Институт механики Академии наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА, СВЯЗАННЫХ С ДВИЖЕНИЕМ ГИРОСКОПА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В. Н. Кошляков
(Москва)

В настоящей работе исследуются некоторые частные случаи интегрирования динамических уравнений Эйлера применительно к случаю движения не вполне симметричного и симметричного гироскопов в сопротивляющейся среде. Некоторые случаи интегрирования названных уравнений были рассмотрены Ю. А. Крутковым и Б. В. Булгаковым [1—4].

В этой работе рассматриваются некоторые новые случаи, причем показывается, что при некоторых предположениях о законе сопротивления среды уравнения Эйлера допускают решение в специальных функциях, в частности в бесселевых функциях, и в виде ряда для вырожденной гипергеометрической функции.

Последний параграф работы посвящен решению одной задачи прикладной гироскопии. Доказывается, что при некоторых законах изменения угловой скорости ротора гироскопа уравнения движения чувствительного элемента прибора допускают решения в бесселевых функциях.

1°. Рассмотрим динамические уравнения Эйлера

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = M_x$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = M_y \qquad (1.1)$$
$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = M_z$$

и предположим, что моменты M_x, M_y и M_z относительно осей x, y, z, связанных с телом, создаются некоторыми силами сопротивления и пропорциональны Ap, Bq и Cr, где A, B и C — моменты инерции тела относительно осей x, y, z, а p, q и r — проекции вектора угловой скорости тела на эти оси. Положим

$$M_x = -\lambda Ap, \qquad M_y = -\lambda Bq, \qquad M_z = -\lambda Cr \qquad (1.2)$$

где λ — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды.

Будем предполагать, что экваториальные моменты инерции A и B близки друг к другу, что будет соответствовать случаю не вполне симметричного гироскопа, причем для определенности пусть $B > A$ и $C > A$. Будем искать решение (1.1) в виде разложений по степеням малого параметра ε. Положим

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \ldots$$
$$q = q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)} + \varepsilon^2 q^{(2)} + \ldots \qquad \left(\varepsilon = \frac{B-A}{C}\right) \qquad (1.3)$$
$$r = r^{(0)} + \varepsilon r^{(1)} + \varepsilon^2 r^{(2)} + \ldots$$

Функции $p^{(\nu)}$, $q^{(\nu)}$ и $r^{(\nu)}$ определятся после подстановки (1.3) в уравнения (1.1) и последующего приравнивания членов при одинаковых степенях ε. Процесс последовательных приближений построим таким образом, чтобы нулевое приближение соответствовало случаю симметричного гироскопа, когда $A = B$. Тогда решения, доставляемые первым и последующим приближениями, при малых ε представят добавки к некоторому основному движению, определяемому нулевым приближением. Представим теперь уравнения (1.1) в виде

$$\begin{gathered}\frac{dp}{dt} + \left(\mu - \frac{C}{A}\varepsilon\right) qr = -\lambda p \\ \left(1 + \frac{C}{A}\varepsilon\right)\frac{dq}{dt} - \mu rp = -\lambda\left(1 + \frac{C}{A}\varepsilon\right) q \qquad \left(\mu = \frac{C - A}{A}\right) \\ \frac{dr}{dt} + \varepsilon pq = -\lambda r\end{gathered} \tag{1.4}$$

Зададимся теперь начальными условиями и положим, что при $t = 0$

$$p^{(0)} = p_0, \quad q^{(0)} = q_0, \quad r^{(0)} = r_0, \quad p^{(\nu)} = q^{(\nu)} = r^{(\nu)} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

Подставим разложения (1.3) в уравнения (1.4) Согласно изложенному получим систему, определяющую нулевое приближение:

$$\dot{p}^{(0)} + \mu q^{(0)} r^{(0)} = -\lambda p^{(0)}, \quad \dot{q}^{(0)} - \mu r^{(0)} p^{(0)} = -\lambda q^{(0)}, \quad \dot{r}^{(0)} = -\lambda r^{(0)} \tag{1.6}$$

Решение системы (1.6) будет [3]

$$\begin{gathered}p^{(0)} = e^{-\lambda t}\left\{p_0 \cos\frac{\mu r_0}{\lambda}(e^{-\lambda t} - 1) + q_0 \sin\frac{\mu r_0}{\lambda}(e^{-\lambda t} - 1)\right\} \\ q^{(0)} = e^{-\lambda t}\left\{q_0 \cos\frac{\mu r_0}{\lambda}(e^{-\lambda t} - 1) - p_0 \sin\frac{\mu r_0}{\lambda}(e^{-\lambda t} - 1)\right\} \\ r^{(0)} = r_0 e^{-\lambda t}\end{gathered} \tag{1.7}$$

