Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

ОБЩАЯ ЗАДАЧА О ДАВЛЕНИИ КРУГОВОГО ШТАМПА НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

М. Я. Леонов

(Львов)

Задача о давлении абсолютно жесткого тела (штампа) на упругое изотропное полупространство, когда область контакта является кругом, рассматривалась в наиболее общем виде в работе [1]. В настоящей статье дается сжатый синтез и развитие результатов указанной работы.

§ 1. Основные уравнения задачи. Упругие перемещения (u, v, w) в прямоугольных координатах представляются в форме

$$u = \varphi_1 + z\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad v = \varphi_2 + z\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad w = \varphi_3 + z\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{1.1}$$

Эти перемещения удовлетворяют уравнениям равновесия при отсутствии массовых сил, когда функции φ_1, φ_2, φ_3 являются гармоническими, причем функция ψ определяется через остальные три следующим условием:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{-1}{3-4\nu}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right) \tag{1.2}$$

Составляющие напряжения на плоскости $z = 0$ по осям x, y, z обозначим соответственно через X, Y и $-p$, т. е.

$$\tau_{xz}(x, y, 0) = X(x, y), \quad \tau_{yz}(x, y, 0) = Y(x, y), \quad \sigma_z(x, y, 0) = -p(x, y) \tag{1.3}$$

Пользуясь законом Гука и формулами (1.1), найдем, что

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial(\varphi_3+\psi)}{\partial x}\Big|_{z=0} = \frac{X(x, y)}{G}, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial(\varphi_3+\psi)}{\partial y}\Big|_{z=0} = \frac{Y(x, y)}{G} \tag{1.4}$$

Предположим пока, что функции X и Y дифференцируемые. Тогда

$$\frac{1}{G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\varphi_3 + \psi) \tag{1.5}$$

В силу гармоничности функции $\varphi_3 + \psi$ имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\varphi_3 + \psi) = -\frac{\partial^2(\varphi_3+\psi)}{\partial z^2}$$

На основании последнего формула (1.5) дает

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi_3+\psi)}{\partial z}\right] = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

Эта формула позволяет определить гармоническую функцию, заключенную в квадратных скобках, по значению ее нормальной производной на плоскости $z = 0$ (см. формулу (1.13)). Считая функции, входящие во все наши формулы, исчезающими на бесконечности, получим из последнего, что

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial (\varphi_3 + \psi)}{\partial z} = \frac{-1}{2\pi} \iint\limits_{\infty} \frac{X_\xi'(\xi, \eta) + Y_\eta'(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} d\xi\, d\eta \qquad (1.6)$$

На основании формулы (1.2) последнюю формулу представим иначе:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + 2(1-\nu)\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \iint\limits_{\infty} \frac{X_\xi' + Y_\eta'}{r} d\xi\, d\eta \qquad (1.7)$$

причем E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} \qquad (1.8)$$

Определяя далее нормальное напряжение на поверхности упругого полупространства через перемещения и пользуясь (1.2), найдем

$$p(x, y) = \frac{-E}{1+\nu}\left[\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + (1-2\nu)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]_{z=0} \qquad (1.9)$$

Исключая из формул (1.7) и (1.9) функцию ψ_z', получим

$$\left.\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} p(x, y) - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E} \iint\limits_{\infty} \frac{X_\xi' + Y_\eta'}{l} d\xi\, d\eta \qquad (1.10)$$

где

$$l = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \qquad (1.11)$$

Формулы (1.10) и (1.4) дают связь между граничными значениями напряжений и функций φ_1, φ_2, φ_3. Этих условий достаточно для определения гармонических функций, входящих в интеграл (1.1), когда заданы напряжения на границе полупространства. Однако в случае контактных задач теории упругости, когда напряжения на границе полупространства задаются частично, необходимо воспользоваться еще выражением для перемещений на поверхности

$$u(x, y, 0) = \varphi_1(x, y, 0), \qquad v(x, y, 0) = \varphi_2(x, y, 0), \qquad w(x, y, 0) = \varphi_3(x, y, 0) \qquad (1.12)$$

В дальнейшем воспользуемся известным в теории потенциала представлением гармонической функции через ее нормальную производную:

$$\varphi = \frac{-1}{2\pi} \iint\limits_{\infty} \frac{\varphi_z'(\xi, \eta, 0)}{r} d\xi\, d\eta \qquad (1.13)$$

