Институт механики Академии наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОГО ГАЗА В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

В. С. Сорокин

(Молотов)

Известно, что плоский, неравномерно нагретый слой жидкости или газа в однородном поле тяжести может находиться в механическом равновесии, если градиент температуры параллелен силе тяжести и обеспечена стационарность теплового потока. Однако такое равновесие оказывается неустойчивым и возникает перемешивание (конвекция), если градиент температуры больше некоторого критического значения, зависящего от свойств газа и толщины слоя.

Значение этого критического градиента в общем случае до сих пор не было определено, так как уравнения гидродинамики с учетом сжимаемости и теплопроводности оказываются очень сложными. Исследование удается провести до конца только в двух предельных случаях.

Во-первых, задача может быть решена, если можно пренебречь изменением плотности, связанным с различием давлений на разных высотах по сравнению с тем изменением плотности, которое вызывается неодинаковостью температур. При разности высот z различие плотностей из-за сжимаемости будет порядка

$$\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial p_0}\right)_T \rho_0 g z \equiv \beta\rho_0 g z$$

(β — коэффициент расширения), в то время как разность температур ΔT вызовет изменение плотности

$$-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial T_0}\right)\Delta T \equiv \alpha\Delta T$$

В рассматриваемом случае

$$\beta g\rho_0 z \ll \alpha\Delta T \tag{1}$$

Исследования, начатые Релеем (см., например, [1], где указана дальнейшая литература), показали, что равновесие оказывается неустойчивым, если выполняется неравенство

$$\left(-\frac{dT_0}{dz}\right)\frac{\alpha g z^4}{\nu\varkappa} > C_0 \tag{2}$$

где ν и $\varkappa$ — кинематическая вязкость и температуропроводность, а C_0 — некоторая постоянная.

При этом имеется в виду неустойчивость относительно малых возмущений, так что при выполнении условия (2) случайный толчок вызывает незатухающее движение, более или менее сложное в зависимости от того, насколько левая часть неравенства больше правой. Если же условие (2) не выполняется, равновесие будет устойчивым.

Во-вторых, устойчивость может быть исследована, если можно пренебречь влиянием вязкости и теплопроводности. Этот случай может иметь место в толстых слоях (например, в атмосфере), когда может возникнуть движение большого масштаба. Насколько мне известно, для этого случая исследование устойчивости не было проведено в такой строгой форме, как в первом случае. Начиная со Шварцшильда [2], всегда приводится следующее, физически довольно убедительное рассуждение.

Будем рассматривать равновесие чисто механически, т. е. будем считать, что при смещении частиц газа их энтропия не меняется. Если масса газа с некоторого уровня z, где плотность была ρ_0, давление p_0 и энтропия на единицу массы s_0, поднимется в слой $z + dz$, то она, сохранив свою энтропию, окажется под давлением $p_0 + dp_0$ и, следовательно, получит плотность $\rho(p_0 + dp_0,\ s_0)$.

Если эта плотность окажется больше плотности окружающей среды $\rho(p_0 + dp_0,\ s_0 + ds)$, то поднявшаяся масса снова потонет. В противном случае она будет продолжать всплывать и равновесие окажется невозможным. Итак, условие устойчивости будет

$$\rho(p_0 + dp_0,\ s_0 + ds_0) < \rho(p_0 + dp_0,\ s_0)$$

или

$$\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial s_0}\right)_{p_0} \frac{ds_0}{dz} < 0 \tag{3}$$

Это простое и в общем правильное рассуждение не может, конечно, считаться строгим. Поднимающаяся масса не может подниматься, не вызывая смещения других масс, что в свою очередь вызовет изменение сил, действующих на смещенную массу. Поэтому можно возражать против правильности критерия (3). Еще существеннее то, что рассуждение Шварцшильда трудно сопоставить с более строгими методами, применяемыми в случае более тонких слоев, и устойчивость здесь понимается в несколько ином смысле. Чтобы отчасти устранить эти недостатки, здесь будет дан более строгий вывод критерия Шварцшильда (3) и будет сделана попытка сравнения этого критерия с критерием Релея (2).