Для первого приближения имеем следующую систему:

$$\begin{aligned}\dot{p}^{(1)} + \mu q^{(1)} r^{(0)} &= -\lambda p^{(1)} + F_1(t) \\ \dot{q}^{(1)} - \mu p^{(1)} r^{(0)} &= -\lambda q^{(1)} + F_2(t) \\ \dot{r}^{(1)} &= -\lambda r^{(1)} + F_3(t)\end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned}F_1(t) &= \frac{C}{A} q^{(0)} r^{(0)} - \mu q^{(0)} r^{(1)} \\ F_2(t) &= \mu p^{(0)} r^{(1)} - \lambda \frac{C}{A} q^{(0)} - \frac{C}{A}\dot{q}^{(0)} \\ F_3(t) &= -p^{(0)} q^{(0)}\end{aligned} \tag{1.9}$$

Интеграл третьего из уравнений (1.8), удовлетворяющий нулевым начальным условиям, будет

$$r^{(1)} = e^{-\lambda t}\int_0^t F_3(\tau)\, e^{\lambda\tau}\, d\tau = -e^{-\lambda t}\int_0^t p^{(0)}(\tau)\, q^{(0)}(\tau)\, e^{\lambda\tau}\, d\tau$$

Подставляя сюда значения $p^{(0)}$ и $q^{(0)}$ согласно формулам (1.7) и выполняя интегрирование, получим окончательное выражение для $r^{(1)}$. Оно будет иметь вид:

$$r^{(1)} = \frac{e^{-\lambda t}}{4\mu r_0} \{2p_0 q_0 \sin 2\mu\alpha(t) - (p_0^2 - q_0^2)[\cos 2\mu\alpha(t) - 1]\} \tag{1.10}$$

где положено

$$\alpha(t) = \frac{r_0}{\lambda}(e^{-\lambda t} - 1) \tag{1.11}$$

Для интегрирования первых двух уравнений (1.8) умножим второе из них на i и сложим с первым. Введя затем переменную $z = p + iq$, будем иметь

$$\dot{z}^{(1)} + (\lambda - \mu r^{(0)} i) z^{(1)} = F(t) \qquad (F(t) = F_1(t) + iF_2(t)) \tag{1.12}$$

Решение (1.12) после отделения вещественных и мнимых частей представим в виде:

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= e^{-\lambda t}\cos\mu\alpha(t)\left\{\int_0^t e^{\lambda\tau}\cos\mu\alpha(\tau)F_1(\tau)\,d\tau - \int_0^t e^{\lambda\tau}\sin\mu\alpha(\tau)F_2(\tau)\,d\tau\right\} + \\ &+ e^{-\lambda t}\sin\mu\alpha(t)\left\{\int_0^t e^{\lambda\tau}\cos\mu\alpha(\tau)F_2(\tau)\,d\tau + \int_0^t e^{\lambda\tau}\sin\mu\alpha(\tau)F_1(\tau)\,d\tau\right\} \\ q^{(1)} &= e^{-\lambda t}\cos\mu\alpha(t)\left\{\int_0^t e^{\lambda\tau}\cos\mu\alpha(\tau)F_2(\tau)\,d\tau + \int_0^t e^{\lambda\tau}\sin\mu\alpha(\tau)F_1(\tau)\,d\tau\right\} - \\ &- e^{-\lambda t}\sin\mu\alpha(t)\left\{\int_0^t e^{\lambda\tau}\cos\mu\alpha(\tau)F_1(\tau)\,d\tau - \int_0^t e^{\lambda\tau}\sin\mu\alpha(\tau)F_2(\tau)\,d\tau\right\} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Для получения окончательных формул для $p^{(1)}$ и $q^{(1)}$ в выражения (1.13) следует подставить значения $F_1(t)$ и $F_2(t)$, данные формулами (1.9), и затем выполнить интегрирование. В результате получим