Ввиду разрывности функции φ_z' при $z = 0$ мы всюду будем понимать, что $\varphi_z'(x, y, -0) = \varphi_z'(x, y, +0)$. Из формулы (1.13) следует, что

$$\varphi_z' = \frac{-1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_{\infty} \frac{\varphi_z'(\xi, \eta, 0)}{r} d\xi\, d\eta \qquad (z > 0)$$

Замечая, что функция φ_z' удовлетворяет уравнению Лапласа, когда φ — функция гармоническая, можем получить из последнего следующую формулу для решения задачи Дирихле для полупространства $z \geqslant 0$:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \lim_{S \to \infty} \frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_S \frac{\varphi(\xi, \eta, 0)}{r} \, d\xi \, d\eta \tag{1.14}$$

Указанный здесь порядок операций необходим для сходимости предельного перехода при исчезающих функциях φ на бесконечности. Из формулы (1.14) вытекает, что

$$\varphi_z'(x, y, 0) = \frac{-1}{2\pi} \lim_{S \to \infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint\limits_S \frac{\varphi(\xi, \eta, 0)}{l} \, d\xi \, d\eta$$

Так как интеграл здесь — функция гармоническая, то имеем

$$\varphi_z'(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{S \to \infty} \nabla^2 \iint\limits_S \frac{\varphi(\xi, \eta, 0)}{l} \, d\xi \, d\eta \qquad \left(\nabla_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1.15}$$

Так как

$$\iint\limits_S \frac{\varphi}{l} \, d\xi \, d\eta = \iint\limits_S l \, \nabla_\xi \; \varphi \, d\xi \, d\eta - \int\limits_\sigma \left(\varphi \frac{\partial l}{\partial n} - l \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma \tag{1.16}$$

получим из формулы (1.15) при функции φ, исчезающей на бесконечности вместе со своими первыми производными, что

$$\varphi_z' (x \; [\text{illegible}] = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_\infty \frac{1}{l} \nabla^2_{\xi\eta} \varphi(\xi, \eta, 0) \, d\xi \, d\eta \tag{1.17}$$

§ 2. Вспомогательная задача теории потенциала. Обозначим через $V(x, y, z)$ такую гармоническую функцию, которая удовлетворяет условию

$$V(x, y, 0) = \begin{cases} 4\sqrt{R^2 - t^2} & \text{при } t < R \\ 0 & \text{при } t > R \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$t = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} \tag{2.2}$$

причем здесь R, u, v — некоторые параметры. Из формулы (1.15) получим

$$V_z'(x, y, 0) = \frac{\nabla_{xy}}{2\pi} \iint\limits_S \frac{V(\xi, \eta, 0)}{l} \, d\xi \, d\eta \tag{2.3}$$

где область интегрирования S определяется неравенством $t < R$.

Имея в виду формулу (2.1), можем представить последний интеграл как потенциал бесконечно сплющенного эллипсоида вращения.

При этом на основании известных результатов будем иметь

$$\iint\limits_S \frac{V(\xi, \eta, 0)}{l} \, d\xi \, d\eta = \begin{cases} \pi^2 (2R^2 - t^2) & \text{при } t < R \\ 2\pi \left[(2R^2 - t^2) \arcsin \dfrac{t}{R} + R\sqrt{t^2 - R^2}\right] & \text{при } t > R \end{cases} \tag{2.4}$$

Отсюда на основании формулы (2.3) получим

$$V_z'(x, y, 0) = \begin{cases} -2\pi & \text{при } t < R \\ 4\left(\dfrac{R}{\sqrt{t^2 - R^2}} - \arcsin \dfrac{t}{R}\right) & \text{при } t > R \end{cases} \tag{2.5}$$

Используем формулу (2.5) для исследования потенциала заряженного электричеством металлического кругового диска.

Для этого введем функцию

$$\rho(x, y) = \frac{\partial V}{\partial R} = \begin{cases} \dfrac{4R}{\sqrt{R^2 - t^2}} & \text{при } t < R \\ 0 & \text{при } t > R \end{cases} \tag{2.6}$$

Построим далее функцию H следующим образом:

$$H(x, y, z) = \iint \frac{\rho(\xi, \eta)}{r} d\xi\, d\eta = \frac{\partial}{\partial R} \iint \frac{V(\xi, \eta, 0)}{r} d\xi\, d\eta \tag{2.7}$$

На основании формул (2.4) имеем

$$H(x, y, 0) = \begin{cases} 4\pi^2 R & \text{при } t < R \\ 8\pi R \arcsin \dfrac{R}{t} & \text{при } t > R \end{cases} \tag{2.8}$$

Таким образом, заряды, распределенные на диске с плотностью ρ, определяемой формулой (2.6), создают на данном диске постоянный потенциал, каковому условию и должен удовлетворять потенциал заряженной электричеством металлической поверхности.