Пусть над горизонтальной плоскостью находится слой газа (или жидкости, сжимаемость которой будет существенна). Условие равновесия

$$-\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{g} = 0 \tag{4}$$

причем через ρ_0 и p_0 обозначены (разные на разных высотах) плотность и давление, а через $\mathbf{g}$ — вектор напряженности поля тяжести, направленный вниз. Температура газа меняется с высотой. Вводя тепловую функцию w_0 и энтропию s_0 (все на единицу массы), получим

$$\nabla w_0 = \frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 + T \nabla s_0 \tag{5}$$

и так как $\mathbf{g}$ можно рассматривать как отрицательный градиент потенциала $\mathbf{g} = -\nabla \varphi_0$, то условие равновесия (4) можно записать в форме

$$\nabla (w_0 + \varphi_0) = T_0 \nabla s_0 \tag{6}$$

Для равновесия необходимо, чтобы градиент температуры был вертикален и чтобы теплопроводность отводила все поступающее в данный элемент объема тепло. Эти условия будем предполагать выполненными, так что $\nabla T_0 \| g$ и величина градиента будет считаться заданной функций вертикальной координаты z.

Обозначая внутреннюю энергию единицы массы через ε_0, напишем выражение для полной энергии газа:

$$E_0 = \int [\varepsilon_0 \rho_0 + \varphi_0 \rho_0]\, dV \tag{7}$$

Пусть теперь в результате какого-нибудь возмущения возникло адиабатическое смещение частиц газа $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$, разное в разных точках $\mathbf{r}$. Иначе говоря, пусть каждая частица газа, не меняя своей энтропии, смещается на $\boldsymbol{\xi}$, причем так, что эти частицы не получают начальной скорости. Энергия газа при этом изменится, и если обозначить измененные значения плотности, энтропии и т. д. в том же месте через $\rho_0 + \rho$, $s_0 + s$ и т. д., то новое значение энергии будет

$$E_0 + \Delta E = \int [\varepsilon_0 \rho_0 + \varepsilon_0 \rho + \varepsilon \rho_0 + \varepsilon \rho + \rho_0 \varphi_0 + \rho \varphi_0]\, dV \tag{8}$$

а изменение энергии при возмущении окажется равным

$$\Delta E = \int [\varepsilon_0 \rho + \varphi_0 \rho + \varepsilon \rho_0 + \varepsilon \rho]\, dV \tag{9}$$

(сила тяжести, а следовательно, и φ_0 считаются неизменными).

Если это изменение окажется положительным, то это будет означать, что рассматриваемое смещение само собой возникнуть не сможет, а если его вызовут внешние причины, то начнется движение, направленное к восстановлению равновесия, причем избыток энергии будет переходить в энергию кинетическую. Равновесие газа будет тогда механически устойчивым. Но если изменение энергии при каком-нибудь адиабатическом смещении окажется отрицательным, в газе сами собой смогут возникнуть движения, при которых внутренняя и гравитационная энергия будет переходить в кинетическую. Равновесие будет, очевидно, неустойчивым.

Таким образом, ясно, в каком смысле понимается здесь устойчивость. Метод наш в сущности равносилен методу Релея, так как и там и здесь исследуется развитие случайно возникшего возмущения. Как окажется, вытекающий из наших предпосылок критерий устойчивости совпадает с критерием Шварцшильда. Чтобы показать это, разложим подинтегральное выражение в формуле (9) по ρ и s до членов второго порядка. Пользуясь термодинамическими соотношениями, вычислим первые и вторые производные от энергии по ρ и s:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_{s_0} = \frac{p_0}{\rho_0^2}, \qquad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s}\right)_{\rho_0} = T_0 \\ \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2}\right)_{s_0} = -\frac{2p_0}{\rho_0^3} + \frac{c_0^2}{\rho_0^2} \\ \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho \partial s}\right)_0 = \frac{T_0}{\rho_0^2 c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho_0}, \qquad \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial s^2}\right)_{\rho_0} = \frac{T_0}{c_v}\end{gathered} \tag{10}$$

