$$z=\zeta(x, y, t)$$

Считая скорости звуковых движений малыми, получим для составляющих скорости по оси z для верхней и нижней сред соответственно

$$w=\frac{\partial\zeta}{\partial t},\qquad w_1=\frac{\partial\zeta}{dt}+U\frac{\partial\zeta}{\partial x} \tag{1.2}$$

Исключая из этой системы ζ и вводя потенциалы скоростей звуковых волн, получим

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t\, \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial z} + U \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial z} \tag{1.3}$$

Второе граничное условие получается из непрерывности давления на границе раздела. Вводим, как обычно, коэффициенты уплотнения s и s_1 в уравнения движения и уравнения неразрывности, получаем для верхней и нижней сред соответственно

$$s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad s_1 = \frac{1}{c_1^2} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right] \tag{1.4}$$

Пользуясь тем, что давление и плотность жидкости связаны соотношением $p = p_0 + \rho_0 c^2 s$, получим, приравнивая давление сверху и снизу на границе раздела жидкостей

$$\rho_1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right] = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{1.5}$$

Полагая теперь

$$\Phi(x, y, z, t) = e^{-i\sigma t} \varphi(x, y, z), \qquad \Phi_1(x, y, z, t) = e^{-i\sigma t} \varphi_1(x, y, z) \tag{1.6}$$

получим для функций φ и φ_1 уравнения

$$\triangle \varphi + k^2 \varphi = 0 \qquad \left(\frac{\sigma}{c} = k \right) \tag{1.7}$$

$$\triangle \varphi_1 + k_1^2 \varphi_1 + 2i\beta k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0 \qquad \left(\frac{\sigma}{c_1} = k_1, \quad \frac{U}{c_1} = \beta \right) \tag{1.8}$$

и граничные условия

$$\left.\begin{aligned} & k_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + i\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} \\ & m \left(k_1 \varphi_1 + i\beta \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) = k_1 \varphi \qquad (m = \rho_1 / \rho) \end{aligned}\right\} \quad \text{при } z = 0 \tag{1.9}$$

Задача заключается, таким образом, в решении уравнений (1.7) и (1.8) при граничных условиях (1.9). Потенциал в верхней среде будет слагаться из потенциала прямой и отраженной волн, а потенциал нижней среды представляет преломленные волны.

Частные решения для потенциала отраженных и преломленных волн можно взять соответственно в виде

$$\varphi_r = A(q, \theta) \exp\left[-\sqrt{q^2 - k^2}\, z + iq(x \cos\theta + y \sin\theta)\right] \tag{1.10}$$

$$\varphi_1 = B(q, \theta) \exp\left[\sqrt{q^2 - (k_1 - \beta q \cos\theta)^2}\, z + iq(x \cos\theta + y \sin\theta)\right] \tag{1.11}$$

где q и θ произвольны так же, как и вид функций $A(q, \theta)$ и $B(q, \theta)$.

Воспользуемся интегральным представлением потенциала источника (т. е. прямой волны) в виде [2] (стр. 457, 34)

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{q\,dq}{\sqrt{q^2 - k^2}} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[iq(x \cos\theta + y \sin\theta) - (h - z)\sqrt{q^2 - k^2}\right] d\theta \tag{1.12}$$

и будем отыскивать потенциал отраженных и преломленных волн наподобие потенциала прямых волн, интегрируя частные решения (1.10) и (1.11) по q и θ.

Окончательный вид функций $A(q, \theta)$ и $B(q, \theta)$ определится из граничных условий. После всех вычислений получаем

$$\varphi_r = \frac{k}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{q\,dq}{\sqrt{q^2-1}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{m\sqrt{q^2-1}\,(n-\beta q\cos\theta)^2 - n^2\sqrt{q^2-(n-\beta q\cos\theta)^2}}{m\sqrt{q^2-1}\,(n-\beta q\cos\theta)^2 + n^2\sqrt{q^2-(n-\beta q\cos\theta)^2}} \times$$