Сопоставление формул (2.7) и (1.13) показывает, что

$$H_z'(x, y, 0) = \begin{cases} \dfrac{-8\pi R}{\sqrt{R^2 - t^2}} & \text{при } t < R \\ 0 & \text{при } t > R \end{cases} \tag{2.9}$$

Формулы (2.8), (2.9) и (2.5), имеют важное значение в дальнейшем.

§ 3. Определение функции Грина для внешности диска и ее нормальной производной. Функция Грина для внешности кругового диска определена Н. Е. Кочиным, а затем более просто найдена Л. А. Галиным [1]. Здесь, следуя Л. А. Галину, решается частная задача на определение функции Грина и дается более простой метод определения ее нормальной производной на плоскости $z = 0$.

Построим функцию Π следующим образом:

$$\Pi(x, y, z) = \frac{-1}{4\pi^2 R \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} H\left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \tag{3.1}$$

где H — гармоническая функция, определенная формулой (2.7). Из этого определения следует, что функция H является гармонической во всем пространстве, кроме точек плоскости, удовлетворяющих условию

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 \leqslant R^2 \tag{3.2}$$

на которых она принимает постоянное значение.

В силу теоремы Кельвина функция Π будет гармонической всюду, кроме точек плоскости $z = 0$, удовлетворяющих условию

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2} - u\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - v\right)^2 \leqslant R^2 \tag{3.3}$$

где она принимает значение

$$\Pi(x, y, 0) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{3.4}$$

Вычислим в этих точках нормальную производную П. Согласно (3.1)

$$\Pi_z'(x, y, 0) = \frac{-1}{4\pi^2 R}(x^2+y^2)^{-3/2} H_z'\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0\right) \tag{3.5}$$

Отсюда в силу (2.9) для точек, удовлетворяющих (3.3), будет

$$\Pi_z'(x, y, 0) = \frac{2}{\pi}\left[R^2 - \left(\frac{x}{x^2+y^2} - u\right)^2 - \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{3.6}$$

Упростим последнюю формулу. Для этого замечаем, что

$$R^2 - \left(\frac{x}{x^2+y^2} - u\right)^2 - \left(\frac{y}{x^2+y^2} - v\right)^2 =$$
$$= \frac{u^2+v^2-R^2}{x^2+y^2}\left[\frac{R^2}{(u^2+v^2-R^2)^2} - \left(x - \frac{u}{u^2+v^2-R^2}\right)^2 - \left(y - \frac{v}{u^2+v^2-R^2}\right)^2\right] \tag{3.7}$$

Вводя обозначения

$$a = \frac{R}{u^2+v^2-R^2}, \quad X = \frac{u}{u^2+v^2-R^2}, \quad Y = \frac{v}{u^2+v^2-R^2} \tag{3.8}$$

и замечая, что

$$X^2 + Y^2 - a^2 = \frac{1}{u^2+v^2-R^2} \tag{3.9}$$

представим формулу (3.7) следующим образом:

$$R^2 - \left(\frac{x}{x^2+y^2} - u\right)^2 - \left(\frac{y}{x^2+y^2} - v\right)^2 = \frac{a^2-(x-X)^2-(y-Y)^2}{(x^2+y^2)(X^2+Y^2-a^2)} \tag{3.10}$$

При этом формулу (3.6) можем переписать иначе:

$$\Pi_z'(x, y, 0) = \frac{2}{\pi(x^2+y^2)}\sqrt{\frac{X^2+Y^2-a^2}{a^2-(x-X)^2-(y-Y)^2}} \tag{3.11}$$

Из неравенства (3.3) следует, что правая часть (3.10) должна быть положительной. Следовательно неравенство (3.3) переходит в неравенства:

$$(x-X)^2 + (y-Y)^2 < a^2 \qquad \text{при } X^2+Y^2 < a^2 \tag{3.12}$$

$$(x-X)^2 + (y-Y)^2 > a^2 \qquad \text{при } X^2+Y^2 > a^2 \tag{3.13}$$

Назовем областью Σ часть плоскости $z = 0$ внутри или вне круга радиуса a с центром в точке $(X, Y, 0)$ в зависимости от того, где находится начало координат: вне этой окружности согласно (3.12) или внутри ее согласно (3.13). Вне области Σ формулы (2.8) и (3.8) дают

$$\Pi(x, y, 0) = \frac{-2}{\pi\sqrt{x^2+y^2}} \arcsin\sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)}{a^2(x^2+y^2)+(a^2-X^2-Y^2)[a^2-(x-X)^2+(y-Y)^2]}} \tag{3.14}$$