Через c_0 здесь обозначена скорость звука:

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s_0}$$

Тогда изменение энергии (9) с точностью до членов второго порядка по ρ и s будет

$$\Delta E = \int \Big\{ (w_0 + \varphi_0)\,\rho + \rho_0 T_0 s + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{c_0^2}{\rho_0}\rho^2 + 2T_0\left(1 + \frac{1}{\rho_0 c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho_0}\right)\rho s + \frac{T_0\rho_0}{c_v}s^2\right]\Big\}\,dv \tag{11}$$

Могло бы показаться, что линейная по ρ и s часть изменения энергии должна была бы обратиться в нуль (ведь невозмущенное состояние равновесное!). Однако это верно только, если под ρ и s понимать линейные по $\boldsymbol{\xi}$ части этих величин. Так как нам придется исследовать знак квадратичной части ΔE, а в нее войдут квадратичные по ξ части ρ и s из линейных членов выражения (11), нам придется сначала выразить изменения плотности и энтропии через смещение $\boldsymbol{\xi}$ до членов второго порядка. Чтобы сделать это, поступим следующим образом: энтропия единицы массы в точке $\mathbf{r}$, $s_0(\mathbf{r})$ переносится без изменения в точку $\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}$, где до смещения была энтропя $s_0(\mathbf{r} + \xi)$, а после смещения окажется энтропия $s_0(r + \xi) + s(r + \xi)$.

Так как энтропия смещающейся массы сохраняется, то

$$s_0(\mathbf{r}) = s_0(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) + s(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) \tag{12}$$

Разлагая правую часть по ξ, получим

$$0 = \boldsymbol{\xi}\nabla s_0 + \frac{1}{2}\xi_i\xi_k\frac{\partial^2 s_0}{\partial x_i \partial x_k} + s + \boldsymbol{\xi}\nabla s \tag{13}$$

Здесь применены тензорные обозначения x_1, x_2, $x_3 = x$, y, z и по дважды встречающимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3. В первом приближении отсюда получается

$$s = -\boldsymbol{\xi}\nabla s_0 \tag{14}$$

Для получения второго приближения это значение s подставляем в члены второго порядка правой части (13). Тогда с точностью до $\boldsymbol{\xi}^2$

$$s = -\boldsymbol{\xi}\nabla s_0 + \frac{1}{2}\left(\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\xi_k\frac{\partial s_0}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}\xi_i\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial s_0}{\partial x_k} \tag{15}$$

Точно таким же образом получается и изменение плотности. Условие неизменности массы смещающейся частицы дает

$$\rho_0(\mathbf{r}) = [\rho_0(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}) + \rho(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi})]\frac{\partial(\mathbf{r} + \xi)}{\partial(\mathbf{r})} \tag{16}$$

где введен якобиан

$$\frac{\partial(\mathbf{r} + \xi)}{\partial\mathbf{r}} \equiv \left|\delta_{ik} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right| = 1 + \nabla\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}\left\{(\nabla\boldsymbol{\xi}^2 - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right\} \tag{17}$$

Разлагая правую часть (16) по ξ, получим в первом приближении

$$\rho = -\nabla(\rho_0\boldsymbol{\xi}) \tag{18}$$

и, подставляя это в квадратичные члены выражений (16) и (17), во втором приближении

$$\rho = -\nabla(\rho_0 \xi) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_0 \xi_i \xi_k)\right] \tag{19}$$