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= e^{-\lambda t}\cos\mu\alpha(t)\left\{\frac{q_0}{4\mu}\left[\frac{C}{A}(\mu-1) + \frac{p_0^2 - q_0^2}{2r_0^2}\right]\sin 2\mu\alpha(t) + \right. \\ &\left. + \frac{p_0}{4\mu}\left[\frac{C}{A}(\mu-1) - \frac{q_0^2}{r_0^2}\right][\cos 2\mu\alpha(t) - 1] - \frac{q_0}{2}\left[\frac{C}{A}(\mu+1) + \frac{p_0^2 - q_0^2}{2r_0^2}\right]\alpha(t)\right\} - \\ &- e^{-\lambda t}\sin\mu\alpha(t)\left\{\frac{p_0}{4\mu}\left[\frac{C}{A}(\mu-1) + \frac{p_0^2 - q_0^2}{2r_0^2}\right]\sin 2\mu\alpha(t) + \right. \\ &\left. + \frac{q_0}{4\mu}\left[\frac{C}{A}(\mu-1) - \frac{p_0^2}{r_0^2}\right][\cos 2\mu\alpha(t) - 1] - \frac{p_0}{2}\left[\frac{C}{A}(\mu+1) + \frac{p_0^2 - q_0^2}{2r_0^2}\right]\alpha(t)\right\} \\ q^{(1)} &= -e^{-\lambda t}\cos\mu\alpha(t)\left\{\frac{p_0}{4\mu}\left[\frac{C}{A}(\mu-1) + \frac{p_0^2 - q_0^2}{2r_0^2}\right]\sin 2\mu\alpha(t) + \right. \\ &\left. + \frac{q_0}{4\mu}\left[\frac{C}{A}(\mu-1) - \frac{q_0^2}{r_0^2}\right][\cos 2\mu\alpha(t) - 1] - \frac{p_0}{2}\left[\frac{C}{A}(\mu+1) + \frac{p_0^2 - q_0^2}{2r_0^2}\right]\alpha(t)\right\} - \\ &- e^{-\lambda t}\sin\mu\alpha(t)\left\{\frac{q_0}{4\mu}\left[\frac{C}{A}(\mu-1) + \frac{p_0^2 - q_0^2}{2r_0^2}\right]\sin 2\mu\alpha(t) + \right. \\ &\left. + \frac{p_0}{4\mu}\left[\frac{C}{A}(\mu-1) - \frac{q_0^2}{r_0^2}\right][\cos 2\mu\alpha(t) - 1] - \frac{q_0}{2}\left[\frac{C}{A}(\mu+1) + \frac{p_0^2 - q_0^2}{2r_0^2}\right]\alpha(t)\right\} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Обратимся теперь к первым приближениям (1.14) и предположим, что имеем гироскоп, у которого $C = 2A$, чему соответствует $\mu = 1$, и, кроме того, будем считать, что $p_0 = q_0 = \omega_0$.

В этом случае формулы (1.14) существенно упрощаются. В самом деле, полагая в (1.14) $\mu = 1$ и $p_0 = q_0 = \omega_0$, получим

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= Ne^{-\lambda t}[\sin\alpha(t) - \cos\alpha(t)] \\ q^{(1)} &= Ne^{-\lambda t}[\sin\alpha(t) + \cos\alpha(t)] \end{aligned} \tag{1.15}$$

где

$$N = \frac{\omega_0^3}{4r_0^2}[\cos 2\alpha(t) - 1] + 2\omega_0\dot{\alpha}(t) \tag{1.16}$$

Если начальное значение r_0 проекции угловой скорости гироскопа на ось z велико по сравнению с ω_0, то первым слагаемым в формуле (1.16) можно пренебречь по сравнению со вторым и тогда

$$N \approx 2\omega_0\dot{\alpha}(t) \tag{1.17}$$

При этих же предположениях $r^{(1)}$ определится формулой

$$r^{(1)} = \frac{\omega_0^2}{2r_0}e^{-\lambda t}\sin 2\alpha(t) \tag{1.18}$$

Рассматривая полученные нами соотношения (1.11), (1.15) и (1.17), заметим, что первые приближения для p и q, даваемые названными соотношениями, прямо пропорциональны r_0 в отличие от $r^{(1)}$, которое обратно пропорционально r_0. При $p_0 = q_0 = \omega_0$ и $\mu = 1$ формулы (1.7), для нулевых приближений будут иметь вид:

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= \omega_0 e^{-\lambda t}[\cos\alpha(t) + \sin\alpha(t)] \\ q^{(0)} &= \omega_0 e^{-\lambda t}[\cos\alpha(t) - \sin\alpha(t)] \end{aligned} \tag{1.19}$$

Решение системы (1.4) согласно разложениям (1.3) будет иметь вид:

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + O(\varepsilon^2), \qquad q = q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)} + O(\varepsilon^2)$$

где символом $O(\varepsilon^2)$ обозначены члены порядка ε^2 и выше.