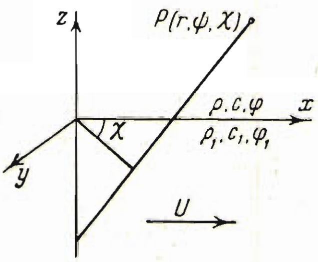
$$\times \exp\{k\,[iq\,(x\cos\theta + y\sin\theta) - (h+z)\sqrt{q^2-1}]\}\,d\theta \tag{1.13}$$

$$\varphi_1 = \frac{k_1}{\pi}\int\limits_0^\infty q\,dq \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{n-\beta q\cos\theta}{m\sqrt{q^2-1}\,(n-\beta q\cos\theta)^2 + n^2\sqrt{q^2-(n-\beta q\cos\theta)^2}} \times$$

$$\times \exp\{k\,[iq\,(x\cos\theta + y\sin\theta) - h\sqrt{q^2-1} + \sqrt{q^2-(n-\beta q\cos\theta)^2}\,z]\}\,d\theta \tag{1.14}$$

где $n = k_1/k$. Полное выражение потенциала в верхней среде получится при сложении правых частей (1.12) и (1.13).

§ 2. Для выяснения некоторых особенностей изучаемого явления воспользуемся асимптотическим исследованием решения в виде (1.13) и (1.14).



Фиг. 1

Начнем с анализа отраженных волн. Введем сферическую систему координат с началом в точке, совпадающей с «мнимым источником», т. е. зеркальным отображением действительного источника (фиг. 1) в плоскости $z=0$. Для этого положим

$$\begin{aligned} x &= r\cos\psi\cos\chi \\ y &= r\cos\psi\sin\chi \\ h+z &= r\sin\psi \end{aligned} \tag{2.1}$$

Из условий получения выражения (1.12) следует брать ту ветвь $\sqrt{q^2-1}$, для которой при больших q корень положителен. Особая точка обходится под осью q, откуда следует, что при $q<1$ корень $\sqrt{q^2-1} = -i\sqrt{1-q^2}$.

Точно так же $\sqrt{q^2-(n-\beta q\cos\theta)^2} = -i\sqrt{(n-\beta q\cos\theta)^2 - q^2}$ при $q < n/(1+\beta\cos\theta)$.

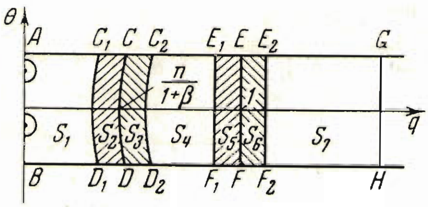
Воспользуемся формулой для асимптотической оценки двойных интегралов [3,4] при больших r

$$\iint\limits_S F(q,\theta)\,e^{irw(q,\theta)}\,dq\,d\theta = \frac{i}{r}\Big[\pm\frac{2\pi}{\sqrt{(w_{qq}w_{\theta\theta}-w_{q\theta}^{2})_{00}}}\,F(q_0,\theta_0)\,e^{irw(q_0,\theta_0)} -$$

$$-\oint\limits_\Gamma \frac{F(q,\theta)\exp[irw(q,\theta)]}{|\operatorname{grad} w|^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial q}\,d\theta - \frac{\partial w}{\partial\theta}\,dq\Big)\Big] + \frac{1}{r}\,O\Big(\frac{1}{r}\Big) \tag{2.2}$$

где q_0, η_0 — точка внутри контура, в которой функция достигает минимума или максимума (в первом случае следует взять верхний знак, а во втором — нижний). Индексы 00 указывают на то, что значение берется в точке q_0, θ_0. Контур Γ заключает область интегрирования S. Формула (2.2) получена в предположении, что в области интегрирования функции $F(q,\theta)$ и $w(q,\theta)$ непрерывны вместе со своими производными первая до второго и вторая до четвертого порядка. Производные функции $F(q, \theta)$