Введем вместо переменных x, y переменные $x^* = x - X$, $y^* = y - Y$. Далее обозначим через $G(x^*, y^*, z, \xi, \eta, \zeta)$ функцию Грина, обращающуюся в нуль в области Σ. Положим

$$G(x^*, y^*, z, -X, -Y, 0) = \frac{1}{\sqrt{(x^*+X)^2+(y^*+Y^2)+z^2}} + \Pi(x^*+X, y^*+Y, z)$$

Условия, налагаемые на функцию Грина, будут удовлетворены. Действительно, эта функция имеет простой полюс в точке $x^* = -X$, $y^* = -Y$, $z = 0$; кроме того, в силу (3.4) имеем $G = 0$, для точек $(x, y, 0)$ в области Σ. Следовательно, на основании формулы (3.14), находим

$$G(x^*, y^*, 0, \xi, \eta, 0) = \frac{1}{\sqrt{(x^* - \xi)^2 + (y^* - \eta)^2}} \times$$

$$\times \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{a^2 [(x^* - \xi)^2 + (y^* - \eta)^2]}{a^2 [(x^* - \xi)^2 + (y^* - \eta)^2] + (a^2 - x^{*2} - y^{*2})(a^3 - \xi^2 - \eta^2)}}\right] \tag{3.15}$$

Обозначая

$$G(x^*, y^*, 0, \xi, \eta, 0) = \gamma(x^*, y^*, \xi, \eta) \tag{3.16}$$

и пользуясь тем, что $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} = \operatorname{arc\,tg} u$, получим

$$\gamma(x^*, y^*, \xi, \eta) = \frac{2}{\pi \sqrt{(x^* - \xi)^2 + (y^* - \eta)^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{(a^2 - x^{*2} - y^{*2})(a^2 - \xi^2 - \eta^2)}}{a \sqrt{(x^* - \xi)^2 + (y^* - \eta)^2}} \tag{3.17}$$

Пользуясь формулой (3.11), имеем

$$\pi G_z'(x^*, y^*, 0, \xi, \eta, 0) = \frac{2}{(x^* - \xi)^2 + (y^* - \eta)^2} \sqrt{\frac{- a}{a^2 - x^{*2} - y^{*2}}} \tag{3.18}$$

Область, в которой применима формула (3.18), определим, полагая $x = x^* + X$, $y = y^* + Y$, $X = -\xi$, $Y = -\eta$. При этом условия (3.12) и (3.13) приводятся к следующему неравенству:

$$\frac{a^2 - x^{*2} - y^{*2}}{\xi^2 + \eta^2 - a^2} > 0 \tag{3.19}$$

Аналогично можно найти, что формула (3.17) применима при

$$(a^2 - x^{*2} - y^{*2})(\xi^2 + \eta^2 - a^2) > 0 \tag{3.20}$$

§ 4. Основные смешанные задачи теории потенциала для полупространства. Обозначим через Σ_1 часть плоскости $z = 0$, лежащую внутри окружности $x^2 + y^2 = a^2$, а через Σ_2 — остальную часть плоскости $z = 0$.

Пусть в области Σ_1 задано граничное значение функции φ, гармонической во всем пространстве, кроме точек плоскости $z = 0$, такой, что

$$\varphi(x, y, -z) = \varphi(x, y, +z) \tag{4.1}$$

Кроме того, в области Σ_2 задается φ_z'.

При указанных условиях требуется: (A) определить $\varphi(x, y, 0)$ в области Σ_2 и (Б) определить $\varphi_z'(x, y, 0)$ в области Σ_1.

Для этого рассмотрим несколько вспомогательных задач.

I. В области Σ_2 расположен простой слой электрических зарядов с плоскостью μ. В области Σ_1 расположена металлическая поверхность, на которой поддерживается нулевой потенциал (заземление).

Потенциал слоя μ и индуцированного им электричества будет

$$\varphi(x, y, z) = \iint\limits_{\Sigma_2} \mu, (\xi, \eta) G(x, y, z, \xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta \tag{4.2}$$

Формула (4.2) следует из представления функции Грина как потенциала единичного заряда при наличии поверхности (Σ_1), на которой поддерживается нулевой потенциал.