Пользуясь формулами (1.15), (1.17) и (1.19), получим окончательно

$$\begin{aligned} p &= \omega_0\sqrt{2(1 + 4\varepsilon^2\dot{\alpha}^2)}\,e^{-\lambda t}\sin\beta(t) + O(\varepsilon^2) \\ q &= \omega_0\sqrt{2(1 + 4\varepsilon^2\dot{\alpha}^2)}\,e^{-\lambda t}\cos\beta(t) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{1.20}$$

где

$$\beta(t) = \alpha(t) + \operatorname{arc\,tg}\frac{1 - 2\varepsilon\dot{\alpha}(t)}{1 + 2\varepsilon\dot{\alpha}(t)} \tag{1.21}$$

Из формул (1.20) и (1.21) следует, что в системе, для которой ε удовлетворяет условию

$$\varepsilon \ll \frac{1}{2\,|\dot{\alpha}(t)|} \tag{1.22}$$

влияние несимметричности гироскопа незначительно. При больших λ погрешности будут невелики, так как из формул (1.17) и (1.11) следует, что $N \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Кроме того, при больших λ величины $p^{(1)}$ и $q^{(1)}$ быстро затухают благодаря наличию множителя $e^{-\lambda t}$. Если $p_0 \neq q_0$, то погрешности, вводимые разностью p_0 и q_0, при больших r_0 будут несущественны, так как из формул (1.14) следует, что члены, содержащие упомянутую разность, имеют в знаменателе r_0^2 и, следовательно, при большой угловой скорости r_0 весьма малы.

Для расчета второго и последующих приближений можно поступать так же, как это мы делали при вычислении первого приближения. Дифференциальное уравнение, служащее для определения комплексной переменной $z^{(\nu)} + p^{(\nu)} = iq^{(\nu)}$, будет иметь вид, подобный (1.12); например, для второго приближения будет

$$\dot{z}^{(2)} + Q(t)\, z^{(2)} = \Phi(t)$$

где функции $Q(t)$ и $\Phi(t)$ будут известными, так как они определятся в результате вычисления первого приближения. Благодаря наличию множителя $e^{-\lambda t}$ процесс будет затухать и при малых ε члены, доставляемые вторым и последующим приближениями, будут неощутимы по сравнению с нулевым и первым приближениями.

В заключение отметим, что в том случае, когда A и B существенно отличаются друг от друга и, следовательно, ε не является малой величиной, пользоваться изложенным выше методом нельзя. Однако, как показал еще Гринхиль [5], система (1.1) при условии (1.2) допускает точное решение в эллиптических функциях.

2°. Обратимся к случаю симметричного гироскопа ($A = B$) и предположим, что правые части (1.1) имеют вид:

$$M_x = -\lambda_1 p, \qquad M_y = -\lambda_2 q, \qquad M_z = -\lambda_3 r \tag{2.1}$$

где λ_1, λ_2 и λ_3 — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности.

Обращаясь к третьему из уравнений (1.1), напишем его решение:

$$r = r_0 e^{-k_3 t} \qquad \left(k_3 = \frac{\lambda_3}{C}\right) \tag{2.2}$$

Остальные два уравнения представим в виде

$$\dot{p} + \mu r q + k_1 p = 0, \qquad \dot{q} - \mu r p + k_2 q = 0 \tag{2.3}$$

где

$$\frac{C - A}{A} = \mu, \qquad \frac{\lambda_1}{A} = k_1, \qquad \frac{\lambda_2}{A} = k_2 \tag{2.4}$$

Уравнение для определения угловой скорости $p(t)$ имеет вид:

$$\ddot{p} + \left(k_1 + k_2 - \frac{\dot{r}}{r}\right)\dot{p} + \left\{(\mu r)^2 + k_1\left(k_2 - \frac{\dot{r}}{r}\right)\right\} p = 0 \tag{2.5}$$

Учитывая (2.2), будем иметь

$$\ddot{p} + (k_1 + k_2 + k_3)\,\dot{p} + \{\mu^2 r_0^2 e^{-2k_3 t} + k_1 (k_2 + k_3)\}\, p = 0 \tag{2.6}$$

Подстановкой $e^{-k_3 t} = z$ уравнение (2.6) сводится к типу Бесселя, интегрируя которое и возвращаясь затем снова к старой переменной, мы получим при дробном ν

$$p = \exp\left\{-\frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3)\,t\right\}\left\{C_1 J_\nu\left(\frac{\mu r_0}{k_3}e^{-k_3 t}\right)+C_2 J_{-\nu}\left(\frac{\mu r_0}{k_3}e^{-k_3 t}\right)\right\} \tag{2.7}$$

Значок ν в нашем случае определится равенством

$$\nu = \frac{1}{2k_3}(k_1-k_2-k_3) = -\frac{1}{2}+\frac{C}{2A}\,\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3} \tag{2.8}$$

