Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Н. А. Ростовцев
(Чаплыгин)

§ 1. Известно, что в случае одного участка контакта $-a \leqslant x \leqslant a$ давление $p = p(x)$ находится как решение интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{+a} p(t) \log \left|1 - \frac{x}{t}\right| dt + f(x) = \text{const} \tag{1.1}$$

где

$$f(x) = -\frac{z_1(x) + z_2(x)}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \tag{1.2}$$

Здесь ϑ_1, ϑ_2 — известные упругие постоянные, а $z_1(x)$, $z_2(x)$ — аппликаты обеих поверхностей до деформации, отсчитываемые от общей касательной плоскости.

Решение уравнения (1.1) дано И. Я. Штаерманом[1] посредством сингулярного интеграла

$$p(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{a^2 - x^2}\int_{-a}^{+a} \frac{f'(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} \frac{dt}{(t - x)} \tag{1.3}$$

при условии

$$\int_{-a}^{+a} \frac{f'(t)\, dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = 0 \tag{1.4}$$

выражающем отсутствие у $p(x)$ иных особенностей, кроме логарифмической. Покажем, что уравнение (1.1) приводится к уравнению Вольтерра первого рода и, следовательно, общее решение может быть представлено через обыкновенные интегралы.

Разложим каждую из функций $p(x)$ и $f(x)$ на четную и нечетную компоненты, отмечая первую индексом плюс, а другую — индексом минус. После простейших преобразований получим для этих компонент уравнения

$$\begin{aligned} &\int_0^a p_+(t) \log \left|1 - \frac{x^2}{t^2}\right| dt + f_+(x) = C \\ &\int_0^a p_-(t) \log \left|\frac{t - x}{t + x}\right| dt + f_-(x) = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Представим теперь четные функции $p_+(x)$ и $p_-(x)$ в следующем виде:

$$p_+(x) = \int_x^a \frac{g(t)\,dt}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \qquad p_-(x) = \frac{1}{x}\int_x^a \frac{h(t)\,dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} \tag{1.6}$$

Здесь $g(x)$, $h(x)$ — вспомогательные функции, интегрируемые в смысле Стильтьеса на отрезке.

Подставим (1.6) в (1.5) и затем изменим порядок интегрирования по формуле Дирихле. Тогда будет

$$\pi \int_0^a g(u) \operatorname{argch} \frac{x}{u} du + f_+(x) = C$$

$$\pi\int_0^a \frac{h(u)}{u} \arccos \frac{u}{x} du - \frac{\pi^2}{2}\int_0^a \frac{h(u)}{u} du + f(x) = 0 \tag{1.7}$$

Отсюда дифференцированием для $g(x)$ и $h(x)$ получаются уравнения Вольтерра первого рода, типа Абеля

$$\int_0^x \frac{g(u)\,du}{\sqrt{x^2 - u^2}} = -\frac{1}{\pi} f_+'(x), \qquad \int_0^x \frac{h(u)\,du}{\sqrt{x^2 - u^2}} = -\frac{1}{\pi} x f_-'(x) \tag{1.8}$$

Решая их известными приемами, например, приемом повторного интегрирования, в предположении гладкости функции $f(x)$, получим

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{2x}{\pi^2}\int_0^x \frac{f_+''(t)\,dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \\ h(x) &= -\frac{2x}{\pi^2}\int_0^x \frac{[tf_-'(t)]'\,dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Формулы (1.9) и (1.6) решают поставленную задачу выражения решения (1.1) через обыкновенные интегралы в общем случае.

Из (1.6) следует необходимое, но не достаточное условие регулярности решения в точке

$$\int_0^a \frac{h(t)\,dt}{t} = 0 \tag{1.10}$$

Очевидно, что при выполнении этого условия $p(x)$ может иметь логарифмическую особенность. Можно доказать, что условие (1.10) эквивалентно условию (1.4) И. Я. Штаермана.