и $w(q, \theta)$ становятся разрывными на прямой EF и на кривой CD (фиг. 2), на которых обращаются в нуль соответственно $\sqrt{q^2-1}$ и $\sqrt{q^2-(n-\beta q\cos\theta)^2}$. Вырежем малые области, заключающие эти линии[1], тогда к областям ABD_1C_1 и $C_2D_2F_1E_1$ применима формула (2.2). Для нахождения точек максимума или минимума функции $w(q, \theta)$ исследуем систему уравнений (при этом из исследования исключим углы ψ, близкие к 0)



Фиг. 2

$$q\sin\psi-\sqrt{1-q^2}\cos\psi\cos(\theta-\chi)=0,$$
$$q\cos\psi\sin(\theta-\chi)=0$$

Получаем, что она удовлетворяется в точках с координатами

$$q=\cos\psi,\qquad \theta=\chi\qquad \text{при}\ \psi<\tfrac{1}{2}\pi \tag{2.3}$$

$$q=-\cos\psi,\qquad \theta=-\pi+\chi\qquad \text{при}\ \psi>\tfrac{1}{2}\pi \tag{2.4}$$

а также в точках с координатами

$$q=0,\quad \theta=\chi\pm\tfrac{1}{2}\pi \tag{2.5}$$

Экстремальная точка (2.3) лежит внутри области S_1 или S_4 (фиг. 2), если предположим, что угол ψ не близок к углу $\psi_0=\arccos n$. Применяя формулу (2.2) к оценке интегралов по этим двум областям и производя вычисления, получаем, что часть интеграла, определяемая экстремальной точкой (2.3), имеет вид:

$$\psi_r=\frac{m(n-\beta\cos\psi\cos\chi)^2\sin\psi-n^2\sqrt{(n-\beta\cos\psi\cos\chi)^2-\cos^2\psi}}{m(n-\beta\cos\psi\cos\chi)^2\sin\psi+n^2\sqrt{(n-\beta\cos\psi\cos\chi)^2-\cos^2\psi}}\,\frac{\exp(ikr)}{r} \tag{2.6}$$

К этому выражению следует, согласно формуле (2.2), прибавить еще интегралы по контурам области S_1 и S_4. Точки (2.5) окружим малыми полукругами и примем за область интегрирования S_1 прямоугольник ABD_1C_1 с двумя вырезами около точек (2.5), затем перейдем к пределу, устремляя радиус этих полукругов к нулю. При этом легко видеть, что интегралы по полуокружностям исчезают, так как в них подинтегральные функции остаются ограниченными, а путь интегрирования бесконечно убывает. Тем же способом, как в[3], показывается, что порядок остаточного члена в (2.2) при переходе к пределу не возрастает. На прямолинейной части пути AB интеграл исчезает, так как подинтегральная функция здесь обращается в нуль. Интегралы по путям C_1A и E_1C_2 взаимно уничтожатся соответственно с интегралами по путям BD_1 и D_2F_1, так как подинтегральная функция при угле $\theta=\pi$ и $\theta=-\pi$ одинакова, а интегрирование по q ведется в этих интегралах в обратных направлениях. Остаются интегралы по путям D_1C_1, C_2D_2 и F_1E_1.

Переходим теперь к оценке интеграла по области S_7. В этой области $\operatorname{grad} w\neq 0$, поэтому можно, применяя теорему Грина, получить оценку.

[1] Для определенности рассматриваем случай $n<1$.

Если

$$I = \iint\limits_S F(\alpha, \beta)\, e^{rw(\alpha, \beta)}\, d\alpha\, d\beta \tag{2.7}$$

то

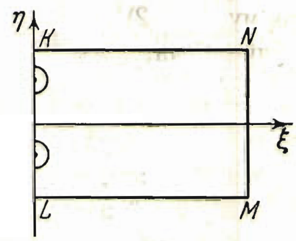
$$I = \frac{1}{r} \int\limits_\Gamma \frac{F(\alpha, \beta)}{|\operatorname{grad} w|^2} e^{rw(\alpha, \beta)} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} d\beta - \frac{\partial w}{\partial \beta} d\alpha \right) + \frac{1}{r} O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{2.8}$$

где $w(\alpha, \beta)$ может быть и комплексным. Двойной интеграл по области S_7 сведется к интегралу по контуру этой области. Как и раньше, интегралы по путям GE_2 и F_2H взаимно уничтожатся. Интеграл по пути HG содержит затухающий с ростом q по показательному закону множитель и поэтому исчезает, если этот путь удаляется в бесконечность вдоль оси q и тем самым получается значение интеграла по полубесконечной полосе (при таком переходе к пределу остаточный член в (2.8) ограничен). Остается только интеграл по прямой E_2F_2.