Отсюда следует, что $\nu = -\frac{1}{2}$ при $\lambda_1 = \lambda_2$ и бесселевы функции переходят в элементарные, именно

$$\begin{aligned} J_{1/2}\left(\frac{\mu r_0}{k_3}e^{-k_3 t}\right) &= e^{1/2\,k_3 t}\sqrt{\frac{2k_2}{\pi\mu r_0}}\sin\left(\frac{\mu r_0}{k_3}e^{-k_3 t}\right)\\ J_{-1/2}\left(\frac{\mu r_0}{k_3}e^{-k_3 t}\right) &= e^{1/2\,k_3 t}\sqrt{\frac{2k_3}{\pi\mu r_0}}\cos\left(\frac{\mu r_0}{k_3}e^{-k_3 t}\right)\end{aligned} \tag{2.9}$$

В этом случае для $p(t)$ мы получим формулу, данную Ю. А. Крутковым и совпадающую с нулевым приближением (1.7), разобранном в предыдущем параграфе, именно [3]

$$p(t) = e^{-kt}\left\{D_1\sin\left(\frac{\mu r_0}{k_3}e^{-k_3 t}\right)+D_2\cos\left(\frac{\mu r_0}{k_3}e^{-k_3 t}\right)\right\}$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям.

Предположим, что, кроме моментов, пропорциональных первой степени скорости, имеют место возмущающие моменты, являющиеся функциями времени. Положим

$$M_x = -\lambda_1 p + f_1(t), \qquad M_y = -\lambda_2 q + f_2(t) \tag{2.10}$$

В этом случае $p(t)$ будет удовлетворять неоднородному дифференциальному уравнению

$$\ddot{p} + (k_1+k_2+k_3)\,\dot{p} + \{\mu^2 r_0^{\,2} e^{-2k_3 t} + k_1(k_2+k_3)\}\,p = F(t) \tag{2.11}$$

где

$$F(t) = \frac{1}{A}[\dot{f}_1(t) + (k_1+k_2)\,f_1(t) - \mu r_0 e^{-k_3 t} f_2(t)] \tag{2.12}$$

Частное решение уравнения (2.11), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, может быть найдено методом вариации произвольных постоянных.

Пользуясь этим методом и принимая во внимание основные формулы теории бесселевых функций, напишем общее решение уравнения

$$p = c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t) + M_1(t)\,p_1(t) + M_2(t)\,p_2(t)$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — два линейно независимых решения уравнения (2.6), а $M_1(t)$ и $M_2(t)$ определяются следующими формулами:

$$
\begin{aligned}
M_1(t) &= \frac{\pi}{2k_3}\frac{1}{\sin\pi\nu}\int_0^t \exp\left\{\frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3)t\right\} J_{-\nu}\left(\frac{\mu r_0}{k_3}e^{-k_3 t}\right)F(t)\,dt \\
M_2(t) &= -\frac{\pi}{2k_3}\frac{1}{\sin\pi\nu}\int_0^t \exp\left\{\frac{1}{2}(k_1+k_2+k_3)t\right\} J_{\nu}\left(\frac{\mu r_0}{k_3}e^{-k_3 t}\right)F(t)\,dt
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Интегралы, входящие в (2.13), вычисляются в конечном виде лишь при специально подобранной функции $F(t)$. Например, при $F(t) = \text{const}$ и при некоторых соотношениях между k_1, k_2 и k_3 интегралы (2.13) выражаются через функции $J_{\nu+1}(x)$.

3°. При больших скоростях собственного вращения можно считать, что сопротивление среды возрастает пропорционально квадрату скорости. В соответствии с этим положим, что

$$M_x = -\lambda_1 p, \qquad M_y = -\lambda_2 q, \qquad M_z = -\lambda_3 r^2. \tag{3.1}$$

полагая, как и в предыдущем пункте, что $A = B$.

Отметим, что коэффициент λ_3 будет иметь размерность, отличную от размерностей коэффициентов λ_1 и λ_2.

Покажем, что при $\lambda_1 = \lambda_2$ решение уравнений Эйлера выражается посредством элементарных функций. Третье из уравнений (1.1) в рассматриваемом случае сразу интегрируется, и мы получим

$$r = \frac{r_0}{1 + k_3 r_0 t} \qquad \left(k_3 = \frac{\lambda_3}{C}\right) \tag{3.2}$$

Для определения угловых скоростей p и q будем иметь систему, подобную (2.3), если положить в последней $k_1 = k_2 = k$. Учитывая (3.2), напишем решение этой системы:

$$
\begin{aligned}
p &= e^{-kt}\left\{p_0\cos\frac{\mu}{k_3}\ln(1+k_3r_0t) - q_0\sin\frac{\mu}{k_3}\ln(1+k_3r_0t)\right\} \\
q &= e^{-kt}\left\{q_0\cos\frac{\mu}{k_3}\ln(1+k_3r_0t) + p_0\sin\frac{\mu}{k_3}\ln(1+k_3r_0t)\right\}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Если же $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то вопрос усложняется. Уравнение, которому удовлетворяет $p(t)$, имеет вид:

$$\ddot{p} + \left(k_1 + k_2 + \frac{k_3 r_0}{1 + k_3 r_0 t}\right)\dot{p} + \left\{\frac{\mu^2 r_0^2}{(1 + k_3 r_0 t)^2} + k_1\left(k_2 + \frac{k_3 r_0}{1 + k_3 r_0 t}\right)\right\} p = 0 \tag{3.4}$$