При помощи полученных разложений можно выразить через ξ изменение энергии (11). В линейные по ρ и s слагаемые следует подставить изменения плотности и энтропии из (15) и (19), а в квадратичные, очевидно, достаточно подставить первые приближения (14) и (18). Таким образом, получится опять-таки с точностью до ξ^2

$$\Delta E = \Delta_1 E + \tfrac{1}{2}\Delta_2 E \tag{20}$$

где

$$\Delta_1 E = \int [(w_0 + \varphi_0)(-\nabla\rho_0\xi) - \rho_0 T_0 \xi \nabla s_0]\, dV \tag{21}$$

$$\Delta_2 E = \int \Big\{(w_0 + \varphi_0)\frac{\partial^2(\rho_0 \xi_i \xi_k)}{\partial x_i \partial x_k} + \rho_0 T_0 \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\xi_k \frac{\partial s_0}{\partial x_k}\right) +$$
$$+ \rho_0 T_0 \xi_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial s_0}{\partial x_k} + \frac{c_0^2}{\rho_0}(\nabla\rho_0\xi)^2 + 2\left[T_0 + \frac{T_0}{\rho_0 c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho_0}\right]\rho s + \frac{T_0 \rho_0}{c_v} s^2\Big\}\, dV \tag{22}$$

В этой формуле и дальше под ρ и s понимаются первые приближения (14) и (18).

Теперь уже линейные по ξ члены должны обратиться в нуль. Что это действительно так, станет ясным, если проинтегрировать выражение (21) по частям. Считая, что все возмущение происходит в конечной области, так что его можно окружить замкнутой поверхностью, на которой ξ исчезает, получим по теореме Остроградского-Гаусса

$$\Delta_1 E = \int \{\rho_0 \xi \nabla(w_0 + \varphi_0) - \rho_0 \xi T_0 \nabla s_0\}\, dV$$

а это равно нулю в силу уравнений равновесия (6).

Изменение энергии сводится к выражению (22), которое после простого, но довольно длинного интегрирования по частям по теореме Остроградского-Гаусса можно записать так:

$$\frac{1}{2}\Delta_2 E = \frac{1}{2}\int \left\{\frac{c_0^2}{\rho_0}\rho^2 + \frac{2T_0}{c_v \rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho_0}\rho s + \frac{T_0 \rho_0}{c_v}s^2 + \rho_0 s \xi \nabla T_0\right\} dV \tag{23}$$

[повторяем, что под ρ и s понимаются здесь выражения (14) и (18)].

О градиенте температуры до сих пор не делалось никаких предположений. В действительности же из (5) и (4) вытекает, что

$$\nabla T_0 \times \nabla s_0 = 0 \tag{24}$$

т. е. что градиенты температуры и энтропии параллельны. Так как, с другой стороны, термодинамика дает

$$\nabla s_0 = \frac{\partial s_0}{\partial T_0}\nabla T_0 + \frac{\partial s_0}{\partial p_0}\nabla p_0$$

и градиент давления параллелен $\mathbf{g}$, то и градиент температуры должен быть параллелен $\mathbf{g}$, т. е. вертикален.

Следовательно, можно написать

$$\nabla T_0 = \nabla s_0 \frac{dT_0}{ds_0} \tag{25}$$

понимая под dT_0 и т. д. приращения соответствующих величин при смещении dz вдоль вертикали. Вычисляем входящую сюда производную:

$$\frac{ds_0}{dT_0} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p_0} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{T_0} \frac{dp_0}{dT_0} = \frac{c_p}{T_0} + \frac{\rho_0 g\,(\partial V / \partial T)}{(dT_0 / dz)} \tag{26}$$

и последний член в выражении (23) переписываем в виде

$$\rho_0 s \xi \nabla T_0 = \frac{\rho_0 s \xi \nabla s_0}{\dfrac{c_p}{T_0} + \left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_{p_0} \dfrac{\rho_0 g}{(dT_0 / dz)}} = \frac{-\rho_0 s^2}{\dfrac{c_p}{T_0} + \left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_{p_0} \dfrac{\rho_0 g}{(dT_0 / dz)}} \tag{27}$$

Изменение энергии при возмущении можно окончательно переписать так:

$$\frac{1}{2}\Delta_2 E = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{c_0^2}{\rho_0}\rho^2 + \frac{2T_0}{\rho_0 c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho_0}\rho s + \right.$$
$$\left. + T_0\rho_0\left(\frac{1}{c_v} - \left[c_p + \frac{T_0\rho_0 g}{(\partial T_0 / dz)}\left(\frac{dV}{\partial T}\right)_{p_0}\right]^{-1} s^2\right)\right\} dV \tag{28}$$

Устойчивость газа определяется тем, может ли это выражение принимать отрицательные значения.