Для нагрузки P и момента M_0 относительно точки $x = 0$ получаются следующие формулы:

$$P = \pi\int_0^a g(x)\,dx \qquad \left(P = -\frac{2}{\pi}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} f_+''(x)\,dx\right) \tag{1.11}$$

$$M_0 = \pi\int_0^a h(x)\,dx \qquad \left(M_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} f_-'(x)\,dx\right) \tag{1.12}$$

§ 2. В качестве первого примера рассмотрим симметричный случай точечного контакта. В этом случае

$$z_1(x) = A_1 |x|^n, \qquad z_2(x) = A_2 |x|^n$$

Обозначим для краткости $A_1 + A_2 = A$, $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \vartheta$. Тогда

$$f(x) = -\frac{A}{\vartheta} |x|^n \tag{2.1}$$

При $n = 2$ имеет место классический случай Герца. Для четного n, а также в случае полуцелого $n = \frac{3}{2}$ конечные формулы решения впервые получены И. Я. Штаерманом [2].

Используя формулы (1.9) и (1.6), можно получить выражение для $p(x)$ через квадратуру при любом вещественном $n > 1$. Подставляя (2.1) в (1.9), находим

$$g(x) = \frac{2x}{\pi^2 \vartheta} An(n-1) \int_0^x \frac{t^{n-2}\, dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \tag{2.2}$$

Положим

$$C_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n u\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} n\right)} \qquad (n > -1) \tag{2.3}$$

Замечая, что $(n-1) C_{n-2} = nC_n$, получаем (после подстановки (1.11))

$$g(x) = \frac{2An^2 C_n}{\pi^2 \vartheta} x^{n-1} = \frac{nP}{\pi a}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} \qquad \left(P = \frac{2AnC_n}{\pi\vartheta} a^n\right) \tag{2.4}$$

После этого из (2.3) следует

$$p(x) = p_+(x) = \frac{nP}{\pi a} \int_\xi^1 \frac{t^{n-1}\, dt}{\sqrt{t^2 - \xi^2}}, \qquad \xi = \frac{x}{a} \tag{2.5}$$

Формула для распределения давления оказывается одинаковой с соответствующей формулой в осесимметричной задаче

$$p(r) = \frac{(n+1)P}{2\pi a^2} \int_\rho^1 \frac{t^{n-1}\, dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \qquad \left(\rho = \frac{r}{a}, \quad P = \frac{2AnC_{n+1}}{\pi\vartheta} a^{n+1}\right) \tag{2.6}$$

при любом порядке касания n.

§ 3. Рассмотрим случай давления клина на плоскость. Пусть грани клина образуют неравные углы с нормалью к плоскости, на которую давит клин, т. е.

$$\begin{aligned} z_1(x) + z_2(x) &= z(x) = A(x+e) && \text{при } x > -e,\ A > 0 \\ z_1(x) + z_2(x) &= z(x) = -B(x+e) && \text{при } x < -e,\ B > 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Введем δ — функцию для выражения вторых производных $f_+''(x)$ и $f_-''(x)$. При $x < e$ имеем

$$\begin{aligned} -\vartheta f_+(x) + \text{const} &= z_+(x) = Ae, \qquad & -\vartheta f_+'(x) &= 0, \qquad & -\vartheta f_+''(x) &= 0 \\ -\vartheta f_-(x) &= z_-(x) = Ax, & -\vartheta f_-'(x) &= A, & -\vartheta f_-''(x) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

тогда как при $x \geqslant e$ имеем

$$
\begin{gathered}
-\vartheta f_+(x) + \mathrm{const} = z_+(x) = \frac{A+B}{2}x + \frac{A-B}{2}e \\
-\vartheta f_+'(x) = \frac{A+B}{2}, \qquad -\vartheta f_+''(x) = \frac{A+B}{2}\delta(x-e) \\
-\vartheta f_-(x) + \mathrm{const} = z_-(x) = \frac{A-B}{2}x + \frac{A+B}{2}e \\
-\vartheta f_-'(x) = \frac{A-B}{2}, \qquad -\vartheta f_-''(x) = -\frac{A+B}{2}\delta(x-e)
\end{gathered} \tag{3.3}
$$