Дифференцируя формулу (4.2) по z и пользуясь (3.18), получим

$$\varphi_z'(x, y, 0) = \frac{2}{\pi} \iint_{\Sigma_2} \frac{\mu(\xi, \eta)}{l^2} \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2 - a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, d\xi\, d\eta \tag{4.3}$$

Имея в виду связь между плотностью простого слоя и нормальной производной для случая четной по z функции φ

$$\mu(x, y) = \frac{-1}{2\pi} \varphi_z'(x, y, 0) \tag{4.4}$$

определим функцию φ в области Σ_2 и φ_z' в области Σ_1 по известному значению φ_z' в области Σ_2, когда $\varphi = 0$ в области Σ_1.

II. В области Σ_1 задается предельное значение гармонической функции φ такой, что $\varphi(x, y, -0) = \varphi(x, y, +0)$, исчезающей на бесконечности. Функция φ определяется, как известно, через функцию Грина формулой:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma_1} \varphi(x, y, 0)\, G_z'(x, y, 0, \xi, \eta, \zeta)\, dx\, dy \tag{4.5}$$

Эта формула определяет гармоническую функцию φ в области Σ_2 по известному значению этой функции в области Σ_1. Нормальная производная этой функции в области Σ_2, в силу ее гармоничности в этой области, будет обращаться в нуль (как нечетная по z непрерывная функция), т. е.

$$\varphi_z'(x, y, 0) \quad \text{в области } \Sigma_2 \tag{4.6}$$

Определим теперь φ_z' в области Σ_1, пользуясь формулой (1.15). Для поставленной задачи удобно представить формулу (1.15) в форме

$$2\pi\varphi_z'(X, Y, 0) = \nabla^2 \iint_{\Sigma_1} \frac{\varphi(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2}} + \iint_{\Sigma_2} \frac{\varphi(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta}{[(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2]^{3/2}} \tag{4.7}$$

которая имеет смысл, когда точка $(X, Y, 0)$ принадлежит области Σ_1.

Подставляя в последний интеграл формулу (4.5) и изменяя порядок интегрирования, получим (4.8)

$$2\pi\varphi_z'(X, Y, 0) = \nabla^2 \iint_{\Sigma_1} \frac{\varphi(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2}} - \iint_{\Sigma_1} K(X, Y, x, y)\, \varphi(x, y, 0)\, dx\, dy$$

где

$$K(X, Y, x, y) = \frac{-1}{2\pi} \iint_{\Sigma_2} \frac{G_z'(x, y, 0, \xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta}{[(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2]^{3/2}} \tag{4.9}$$

Синтезируя решения случаев I и II, получим решения задачи (А)

$$\pi^2\varphi(\xi, \eta, 0) = \iint_{\Sigma_1} \frac{\varphi(x, y, 0)}{l^2} \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2 - a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy - \tag{4.10}$$

$$- \iint_{\Sigma_2} \frac{\varphi_z'(x, y, 0)}{l} \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{1}{al} \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)(a^2 - \xi^2 - \eta^2)}\right] dx\, dy \quad (\xi, \eta, 0) \text{ в обл. } \Sigma_2$$

при этом использовано определение l, данное формулой (1.11).

Далее имеем

$$2\pi\varphi_z'(X, Y, 0) = \nabla^2 \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{\varphi(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2 + (Y-\eta)^2}} - \iint\limits_{\Sigma_1} K(X, Y, \xi, \eta)\, \varphi(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta -$$

$$- \frac{2}{\pi} \iint\limits_{\Sigma_2} \frac{\varphi_z'(\xi, \eta, 0)}{l^2} \sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2-a^2}{a^2-x^2-y^2}}\, d\xi\, d\eta \qquad (X, Y, 0) \text{ для обл. } \Sigma_1 \qquad (4.11)$$

Функция K, входящая в формулы (4.8) — (4.11), имеет вид:

$$K(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi^2 l^3} \arcsin \frac{al}{\sqrt{a^2 l^2 + (a^2-x^2-y^2)(a^2-\xi^2-\eta^2)}} -$$

$$- \frac{1}{2\pi^2 l^2 \sqrt{(a^2-x^2-y^2)(a^2-\xi^2-\eta^2)}} \qquad (4.12)$$

При $l = 0$, раскрывая неопределенность, получим

$$K(x, y, x, y) = \frac{-a^3}{6\pi^3 (a^2-x^2-y^2)} \qquad (4.13)$$

Из формул (4.12) и (4.13) видно, что функция K является всюду непрерывной, кроме тех случаев, когда точка (x, y) или (ξ, η) лежит на окружности, разграничивающей области Σ_1 и Σ_2.