Легко указать условия, при которых квадратичная форма под интегралом ни при каких ρ и s не может сделаться отрицательной. Именно, так как коэффициент при ρ^2 явно больше нуля, квадратичная форма под интегралом (28) будет существенно положительной, если ее дискриминант отрицателен. Но дискриминант этот равен

$$\Delta \equiv \left[\frac{T_0}{c_v\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)\right]^2 - c_0^2 T_0\left[\frac{1}{c_v} - \left[c_p + \frac{T_0\rho_0 g}{(dT_0 / dz)}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p_0}\right]^{-1}\right] \tag{29}$$

и, пользуясь термодинамическими соотношениями

$$\frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{T_0\,(\partial p / \partial T)_{\rho_0}^2}{\rho_0^2 c_v\,(\partial p / \partial \rho)_{T_0}}, \qquad c_0^2 = \left(\frac{dp}{\partial \rho}\right)_{s_0} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T_0}\frac{c_p}{c_v} \tag{30}$$

легко получаем

$$\Delta = -\frac{T_0}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{T_0}\left[\frac{c_p\,(dT_0 / dz)}{T_0\rho_0 g\,(\partial V / \partial T)_{p_0}} + 1\right]^{-1} \tag{31}$$

Дискриминант будет наверное отрицательным и, следовательно, газ устойчивым, если выражение в квадратных скобках будет больше нуля, т. е. если

$$\frac{c_p}{T_0\rho_0 g\,(\partial V / \partial T)_{p_0}}\left(\frac{dT_0}{dz}\right) > -1 \tag{32}$$

Этот критерий в точности совпадает с условием Шварцшильда (3). Действительно, если умножить (3) на положительную величину $(\partial s / \partial T)_{p_0}$ и учесть, что

$$ds = \frac{c_p}{T}\,dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T dp = \frac{c_p}{T}\,dT + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_\rho \rho g dz$$

то получится

$$-\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)^2\left[\frac{c_p\,(dT\,/\,dz)}{T_0\rho_0 g\,(\partial V\,/\,\partial T)_{p_0}}+1\right]<0$$

а это неравенство равносильно (32).

Пусть теперь условие (32) не выполнено. При положительном дискриминанте квадратичная форма будет отрицательной, если отношение $\rho\,/\,s$ заключено между ее (вещественными) корнями. Зададим ρ и s так, чтобы они были отличны от нуля только в некоторой конечной области, где дискриминант положителен, и чтобы на границе этой области ξ обращалось в нуль. Этого всегда можно добиться. Положим, например,

$$\frac{\rho}{s}=\frac{\nabla(\rho_0\xi)}{\xi\nabla s_0}=\lambda$$

где λ — какая-нибудь постоянная, значение которой лежит между корнями квадратичной формы для всех точек рассматриваемой области.

Тогда для ξ получится уравнение

$$\left[\frac{\nabla\rho_0-\lambda\nabla s_0}{\rho_0}\right]\xi+\nabla\xi=0$$

или, так как ρ_0 и s_0 зависят только от z:

$$F(z)\,\xi_z+\nabla\xi=0$$

где $F(z)$ — известная ограниченная функция. Положив

$$G=\exp\int F(z)\,dz$$

получим для ξ уравнение

$$\nabla(G\xi)=0$$

Любое решение этого уравнения, исчезающее на границе, даст нам ξ, удовлетворяющее всем нужным условиям.