Теперь перейдем к оценке интегралов по заштрихованным областям. Так как в произведенной ранее асимптотической оценке удерживались только члены порядка малости r^{-1}, то достаточно будет показать, что интегралы по заштрихованным областям имеют порядок малости по r больший, чем r^{-1}. Рассмотрим, например, интеграл по области S_2, причем за кривую C_1D_1 возьмем такую кривую, на которой $\sqrt{(n-\beta q\cos\theta)^2-q^2} = a$, где a — некоторое малое число. Произведем в интеграле замену переменных интегрирования, положив

$$\xi = \sqrt{(n-\beta q\cos\theta)^2 - q^2}, \qquad \eta = \theta \tag{2.9}$$

Можно убедиться в том, что при выполнении условия о малости a (достаточно, чтобы выполнялось условие $a < n$) преобразование (2.9) дает взаимно однозначное соответствие между областью S_2 в плоскости q, θ и соответствующей областью Σ_2 в плоскости ξ, η. Причем



Фиг. 3

область Σ_2 представляет собой прямоугольник, изображенный на чертеже (фиг. 3). В этой области как $F(\xi, \eta)$, так и $w(\xi, \eta)$ непрерывны вместе со своими производными. Вычисляя определитель преобразования, получим

$$dq\, d\theta = -\frac{\xi}{\sqrt{n^2 - \xi^2(1-\beta^2\cos^2\eta)}}\, d\xi\, d\eta \tag{2.10}$$

и поэтому в преобразованную подинтегральную функцию ξ будет входить множителем. Величина q выражается через ξ и η следующим образом:

$$q = \frac{-\beta n\cos\eta + \sqrt{n^2 - \xi^2(1-\beta^2\cos^2\eta)}}{1-\beta^2\cos^2\eta} \tag{2.11}$$

Исследуем вопрос о экстремальных точках функции $w(\xi, \eta)$ в области Σ_2. Для этого приходится исследовать систему

$$\frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \tag{2.12}$$

где переменные q, θ меняются в области S_2. Так как в этой области $\operatorname{grad} w \neq 0$, то система (2.12) может иметь решение только в том случае, если $\partial q / \partial \xi = 0$. Но

$$\frac{\partial q}{\partial \xi} = \frac{-\xi}{\sqrt{n^2 - \xi^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \eta)}} \tag{2.13}$$

а следовательно, обращается в нуль только при $\xi = 0$, т. е. на границе области Σ_2. Заметив это, применим теорему Грина в виде (2.8) к интегралу по области Σ_2 за вычетом полукругов малого радиуса вокруг тех точек, для которых удовлетворяется система (2.12). Дальнейшие рассуждения почти дословно повторяют сказанное при оценке интеграла по области S_1. В интеграле по области S_5 производится замена переменных $\xi = \sqrt{1 - q^2}$, $\eta = \theta$ и также применяется теорема Грина. Оказывается, что здесь оценка производится еще проще, так как ни внутри соответствующей области, ни на ее границе $\operatorname{grad} w \neq 0$. Так же оцениваются и интегралы по областям S_3 и S_6.

Остались неоцененными лишь интегралы по линиям сопряжения областей S_1 и S_2, S_3 и S_4, S_4 и S_5, S_6 и S_7; их асимптотические значения при сложении интегралов по смежным областям должны взаимно уничтожиться, что следует из независимости асимптотического значения интеграла по всей полосе от выбора этих границ.