§ 5. Определение граничного значения нормальной производной в форме ряда Фурье. Пусть функция Ω_n определяется так:

$$\Omega_n = Q_n(\rho, z) \cos n(\varphi + c_n) \qquad (5.1)$$

где

$$n = \text{const}, \quad c_n = \text{const}, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

Функция Ω_n будет гармонической в области λ, если функция Q_n в этой области удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 Q_n}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q_n}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} Q_n = 0 \qquad (5.2)$$

Предположим, что функция Q_n имеет непрерывные первые производные во всем полупространстве $z \geqslant 0$. Тогда функция Ω_{n+1} такая, что

$$\Omega_{n+1} = Q_{n+1}(\rho, z) \cos(n+1)(\varphi + c_{n+1}) \qquad (5.3)$$

где

$$Q_{n+1}(\rho, z) = \rho^n \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{-n} Q_n) \qquad (5.4)$$

будет функцией непрерывной и гармонической в той же области, в которой удовлетворяется уравнение (5.2).

Гармоничность функции Ω_{n+1} при указанных условиях легко устанавливается вычислением оператора Лапласа от этой функции.

Формула (5.4) дает возможность построить функцию $Q_{n+1}(\rho, z)$ по значению $Q_{n+1}(\rho, 0)$, если мы можем построить функцию $Q_n(\rho, z)$ по $Q_n(\rho, 0)$. Для этого определяем

$$Q_n(\rho, 0) = \rho^n \int \rho^{-n} Q_{n+1}(\rho, 0)\, d\rho \qquad (5.5)$$

Затем нужно определить функцию $Q_n(\rho, z)$ с непрерывной первой производной и воспользоваться формулой (5.4).

Определим нормальную производную от гармонической функции $\Omega_{n+1}(\rho, \varphi, z)$, заданной на круговом диске в виде

$$\Omega_{n+1}(\rho, \varphi, 0) = Q_{n+1}(\rho, 0)\cos(n+1)(\varphi + c_{n+1}) \tag{5.6}$$

и гармоничной всюду, кроме диска $\rho \leqslant a$ плоскости $z = 0$.

Пусть нам известна функция $Q_n(\rho, z)$, которая удовлетворяет условию (5.4). Тогда будем иметь

$$\Omega'_{n+1,z}(\rho, \varphi, 0) = \rho^n \frac{\partial}{\partial\rho}[\rho^{-n} Q_z'(\rho, 0)\cos(n+1)(\varphi + c_{n+1}) \tag{5.7}$$

В случае $n = 0$ для определения $Q'_{0z}(\rho, 0)$ по заданному $Q_0(\rho, 0)$ можно воспользоваться известными решениями для осесимметричной задачи. Для этого случая [2] имеем

$$Q'_{0z}(\rho, 0) = \frac{-c_0}{\sqrt{a^2-\rho^2}} + \frac{2}{\pi}\int_0^{1/2\pi} d\varphi \int_0^{\Phi} \nabla^2\omega_0\left(\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + u^2}\right)du \tag{5.8}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\omega_0(\rho) = Q_0(\rho, 0), \quad \nabla^2\omega(\rho) = \omega''(\rho) + \frac{1}{\rho}\omega'(\rho) \\ \Phi = \sqrt{a^2 - \rho^2\sin\varphi}, \qquad c_0 = \frac{2\omega_0(a)}{\pi} + \frac{2a}{\pi}\int_0^{1/2\pi}\omega_0'(a\sin\varphi)\,d\varphi\end{gathered} \tag{5.9}$$

Чтобы определить $Q_{1z}'(\rho, 0)$ по заданному $Q_1(\rho, 0)$, достаточно заменить в формуле (5.9) $\omega_0'(\rho)$ через $Q_1(\rho, 0)$ и положить $c_0 = 0$. Первое из этих условий вытекает из формулы (5.5), а второе — из условия ограниченности производных от функции Q_0. Тогда получим

$$\begin{aligned}Q_{1z}'(\rho, 0) = \frac{-c_1\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} + \frac{2\rho}{\pi}\int_0^{1/2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\Phi}\Bigg[\frac{\omega_1''\left(\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+u^2}\right)}{\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+u^2}} + \\ + \frac{\omega_1'\left(\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+u^2}\right)}{\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+u^2}} - \frac{\omega_1'\left(\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+u^2}\right)}{\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi+u^2}}\Bigg]du\end{aligned} \tag{5.10}$$

Здесь

$$\omega_1(\rho) = Q_1(\rho, 0), \qquad \Phi = \sqrt{a^2 - \rho^2}\sin\varphi$$

Для того чтобы получить формулу для $Q_2'(\rho, 0)$, следует вместо функции ω_1 подставить функцию ω_1° такую, что

$$\omega_1^\circ(\rho) = \rho\int Q_2(\rho, 0)\frac{d\rho}{\rho} + \text{const}, \quad \int_0^{1/2\pi}\left[\omega_1^{\circ\prime}(a\sin\varphi) + \frac{\omega_1^\circ(a\sin\varphi)}{a\sin\varphi}\right]d\varphi = 0$$