Итак, в случае, когда в условии (32) стоит знак «меньше», в сколь угодно малых областях существуют возмущения, приводящие к уменьшению энергии. Газ будет неустойчивым в каждой точке, и должно будет возникнуть бурное перемешивание. Критерий Шварцшильда оказывается строгим, поскольку речь идет об устойчивости по энергии, т. е. совершенно правильным, если можно пренебрегать вязкостью и теплопроводностью. Наш метод тогда эквивалентен методу Релея.

Вопрос о том, что будет происходить с раз возникшим движением в общем случае, т. е. с учетом вязкости и теплопроводности, следовало бы разработать подробнее. Но уже сейчас можно сказать следующее.

Если взять для определенности случай нормального теплового расширения и сопоставить результаты, полученные в обоих исследованных случаях, то мы получим:

а) если можно пренебречь вязкостью и теплопроводностью

$$\frac{\beta g\rho_0}{\alpha}\left(1-\frac{c_v}{c_p}\right)\begin{cases}>(-dT_0\,/\,dz) & \text{устойчивость}\\ <(-dT_0\,/\,dz) & \text{неустойчивость}\end{cases}\tag{33}$$

[левые части неравенств преобразованы при помощи соотношений (30)];

б) если можно пренебречь сжимаемостью, т. е. если $|dT_0/dz| \gg \beta g\rho_0/\alpha$:

$$C_0\left[\frac{\nu\chi}{\beta\rho_0 g^2 z^4}\right]\frac{\beta g\rho_0}{\alpha}\begin{cases}>(-dT_0/dz) & \text{устойчивость}\\ <(-dT_0/dz) & \text{неустойчивость}\end{cases} \tag{34}$$

В каком отношении находятся друг к другу оба эти критерия?

Заметим прежде всего, что условие Шварцшильда (33) не содержит характеристической длины, в то время как условие Релея (34) существенно зависит от размеров области, в которой происходит возмущение. Отсюда следует, что если равновесие неустойчиво в смысле Шварцшильда и если толщина слоя настолько велика, что возможны возмущения большого масштаба, то равновесие будет неустойчивым и при учете вязкости. Именно в достаточно толстом слое смогут возникнуть возмущения, связанные, с одной стороны, с уменьшением энергии, а с другой — охватывающие настолько большие массы, что их можно будет считать почти адиабатическими. Поэтому вязкость не сможет их затормозить. Для смещений малых размеров вязкость будет играть существенную роль, но если она не даст возникнуть потокам малого масштаба, это только облегчит образование крупных потоков. Поэтому вопрос об устойчивости достаточно толстых слоев можно считать решенным.

Сложнее обстоит дело в случае тонких слоев, где диссипация должна играть важную роль. В таких случаях область градиентов

$$\frac{\beta\rho_0 g}{\alpha}A > \left(-\frac{dT_0}{dz}\right) > \frac{\beta\rho_0 g}{\alpha}\left(1-\frac{c_v}{c_p}\right)A \tag{35}$$

где A — некоторое число, большое по сравнению с единицей, вообще еще не исследовано. Для этих градиентов метод Релея не применим, критерий же Шварцшильда дает неустойчивость. Но будут ли способны диссипативные силы затормозить возникающие возмущения — неизвестно.

Наконец, для градиентов, удовлетворяющих условию

$$\left(-\frac{dT_0}{dz}\right) > A\,\frac{\beta\rho_0 g}{\alpha} \tag{36}$$

применим критерий Релея (34). Сопоставление с (36) дает

$$C_0\,\frac{\nu\chi}{\beta\rho_0 g^2 z^4} > A \quad \text{или} \quad z < \left[\frac{C_0\nu\chi}{A\beta\rho_0 g^2}\right]^{1/4} \tag{37}$$

так что применимость метода ограничена тонкими слоями. Для воды и воздуха z оказывается порядка 10 см. К более толстым слоям теорию следует применять с осторожностью.

Очевидно, что исследование устойчивости с одновременным учетом диссипации и сжимаемости совершенно необходимо.

Поступила 14 V 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Pellew A, Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc., A 176, 312, 1940.
2. Schwarzschild K. Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. Gött. Nachr., 41, 1906.