Подстановка этих выражений в формулы § 1 приводит к следующим результатам (выкладки мы опускаем):

$$
p(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2-e^2}} \operatorname{arg\,ch}\left|\frac{a^2+ex}{a(x+e)}\right| \tag{3.4}
$$

$$
P = a\frac{B+A}{\pi\vartheta}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{B-A}{B+A}\right) \tag{3.5}
$$

$$
e = a\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{B-A}{B+A}\right) \tag{3.6}
$$

Отсюда при $B = A$ получается $e = 0$ и формула (3.4) переходит в уже известную [2].

Решение имеет логарифмическую особенность при $x = -e$, т. е. в точке контакта клина с плоскостью. Момент относительно этой точки $M = \frac{1}{2}Pe$. Так как в нашем случае равнодействующая давлений проходит через точку $x = 0$, то связь, препятствующая повороту тел, принимает на себя этот момент.

§ 4. Дадим оценки наибольшего давления в некоторых случаях. Сначала рассмотрим случай точечного контакта. Пусть сумма аппликат обеих поверхностей в окрестности точки первоначального контакта при отсчете от общей касательной плоскости пропорциональна n-й степени расстояния от точки (линии) первоначального контакта, т. е. в осесимметричном случае она равна Ar^n, а в плоском $A|x|^n$, и граница площади контакта имеет уравнение $r = a$ или $|x| = a$. Распределение давления в обоих случаях одинаково и его, согласно (2.6) и (2.5), можно представить так:

$$
p(r) = \frac{P}{\pi a^2}\frac{n+1}{2}\varphi_n\left(\frac{r}{a}\right), \qquad p(x) = \frac{P}{2a}\frac{2n}{\pi}\varphi_n\left(\frac{|x|}{a}\right) \tag{4.1}
$$

где

$$
\varphi_n(t) = \int_t^1 \frac{\alpha^{n-1}\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-t^2}} \tag{4.2}
$$

Значение в центре $\varphi_n(0) = 1/(n-1)$ является максимальным при $n \leqslant 2$. Если же $n > 2$, то это значение есть минимальное, а максимум находится внутри промежутка $0 < t < 1$, тем ближе к границе, чем больше n. Приравнивая нулю производную $\varphi_n'(t)$, получаем для абсциссы точки максимума уравнение

$$
\varphi_n(t) = \frac{1}{(n-1)\sqrt{1-t^2}} \tag{4.3}
$$

которое в случае четного $n = 2p$ становится алгебраическим, принимая после преобразований вид:

$$\sum_{k=0}^{p-1} c_k t^{-2k} = 0 \qquad \left(\sqrt{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) \tag{4.4}$$

где c_k — коэффициенты разложения, указанного в скобках. Из уравнения (4.4) легко находятся максимумы $\varphi_n(t)$ при $n = 4$, 6, 8, 10 и т. д.

Установлено [1], что пик давления сдвигается к границе площадки и становится тем выше и острее, чем больше n. Максимумы $\varphi_n(t)$ для промежуточных значений n можно найти интерполяцией.

Здесь возникают вопросы: как экстраполировать максимумы функций $\varphi_n(t)$ на большие значения n, каков асимптотический закон сдвига точки максимума $t = \tau$ к границе площадки и роста $\max \varphi_n(t)$ при $n \to \infty$? Ответ находится в следующем предложении, представляющем некоторый самостоятельный интерес; здесь оно приводится без доказательства.