Таким образом, получим формулу для $Q_{2z}'(\rho, 0)$, затем для $Q'_{3z}(\rho, 0)$ и т. д. В общем случае получим

$$Q'_{nz}(\rho, 0) = \frac{-c_n\rho^n}{\sqrt{a^2-\rho^2}} - \frac{2\rho^n}{\pi}\int_0^{1/2\pi}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi\int_0^{\Phi}L_n\omega_n\left(\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + u^2}\right)du \tag{5.11}$$

где

$$Q_n(\rho, 0) = \omega_n(\rho), \quad \Phi = \sqrt{a^2 - \rho^2} \sin \varphi$$

и, кроме того,

$$\begin{gathered} L_n \omega(\rho) = \frac{1}{\rho^n} \left[\omega''(\rho) + \frac{1}{\rho} \omega'(\rho) - \frac{n^2}{\rho^2} \omega(\rho) \right] \\ c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} \sin^{2n-1}\varphi \left[\frac{\omega_n'(a \sin \varphi)}{(a \sin \varphi)^{n-1}} + n \frac{\omega_n(a \sin \varphi)}{(a \sin \varphi)^n} \right] d\varphi \end{gathered} \tag{5.12}$$

Этот вывод формулы (5.12) предложен В. И. Моссаковским.

§ 6. Определение давления под круговым штампом. Пусть осадка под штампом задается в форме следующего ряда Фурье:

$$w(x, y, 0) = \omega_0(\rho) + \omega_1(\rho) \cos(\varphi + c_1) + \cdots + \omega_n(\rho) \cos n(\varphi + c_n) + \cdots \tag{6.1}$$

Будем искать гармоническую функцию φ_3 такую, что

$$\varphi_3(x, y, 0) = w(x, y, 0) \tag{6.2}$$

в следующей форме:

$$\varphi_3 = Q_0(\rho, z) + \cdots + Q_n(\rho, z) \cos n(\varphi + c_n) + \cdots \tag{6.3}$$

где функции Q_n удовлетворяют (5.2) и условию $Q_n(\rho, 0) = \omega_n$.

Из формулы (6.3) следует

$$\varphi_z'(x, y, 0) = Q_{0z}'(\rho, 0) + \cdots + Q_{nz}'(\rho, 0) \cos n(\varphi + c_n) + \cdots \tag{6.4}$$

Предположим пока, что на поверхности полупространства действует только нормальное давление под штампом. В этом случае формула (1.10) определяет давление под штампом следующим образом:

$$p = \frac{-E}{2(1-\nu^2)} \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right|_{z=0} \tag{6.5}$$

В рассматриваемом случае для φ_{3z}' можно воспользоваться формулой (6.4), где Q_{nz}' определяется (5.11). В общем случае из формулы (1.10) следует

$$p(x, y) = \frac{-E}{2(1-\nu^2)} \varphi_{3z}'(x, y, 0) - p_\tau(x, y) \tag{6.6}$$

где

$$p_\tau(x, y) = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \frac{X_\xi' + Y_\eta'}{l} \, d\xi \, d\eta \tag{6.7}$$

Подставляя формулу (4.10) в формулу (6.6), получим

$$\begin{gathered} p(x, y,) = \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \left[\iint_{\Sigma_1} Kw \, d\xi \, d\eta - \nabla^2 \iint_{\Sigma_1} \frac{w}{l} \, d\xi \, d\eta \right] - \\ - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma_2} \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2 - a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \, [p(\xi, \eta) + p_\tau(\xi, \eta)] \, d\xi \, d\eta - p_\tau(x, y) \end{gathered} \tag{6.8}$$

В заключение настоящего параграфа рассмотрим простейшую задачу о давлении штампа, представляющего собой тело вращения, ось которого совпадает с осью z. В отличие от обычной постановки этой задачи, мы будем предполагать, что в области контакта существуют известные касательные усилия. Требуется определить распределение нормального давления под штампом.