Введем новую переменную

$$z = 1 + k_3 r_0 t \tag{3.5}$$

Тогда уравнение (3.4) перейдет в следующее [7]:

$$z^2\frac{d^2p}{dz^2} + (a_0 + a_1 z)\, z\frac{dp}{dz} + (b_0 + b_1 z + b_2 z^2)\, p = 0 \tag{3.6}$$

где

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{k_1 + k_2}{k_3 r_0}, \quad b_0 = \frac{\mu^2}{k_3^2}, \quad b_1 = \frac{k_1}{k_3 r_0}, \quad b_2 = \frac{k_1 k_2}{(k_3 r_0)^2} \tag{3.7}$$

Уравнение (3.6) принадлежит к типу вырожденного гипергеометрического уравнения и в общем случае не интегрируется в элементарных функциях. При некоторых соотношениях между коэффициентами решение можно получить в элементарных функциях. Но эти соотношения либо не соответствуют нашей задаче, либо приводят к уже разобранному случаю $\lambda_1 = \lambda_2$, когда решения определяются формулами (3.3).

Решение уравнения (3.6) имеет вид

$$p = z^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{k_1+k_2}{k_3 r_0} z\right] y\left(\frac{1}{2}, \ \pm\frac{\mu^2}{k_3^2} i, \ \frac{k_1-k_2}{k_3 r_0} z\right) \qquad k_1 \neq k_2$$

причем функция $y(k, m, x)$ удовлетворяет уравнению Уиттекера

$$4x^2 y'' = (x^2 - 4kx + 4m^2 - 1)\, y$$

Чтобы получить решение уравнения (3.6), пригодное и для случая $k_1 = k_2$, будем искать, не прибегая к функциям Уиттекера, решение этого уравнения в виде степенного ряда.

Составим определяющее уравнение

$$F(\rho) = \rho(\rho - 1) + a_0 \rho + b_0 = 0$$

Для данного случая его корни будут

$$\rho_1 = \sqrt{b_0}\, i, \qquad \rho_2 = -\sqrt{b_0}\, i.$$

Принимая во внимание, что разность корней определяющего уравнения не равна целому числу, положим

$$p_1 = z^{\rho_1}\sum_{s=0}^{\infty}\alpha_s z^s, \qquad p_2 = z^{\rho_2}\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s z^s, \qquad \alpha_0 = \beta_0 = 1 \tag{3.8}$$

Учитывая также, что

$$z^{\rho_1} = z^{\sqrt{b_0} i} = e^{i\sqrt{b_0}\ln z} = \cos\sqrt{b_0}\ln z + i\sin\sqrt{b_0}\ln z$$

$$z^{\rho_2} = \cos\sqrt{b_0}\ln z - i\sin\sqrt{b_0}\ln z$$

и пользуясь рядами (3.8), получим

$$p_1 = (\cos\sqrt{b_0}\ln z + i\sin\sqrt{b_0}\ln z)\{1 + (A_1 + B_1 i) z + (A_2 + B_2 i) z^2 + \ldots\}$$

$$p_2 = (\cos\sqrt{b_0}\ln z - i\sin\sqrt{b_0}\ln z)\{1 + (A_1 + B_1 i) z + (A_2 - B_2 i) z^2 + \ldots\}$$

Выбирая новые решения $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, $\frac{1}{2} i (p_1 - p_2)$, имеем

$$\begin{aligned} p_1 = {} & C_1\{(1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots)\cos\sqrt{b_1}\ln z - (B_1 + B_2 z + \ldots)\, z\sin\sqrt{b_0}\ln z\} + \\ & + C_2\{(1 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots)\sin\sqrt{b_0}\ln z + (B_1 + B_2 z + \cdots)\, z\cos\sqrt{b_0}\ln z\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Выражения для коэффициентов A_1, A_2, B_1 и B_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{k_3 r_0}\frac{k_1 k_3^2 + 2(k_1 + k_2)\mu^2}{4\mu^2 + k_3^2}, & A_2 &= \frac{1}{2(k_3 r_0)^2}\frac{k_3^2 k_1^2 + (k_1 + k_2)^2 \mu^2}{4\mu^2 + k_3^2} \\ B_1 &= \frac{\mu}{r_0}\frac{k_1 - k_2}{4\mu^2 + k_3^2}, & B_2 &= -\frac{\mu}{(2r_0)^2}\frac{k_1 - k_2}{k_3}\frac{3k_1 + k_2}{4\mu^2 + k_3^2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Заметим, что из формул (3.9) и (3.10) можно как частный случай получить ранее приведенные решения (3.3). Для этого в (3.10) следует положить $k_1 = k_2 = k$.