Лемма. Пусть функция $f_n(x)$ определена на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ интегралом

$$f_n(x) = \int_x^1 \frac{\alpha^n \, d\alpha}{|g(\alpha) - g(x)|^p} \qquad (0 < p < 1), \tag{4.5}$$

где $g(x)$ — монотонно возрастающая дифференцируемая функция на отрезке $\tau \leqslant x \leqslant 1$ и такая, что $g'(1) \neq 0$. Пусть p фиксировано, а n изменяется Оак, что np становится больше любого наперед заданного числа.

Тогда максимум $f_n(x)$ находится внутри промежутка

$$1 - \frac{1-p}{np} < x < 1 \tag{4.6}$$

в точке

$$x \approx 1 - \frac{\tau}{n} \tag{4.7}$$

где τ — корень уравнения

$$\int_0^\tau \lambda^{-p} e^\lambda \, d\lambda = \tau^{-p} e^\tau \tag{4.8}$$

или, что то же самое:

$$1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\tau^\nu}{\nu! \, (\nu p^{-1} - 1)} = 0 \tag{4.9}$$

При этом

$$\max f_n(x) \approx \frac{1}{n^{1-p} \, |\tau g'(1)|^p} \tag{4.10}$$

В применении к рассматриваемому случаю формулы (4.2) имеем

$$g(x) = x^2, \qquad g'(1) = 2, \qquad p = \tfrac{1}{2}$$

и $n - 1$ вместо n. Из (4.7) и (4.10) получаем

$$\max \varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\tau(n-1)}} \qquad \text{при } x = 1 - \frac{\tau}{n-1} \tag{4.11}$$

при этом τ находится из уравнения

$$\frac{e^{\tau}}{\sqrt{\tau}} = \int_0^{\tau} \frac{e^{\lambda}\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = 2\int_0^{\sqrt{\tau}} e^{\lambda^2} d\lambda \quad \text{или} \quad 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\tau^{\nu}}{\nu!\,(2\nu-1)} = 0 \tag{4.12}$$

согласно (4.8) и (4.10). Вычисление дает $\tau = 0.85402\ldots$.

Для $\varphi_n(x)$ при больших n и $x > 1-(n-1)^{-1}$ получаем оценку

$$\varphi_n\left(1 - \frac{t}{n-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} e^{-t} \int_0^t \frac{e^{\lambda}\, d\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\, e^{-t} \int_0^{\sqrt{t}} e^{\lambda^2} d\lambda \tag{4.13}$$

Эта формула доставляет хорошее приближение для $\varphi_n(x)$. Уже при $n = 6$ ошибка ее не превосходит 4% на краю интервала при $x = 1 - \frac{1}{5} = 0.8$. Из (4.13), (4.1) и (4.2) усматриваем, что коэффициент концентрации давления на краю площадки растет, как $\sqrt{n}$. В то же время в окрестности центра при $n \to \infty$ давление стремится к пределам $\frac{3}{2}(P/\pi a^2)$ и $(2/\pi)(P/2a)$, представляющим давления штампа. Таким образом, законы распределения давления в случае точечного контакта сходятся при повышении порядка соприкосновения неравномерно к законам распределения в случае штампа.

Для сравнения приводим значения τ и $\max \varphi_n(t) = \varphi_n(\tau)$, вычисленные по приближенным формулам (4.1) и по точным формулам (4.4) и (4.3):

Показатели n		4	6	8	10
τ	точн.	0.707	0.826	0.877	0.904
	прибл.	0.715	0.829	0.878	0.905
$\varphi_n(\tau)$	точн.	0.471	0.355	0.297	0.260
	прибл.	0.442	0.342	0.290	0.256

§ 5. Рассмотрим штамп с закругленными краями. Примем в обеих задачах единообразное обозначение: b — радиус или полуширина плоскости штампа, a — радиус или полуширина области контакта, R — радиус закругления на краю штампа, k — коэффициент концентрации давления, т. е.

$$k = p(r) : \frac{P}{\pi b^2}, \qquad k = p(x) : \frac{P}{2b}$$

соответственно для осесимметричной задачи и для плоской задачи.