Касательные усилия будем считать направленными по радиусу, проведенному из начала координат к рассматриваемой точке. Величина R этих усилий будет функцией радиуса ρ. Определим деформацию поверхности упругого полупространства только от действия указанных касательных сил $R(\rho)$. Для этого введем еще функцию

$$T(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} R(\rho)\, d\rho \tag{6.9}$$

Очевидно, будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -R\cos\varphi = -X, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = -Y, \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = -\nabla^2 T$$

При этом формула (1.10) при $p = 0$ приобретает вид:

$$\left.\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E} \iint_{\infty} \frac{\nabla_{\xi\eta}^2 T}{l}\, d\xi\, d\eta \tag{6.10}$$

Считая функции T, φ_3 исчезающими на бесконечности, найдем из сопоставления формул (6.10) и (1.17), что при действии только указанных касательных усилий поверхность полупространства испытывает осадку

$$w_R = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} T(\rho) \tag{6.11}$$

Обозначая осадку, вызванную нормальным давлением, через w_p, будем иметь $w_p + w_R = Z(\rho)$, где $Z(\rho)$ — уравнение поверхности вдавливаемого штампа, или $w_p(\rho) = Z(\rho) - w_R(\rho)$.

Зная осадку от действия нормального давления, легко вычислить и давление p. Таким образом, получим

$$p(\rho) = \frac{c}{2\pi\sqrt{a^2-\rho^2}} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\Phi} \left\{ \frac{E}{1-\nu^2}\left[Z''(\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + u^2}) + \frac{Z'(\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + u^2})}{\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + u^2}} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left[R'(\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + u^2}) + \frac{R(\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + u^2})}{\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + u^2}} \right] \right\} du \tag{6.12}$$

Замечание. Значение постоянной c здесь не выписывается, Заметим только, что для гладкого штампа, не имеющего углов на границе контакта, будет $c = 0$ из условия ограниченности давления на границе области контакта.

Формула (6.12) дает зависимость нормального давления от сил трения R, возникающих при вдавливании жесткого тела вращения в упругое полупространство. Ввиду сложности строгой формулировки задачи с учетом сил трения мы ограничиваемся здесь указанием на возможности использования формулы (6.12) для приближенной оценки влияния трения. Если, например, положить $R = kp$, то полученные значения p и R из системы формул (6.12) и $R = kp$ при малом k будут близко соответствовать действительности всюду, кроме малой окрестности начала координат, где условие $R = kp$ является непригодным.

§ 7. Определение осадки вне штампа. В общем случае осадка вне штампа может быть определена по формуле (4.9), где следует положить $\varphi_3(x, y, 0) = w(x, y, 0)$ и воспользоваться формулой (1.10) для $\varphi_{3z}'(x, y, 0)$. В частности, когда вне штампа отсутствует давление, а касательные усилия отсутствуют по всей поверхности полупространства, будем иметь

$$w(\xi, \eta, 0) = \frac{1}{\pi^2} \iint_{\Sigma_1} \frac{w(x, y, 0)}{l^2} \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2 - a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy \tag{7.1}$$

Заметим, что формула (7.1) пригодна для вычисления осадки вне области контакта независимо от того, будет ли область контакта Σ_1 внутри круга радиуса a или вне его. В последнем случае числитель и знаменатель подкоренного выражения в формуле (7.1) будут отрицательными, так что положительность его будет обеспечена. Это является причиной того, что множитель $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ оставлен под знаком интеграла.

Сказанное относится в равной степени к формулам (4.9), (4.10) и к вытекающим из них формулам. Иначе говоря, формулы (4.9) и (4.10) инвариантны относительно областей Σ_1 и Σ_2, т. е. в этих формулах можно поменять местами Σ_1 и Σ_2.

В случае, если осадка под штампом задана в форме ряда Фурье (6.1), то, пользуясь тем, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi + c_n)\, d\varphi}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \psi)} = \frac{2\pi}{r^2 - \rho^2} \frac{\rho^n}{r^n} \cos n(\psi + c_n) \quad (r > \rho) \tag{7.2}$$

и считая в формуле (7.1), что

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \ \psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\eta}{\xi}, \ l^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \psi), \ dx\, dy = \rho\, d\varphi\, d\rho$$

найдем

$$w = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^n} \int_0^a \frac{\rho^{n+1}}{r^2 - \rho^2} \frac{\omega_n(\rho)\, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \right] \cos n(\psi + c_n) \tag{7.3}$$

Формула (7.3) оказывается полезной для исследования давления под двумя круговыми штампами и, в частности, под штампом, представляющим собой в плане прямоугольную полосу.

Поступила 30 I 1952

Институт машиноведения и автоматики
Академии наук УССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Пространственные контактные задачи теории упругости для штампов круговой формы в плане. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.
2. Леонов М. Я. К теории расчета упругих оснований. ПММ, т. II, вып. 2, 1939.