4°. В предыдущем изложении мы ограничились лишь рассмотрением некоторых частных случаев интегрирования динамических уравнений Эйлера, хотя известно, что задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки включает в себя интегрирование кинематических уравнений Эйлера

$$p = \sin\varphi \sin\theta\,\dot{\psi} + \cos\varphi\,\dot{\theta}, \quad q = \cos\varphi \sin\theta\,\dot{\psi} - \sin\varphi\,\dot{\theta}, \quad r = \cos\theta\,\dot{\psi} + \dot{\varphi} \qquad [4.1)$$

из которых определяются эйлеровы углы ψ, θ и φ. Еще Дарбу показал, что если p, q и r известны как функции времени, то задача определения эйлеровых углов сводится к интегрированию уравнения Риккати с комплексными коэффициентами.

Ю. А. Крутков[1], рассматривая влияние сопротивления среды на движение гироскопа, показал, что в случае сопротивления, пропорционального первой степени скорости, движение оси гироскопа будет зависеть от соотношения между полярным моментом инерции гироскопа C и экваториальным моментом инерции A. В обоих случаях, когда $C > A$ и когда $C < A$, ось наибольшего момента инерции стремится слиться с вектором мгновенной угловой скорости гироскопа. Аналогичная задача рассматривались и Б. В. Булгаковым[4].

Обратимся к уравнениям (1.1) в предположении, что моменты M_x, M_y и M_z изменяются в соответствии с формулами (1.2). Тогда, обозначив через $\mathbf{K}$ вектор момента количества движения гироскопа, представим (1,1) в виде одного векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \lambda\mathbf{K} = 0 \qquad (4.2)$$

Отсюда

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 e^{-\lambda t} \qquad (4.3)$$

Представим теперь, что ось 0ζ неподвижной системы координат направлена вдоль вектора кинетического момента $\mathbf{K}$, так что $K_\xi = K_\eta = 0$ и $K_\zeta = K$.

Известно, что в этом случае косинус угла нутации будет

$$\cos\theta = \frac{Cr}{K} \qquad (4.4)$$

Воспользовавшись теперь формулами (1.7) и (1.10), по которым определяются нулевое и первое приближения для $r(t)$, и заменяя K его значением согласно (4.3), получим, что

$$\cos\theta = \frac{Cr_0}{K_0} + \varepsilon\frac{C}{4\mu K_0 r_0}\{2p_0 q_0 \sin 2\mu\alpha(t) + (p_0^2 - q_0^2)[\cos 2\mu\alpha(t) - 1]\} + O(\varepsilon^2) \qquad (4.5)$$

Для упрощения положим здесь, как и ранее,

$$p_0 = q_0 = \omega_0, \qquad \mu = 1.$$

Тогда, заменяя ε его значением (1.3), будем иметь

$$\cos\theta = \frac{Cr_0}{K_0} + \frac{B-A}{2K_0 r_0}\,\omega_0^2 \sin 2\mu\alpha\,(t) + O\,(\varepsilon^2) \tag{4.6}$$

Отсюда ясно видно, что при малых ε и больших r_0 добавка к первому члену этой формулы будет несущественной.

Если же мы имеем симметричный гироскоп, у которого $A = B$, то в рассматриваемом нами случае угол нутации θ будет постоянен. Это обстоятельство следует из того факта, что в этом случае вектор кинетического момента будет сохранять неизменное направление в пространстве согласно векторному равенству (4.3), третье же из уравнений (1.1) при учете (1.2) легко интегрируется и дает

$$Cr = Cr_0 e^{-\lambda t} \tag{4.7}$$

Отсюда ясно, что

$$\cos\theta = \frac{Cr}{K} = \frac{Cr_0}{K_0} = \text{const}$$

Этот же результат, естественно, вытекает и из (4.6), если положить там $\varepsilon = 0$.

Если θ и K известны как функции времени, то задача определения остальных эйлеровых углов не представляет затруднений, и на этом мы не будем здесь останавливаться.