В осесимметричном случае имеем для отношения

$$\frac{a}{b} = 1 + \alpha = \sec \varphi_0 \tag{5.1}$$

уравнение [2]

$$(\operatorname{tg} \varphi_0 - \varphi_0) \sec^2 \varphi_0 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \varphi_0 = \frac{\pi \vartheta P}{b^2} \left(\frac{R}{b}\right) \tag{5.2}$$

В практически интересных случаях правая часть (5.2) очень мала. Будем считать ее меньше 10^{-3}. Тогда φ_0 и α — малые величины. Удерживая в разложениях только члены низших степеней, получим

$$\frac{2}{3}\varphi_0^3 \approx \frac{\pi \vartheta P}{b^2}\left(\frac{R}{b}\right), \qquad \varphi_0 \approx \sqrt{2\alpha} \tag{5.3}$$

Для давления в зоне $b \leqslant r \leqslant a$ имеем [2]

$$\pi^2 \vartheta R p(r) = \int_r^a \left(2\sqrt{\rho^2 - b^2} - b \arccos \frac{b}{\rho}\right) \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} \tag{5.4}$$

Продифференцируем (5.4) по r, при этом, устраняя особенность под интегралом подстановкой $\rho = \operatorname{ch} \psi$, получим

$$\pi^2 \vartheta R \frac{dp}{dr} = -\frac{a}{r\sqrt{a^2 - r^2}}\left(2\sqrt{a^2 - b^2} - b \arccos \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{r}\int_r^a \frac{2\rho^2 - b^2}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} \tag{5.5}$$

Найдем приближения для формул (5.4) и (5.5), произведя подстановку

$$\rho = b(1 + \sigma), \qquad r = b(1 + s), \qquad a = b(1 + \alpha) \tag{5.6}$$

после чего в разложениях по степеням малых величин σ, s, α выражений, входящих в эти формулы, удержим только первые члены. Получим

$$\pi^2 \vartheta \frac{R}{b} p(r) \approx \int_s^\alpha \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma - s}}\, d\sigma = \sqrt{\alpha(\alpha - s)} + s \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \tag{5.7}$$

$$\pi^2 \vartheta R \frac{dp}{dr} \approx \frac{1}{2}\int_s^\alpha \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma(\sigma - s)}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - s}} = \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - s}} \tag{5.8}$$

Дифференцированием по r правой части (5.7) убеждаемся в правильности правой части (5.8), и обратно.

Приравнивая правую часть (5.8) нулю и полагая для простоты $s = \alpha \operatorname{sech}^2 \lambda$, получаем для числа λ уравнение $\lambda \operatorname{th} \lambda = 1$, после чего правая часть (5.7) становится равной $\lambda\alpha$. Значение λ хорошо известно: $\lambda = 1.199678 \ldots \approx 1.2$; это дает $\operatorname{sech}^2 \lambda = 1 - \lambda^{-2} \approx 0.306$. Итак

$$\pi^2 \vartheta \frac{R}{b} p_{\max} \approx \lambda\alpha \approx 1.2\,\alpha \quad \text{при} \quad \frac{r - b}{a - b} \approx 1 - \lambda^{-2} \approx 0.306 \tag{5.9}$$

Сравнивая (5.9) и (5.3), находим для максимума коэффициента концентрации оценку

$$K_{\max} \approx \frac{3\lambda}{4\sqrt{2\alpha}} \approx \frac{0.9}{\sqrt{2\alpha}} \tag{5.10}$$

В плоской задаче оценка $K_{\max}$ значительно проще, так как распределение давления выражается через элементарные функции. Положив

$$\frac{a}{b} = 1 + \alpha = \sec \varphi_0, \qquad |x| = a \cos \varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{5.11}$$