В результате произведенных оценок устанавливаем, что порядок r^{-1} имеет только выражение (2.6), а следовательно, для потенциала отраженных волн окончательную асимптотическую оценку с сохранением первого члена можно дать в виде (2.6). При $\beta = 0$ из (2.6) получается известная формула [1]. Если верхняя и нижняя среды одинаковы, то, несмотря на это, коэффициент отражения не равен нулю, а следовательно, часть звуковой энергии в этом случае будет отражаться. Если $\chi = \frac{1}{2}\pi$, то для отраженных волн получаем то же выражение, что и при $\beta = 0$, т. е. в направлении, перпендикулярном скорости потока, коэффициент отражения из-за движения потока не меняется.

Исследование потенциала преломленных волн производится сложнее. Проведем для упрощения это исследование в плоскости $y = 0$. Область интегрирования разобьем на те же части, как и для отраженных волн. Введем полярную систему координат

$$x = r \cos \psi_1, \qquad -z + h = r \sin \psi_1 \tag{2.14}$$

Тогда получим часть интеграла по области S_1 в виде

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} F(q, \theta) \exp[ikrw(q, \theta)]\, dq\, d\theta \tag{2.15}$$

где

$$F(q, \theta) = \frac{ik_1}{\pi} \frac{q(n - \beta q \cos\theta) \exp[ikh(\sqrt{1 - q^2} - \sqrt{(n - \beta q \cos\theta)^2 - q^2})]}{m(n - \beta q \cos\theta)^2 \sqrt{1 - q^2} + n^2 \sqrt{(n - \beta q \cos\theta)^2 - q^2}}$$

$$w(q, \theta) = q \cos\psi_1 \cos\theta + \sin\psi_1 \sqrt{(n - \beta q \cos\theta)^2 - q^2} \tag{2.16}$$

Для определения точек максимума и минимума функции $w(q, \theta)$ внутри области S_1 приходится решать систему уравнений $\partial w / \partial q = 0$, $\partial w / \partial \theta = 0$, которая, согласно (2.16), имеет особое решение, когда $\operatorname{ctg} \psi = \beta$.

Углы, близкие к ψ_0, для которого $\operatorname{ctg} \psi_0 = \beta$, исключим из рассмотрения (решение $q = 0$, $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ несущественно, так же как и для отраженных волн).

Система в зависимости от угла ψ_1 имеет решение в виде

$$\theta_1 = 0, \qquad q_1 = \frac{n}{1-\beta^2} \frac{\cos\psi_1 - \beta\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi_1}}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi_1}}, \qquad \text{если} \quad 0 < \psi_1 < \psi_0$$

$$\theta_2 = \pi, \qquad q_2 = \frac{n}{1-\beta^2} \frac{\beta\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi_1} - \cos\psi_1}{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi_1}}, \qquad \text{если} \quad \psi_0 < \psi_1 < \pi$$

Точки, для которых $\theta = \pi$, лежат на границе S_1, но интегрирование по θ можно производить от $-\pi + \varepsilon$ до $\pi + \varepsilon$ и тем самым достигнуть того, чтобы эти точки лежали внутри области S_1.

Для того чтобы экстремальная точка не попадала в окрестность прямой EF (фиг. 2), следует исключить из рассмотрения те углы ψ_1, для которых значение q_n оказывается близким к единице.

Проводя все необходимые вычисления и показав затем, как и для потенциала отраженных волн, малость интегралов по другим частям области интегрирования, приходим окончательно к асимптотической оценке потенциала преломленных волн в виде

$$\varphi_1 = \frac{i}{r}\left[\frac{2\pi}{\sqrt{(w_{qq}w_{\theta\theta} - w_{q\theta}^2)_{nn}}} F(q_n, \theta_n) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{i\sigma\left[-\frac{\beta x}{c(1-\beta^2)} + \frac{1}{c(1-\beta^2)}\sqrt{x^2 + (1-\beta^2)z^2}\right]\right\}\right] + \frac{1}{r} O\left(\frac{1}{r}\right) \qquad (2.17)$$

где индексы nn означают, что значение берется в точке (q_1, θ_1) при $\psi < \psi_0$ и в точке (q_2, θ_2) при $\psi > \psi_0$.