5° В этом пункте мы рассмотрим одну задачу прикладной гироскопии, имеющую известную связь с предыдущей теорией. В работе [6] рассматривались девиации гировертикали, возникающие вследствие изменения угловой скорости ротора гироскопа. Там было показано, что угол β поворота внутреннего кольца карданового подвеса чувствительного элемента прибора может быть определен следующим образом:

$$\beta = uv, \qquad u = \frac{H_0}{H}\exp\left[-M_k\int\limits_0 \frac{dt}{H}\right] \tag{5.1}$$

а v удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{v} + \left(\frac{Pl}{H}\right)^2 v = 0 \tag{5.2}$$

Здесь H_0 — значение кинетического момента ротора гироскопа в начальный момент времени, M_k — максимальное значение коррекционного момента, Pl — маятниковый момент. Некоторые случаи интегрируемости уравнения (5.2) были рассмотрены в работе [6]. Здесь мы рассмотрим некоторые новые случаи.

При испытаниях чувствительных элементов гировертикалей, гироскопов направления и других гироприборов в некоторых случаях экспериментально снимают так называемую «кривую выбега» ротора, замеряя каким-либо способом (например, стробоскопическим) угловую скорость вращения ротора, имеющую место после выключения питания. Естественно, что вследствие трения о воздух и трения в подшипниках главной оси ротора его угловая скорость падает по какому-то определенному закону. Обычно в таких случаях считают, что момент сопротивления пропорционален либо первой, либо второй степени скорости вращения ротора. Подобная картина может встретиться и на практике вследствие внезапного прекращения питания ротора в связи с какими-либо неблагоприятными факторами. Мы покажем, что в обоих случаях можно проинтегрировать уравнение (5.2) и, следовательно, получить ясное представление о характере движения чувствительного элемента.

Если предположить, что в период неустановившегося режима момент сопротивления пропорционален первой степени скорости, то из уравнения моментов относительно оси ротора имеем

$$C\frac{d\omega}{dt} = -\lambda\omega \quad \text{или} \quad H = C\omega = H_0 e^{-at} \qquad \left(a = \frac{\lambda}{C}\right) \tag{5.3}$$

Формула (5.3) в этом случае аналогична третьей формуле (1.7), что и следовало, конечно, ожидать.

Уравнение (5.2) в нашем случае примет вид:

$$\ddot{v} + k^2 e^{2at} v = 0 \qquad \left(k = \frac{Pl}{H_0}\right) \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) интегрируется в бесселевых функциях нулевого порядка, что можно проверить подстановкой $e^{at} = z$. Выполняя интегрирование в (5.1), получим

$$\beta = \exp\left\{at - \frac{s}{a}(e^{at} - 1)\right\}\left\{C_1 J_0\left(\frac{k}{a}e^{at}\right) + C_2 N_0\left(\frac{k}{a}e^{at}\right)\right\} \tag{5.5}$$

где

$$s = \frac{M_k}{H_0}$$

Характер движения зависит от соотношения между s, k и a. При сильной коррекции движение будет носить затухающий характер без колебательного движения чувствительного элемента.

Если предположить, что момент сопротивления пропорционален квадрату угловой скорости ротора, то вопрос также легко разрешается.

Закон изменения H с течением времени будет определяться формулой, аналогичной (3.2), именно

$$H = \frac{H_0}{1 + bt} \qquad \left(b = \frac{\lambda}{C}\omega_0\right) \tag{5.6}$$

Уравнение (5.2) в этом случае будет иметь вид:

$$\ddot{v} + k^2(1 + bt)^2 v = 0 \tag{5.7}$$

Это уравнение также интегрируется в цилиндрических функциях. Выполняя интегрирование в (5.1), будем иметь

$$\beta = \sqrt{(1 + bt)^3}\exp\left[-\frac{1}{2}s(2 + bt)t\right]\left\{C_1 J_{1/4}\left[\frac{k}{2b}(1 + bt)^2\right] + \right.$$
$$\left. + C_2 J_{-1/4}\left[\frac{k}{2b}(1 + bt)^2\right]\right\} \tag{5.8}$$

Характер движения будет также определяться соотношением между s, k и b. В обоих рассмотренных случаях присутствие бесселевых функций говорит о затухающем колебательном движении чувствительного элемента. Однако, как указывалось выше, при очень сильной коррекции колебательного движения оси ротора может и не быть.

Поступила 2 VII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. и Крутков Ю. А. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1932.
2. Крутков Ю. А. Об одном частном случае броуновского вращательного движения. ДАН СССР, т. III, № 3, 1934.
3. Крутков Ю. А. Броуновское вращательное движение частицы с осью симметрии. ДАН СССР, т. I, № 6, 1935.
4. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГОНТИ, М.—Л., 1939.
5. Мак-Миллан. Динамика твердого тела. Изд. иностр. литературы, 1951.
6. Кошляков В. Н. О девиациях гировертикали при переменной скорости собственного вращения гироскопа. Инженерный сборник, т. VI. 1950.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. иностр. литературы, 1950.