имеем [2]

$$\varphi_0 \sec^2 \varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_0 = \pi \vartheta R \frac{P}{b^2} \tag{5.12}$$

$$\pi^2 \vartheta \frac{R}{2a} p(x) = \varphi_0 \sin \varphi - \cos \varphi_0 \operatorname{arg\,th}\left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0}\right) + \cos \varphi \operatorname{arg\,th}\left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_0}\right) \quad (x > b) \tag{5.13}$$

Приравняв производную правой части (5.13) нулю, имеем уравнение

$$F(\operatorname{tg} \varphi) = \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{th}\left(\frac{\varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi}\right) = 0 \tag{5.14}$$

Обозначив φ^* корень этого уравнения, получим

$$\pi^2 \vartheta \frac{R}{2b} p_{\max} = \frac{\varphi_0 \sec \varphi_0}{\sin \varphi^*} - \arg \operatorname{th} \left(\frac{\sin \varphi^*}{\sin \varphi_0} \right) \tag{5.15}$$

Пусть λ — корень уравнения $\lambda \operatorname{th} \lambda = 1$. Тогда, положив $\operatorname{tg} \varphi = \varphi_0 / \lambda$, получим

$$F\left(\frac{\varphi_0}{\lambda}\right) = \frac{\varphi_0 - \operatorname{tg} \varphi_0}{\lambda} < 0$$

Точно так же, положив $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0 / \lambda$, получим

$$F\left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\lambda}\right) = \operatorname{tg} \varphi_0 \left[\operatorname{th} \lambda - \operatorname{th}\left(\frac{\varphi_0}{\operatorname{tg} \varphi_0} \lambda\right)\right] > 0$$

Таким образом,

$$\frac{\varphi_0}{\lambda} < \operatorname{tg} \varphi^* < \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{\lambda} \tag{5.16}$$

В практически интересных случаях φ_0 — малая величина, и тогда из предыдущих формул следует

$$\varphi_0 \approx \sqrt{2\alpha}, \qquad \varphi^* \approx \varphi_0 \lambda^{-1} \tag{5.17}$$

$$\frac{2}{3} \varphi_0^3 = \pi \vartheta \frac{R}{b^2} P \tag{5.18}$$

$$\pi^2 \vartheta \frac{R}{b} p_{\max} \approx 2\lambda (\sec \varphi_0 - 1) \approx 2 \lambda \alpha \qquad \left(\frac{x-b}{a-b} \approx 1 - \lambda^{-2} \approx 0.306\right) \tag{5.19}$$

Из (5.18) и (5.19) следует оценка

$$K_{\max} \approx \frac{3\lambda}{\pi \sqrt{2\alpha}} \approx \frac{1.146}{\sqrt{2\alpha}} \tag{5.20}$$

Таким образом, в плоском случае пик давления острее, чем в соответственном осесимметричном случае. Заметим еще, что с точностью до малых величин высших порядков распределение давления в зоне $b < x < a$ такое же, как и в осесимметричном случае. Полагая аналогично предыдущему случаю $x = b(1+s)$ и произведя надлежащие преобразования в формуле (5.13), придем к приближенной формуле

$$\frac{\pi^2}{2} \vartheta \frac{R}{b} p(x) = \sqrt{\alpha(\alpha - s)} + s \arg \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\alpha}{s}} \tag{5.21}$$

отличающейся от (5.7) лишь постоянным множителем. Графики безразмерных давлений $p(x) : (P / 2b)$ и $p(r) : (P / \pi b^2)$, отнесенных к безразмерным абсциссам $s = (x-b)/b$, $s = (r-b)/b$, подобны.

Эти давления в плоском случае больше соответственных давлений в осесимметричном случае в отношении $4 : \pi \approx 1.27$.

В заключение считаю долгом выразить глубокую благодарность И. Я. Штаерману за ценные советы по этой работе.

Поступила 11 VII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я. Обобщение теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел. ДАН СССР, т. XXIX. № 3, 1940.
2. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М.—Л, 1949.