Показательный множитель в выражении (2.17) имеет тот же вид, что и в потенциале источника в движущейся среде [4].

Однако функция $F(q_n, \theta_n)$ будет также содержать показательный множитель с мнимым показателем и поэтому будет давать сдвиг фазы.

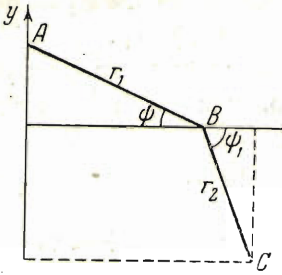
Если изучить линии равного потенциала, то они не будут «сдуваемыми» окружностями, как для потенциала источника в движущейся среде. Они не будут окружностями даже в случае отсутствия скорости у нижней среды.

Если $h \to 0$, то выражение (2.17) по фазе превращается в потенциал источника в движущейся среде.

§ 3. Исследование преломленных волн в случае, когда нижняя среда покоится, проведено в работе [1] методом перевала для однократных интегралов.

Применение метода перевала, обобщенного на двойные интегралы, облегчает эту часть исследования.

Для сравнения результатов с геометрической акустикой будем из точки «источника» перемещаться в точку, в которой изучается значение потенциала по пути ABC (фиг. 4), где углы ψ и ψ_1 связаны известным соотношением



Фиг. 4

$$n \cos\psi_1 = \cos\psi$$

Пользуясь тем, что

$$\begin{aligned} h &= r_1 \sin\psi \\ -z &= r_2 \sin\psi_1 \\ x &= r_1 \cos\psi + r_2 \cos\psi_1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

получим выражение потенциала в следующем виде

$$\varphi_1 = \frac{ik}{\pi}\int_0^\infty dq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{q}{m\sqrt{1-q^2}+\sqrt{n^2-q^2}} \exp\{ikr_1[q\cos\psi\cos\theta+\sin\psi\sqrt{1-q^2}]\} \times$$
$$\times \exp\{ikr_2[q\cos\psi_1\cos\theta+\sin\psi_1\sqrt{n^2-q^2}]\}\, d\theta \tag{3.2}$$

Асимптотический анализ этого выражения проведем для больших kr_1, а затем для больших kr_2. В первом случае, сохраняя члены порядка $(kr_1)^{-1}$, получим (3.3)

$$\varphi_1 = \frac{2}{r_1}\frac{\sin\psi}{m\sin\psi+\sqrt{n^2-\cos^2\psi}} \exp\{ik[r_1+r_2\cos\psi_1\cos\psi] - ikz\sqrt{n^2-\cos^2\psi}\}$$

Во втором случае, сохраняя члены порядка $(kr_2)^{-1}$, получим

$$\varphi_1 = \frac{2n}{r_2}\frac{\sin\psi_1}{n\sin\psi_1+m\sqrt{1-n^2\cos^2\psi_1}} \exp\{ik[r_2+r_1\cos\psi\cos\psi_1]\} \times$$
$$\times \exp[ikr_1\sin\psi\sqrt{1-n^2\cos^2\psi_1}] \tag{3.4}$$

В предположении малости ψ или ψ_1 получаются первые члены формул (76) или (79) работы Л. М. Бреховских [1].

В заключение приношу глубокую благодарность Л. Н. Сретенскому за ценные советы при выполнении настоящей работы.

Поступила 18 XI 1952

Морской гидрофизический институт Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Отражение и преломление сферических волн. Успехи физических наук, т. XXXVIII, вып. 1, 1949.
2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Изд. иностр. литературы, 1949.
3. Конторович М. Н., Муравьев Ю. К. Выводы законов отражения геометрической оптики на основе асимптотической трактовки задачи диффракции. ЖТФ, т. 22, вып. 3, 1952.
4. Войт С. С. Распространение волн от звучащего диска в двужущейся среде. ПММ, т. XVI, вып. 6, 1952.