Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

# МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ ЗАДАНИИ НА КОНТУРЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

**Г. А. Гринберг, Н. Н. Лебедев, Я. С. Уфлянд**

(Ленинград)

В § 1 работы излагается недавно предложенный метод решения общей бигармонической задачи для неоднородного бигармонического уравнения при задании на контуре области значений искомой функции и ее нормальной производной. К этому классу задач сводятся общая плоская задача теории упругости, а также задача об изгибе упругой тонкой плиты с закрепленным контуром.

Этот метод требует построения специальным образом ортогонализованных систем гармонических функций, характер которых определяется видом области.

В § 2 данной работы проведено построение таких систем для прямоугольной области с любым отношением сторон. По полученным формулам проведены детальные численные расчеты для квадратной области, причем приведены таблицы и графики изгибающих моментов на контуре плиты, находящейся под действием сосредоточенной силы. Проведены также численные расчеты напряжений, возникающих в квадратной пластинке под действием симметричных растягивающих усилий (§§ 3—4).

**§ 1. Общий метод интегрирования бигармонического уравнения.** Рассмотрим бигармоническое уравнение с правой частью

$$\triangle\triangle w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = Q(x, y) \qquad (1.1)$$

Это уравнение встречается в ряде вопросов теории упругости. Например, в случае изгиба упругой тонкой плиты функция $Q(x, y)$ пропорциональна внешней поперечной нагрузке $q(x, y)$ на плиту:

$$Q(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (1.2)$$

Здесь $D$ — цилиндрическая жесткость плиты, $E$ — модуль упругости, $h$ — толщина плиты, $\nu$ — коэффициент поперечного сжатия.

Однородному бигармоническому уравнению ($Q(x, y) \equiv 0$) удовлетворяет функция напряжений в плоской задаче теории упругости.

Уравнение (1.1) должно быть проинтегрировано при некоторых граничных условиях. В каждой точке контура $C$ рассматриваемой области $\sigma$ должны выполняться два краевых условия. В настоящей работе рассматриваются граничные условия следующего вида:

$$[w]_C = f(s), \qquad \left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]_C = g(s) \qquad (1.3)$$

где $s$ — длина дуги контура, а $\nu$ — внешняя нормаль к нему.

В задаче об изгибе плиты с закрепленным контуром $f = g = 0$. В случае плоской задачи теории упругости функции $f$ и $g$ определенным образом связаны с заданными граничными значениями нормальных и касательных напряжений (§ 4). Таким образом, уравнение (1.1) при краевых условиях (1.3) включает в себя как частные случаи и задачу изгиба упругой тонкой плиты с закрепленным контуром и плоскую задачу теории упругости.

Изложим некий общий метод решения таких краевых задач [1]. Положим

$$\triangle w = \triangle w_0 - u \tag{1.4}$$

где $w_0$ — некоторое частное решение уравнения (1.1) [2], так что

$$\triangle\triangle w_0 = Q \tag{1.5}$$

Тогда очевидно, что $u$ — гармоническая функция, т. е.

$$\triangle u = 0 \tag{1.6}$$

Пусть $\psi_n(x, y)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — полная в данной области система гармонических функций, т. е. такая система, что всякая гармоническая в этой области функция $v(x, y)$ может быть представлена в виде конечной или бесконечной суммы вида

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \psi_n \tag{1.7}$$

где $v_n$ — некоторые постоянные (коэффициенты разложения).

Будем далее считать, что система эта ортонормирована по области, т. е. что справедливы следующие равенства:

$$\iint_\sigma \psi_n \psi_m \, d\tau = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ 1 & (n = m) \end{cases} \tag{1.8}$$

Здесь $d\tau$ — элемент площади; интегрирование производится по всей области. Коэффициенты $v_n$ могут быть записаны в такой форме:

$$v_n = \iint_\sigma v \psi_n \, d\tau$$

Применяя эту формулу к функции $v = u$, введенной выше, учитывая соотношение (1.4) и пользуясь формулой Грина, найдем, что

$$u_n = \iint_\sigma (\triangle w_0) \psi_n \, d\tau - \iint_\sigma (\triangle w) \psi_n \, d\tau =$$

$$= \iint_\sigma (\triangle w_0) \psi_n \, d\tau - \iint_\sigma w (\triangle \psi_n) \, d\tau - \int_C \left( \psi_n \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} \right) ds$$

где последний интеграл берется по контуру области в положительном направлении.

---

[1] См. работу Г. А. Гринберга [1].

[2] Такое частное решение всегда может быть найдено.

Вспоминая, что $\Delta\psi_n = 0$, и заменяя $[\partial w / \partial \nu]_C$ и $[w]_C$ через их значения (1.3), получаем окончательную формулу для искомых величин $u_n$:

$$u_n = \iint_{\sigma} (\Delta w_0)\, \psi_n \, d\tau + \int_{C} \left( f \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} - g\psi_n \right) ds \tag{1.9}$$

После нахождения коэффициентов $u_n$ задача в принципе может считаться решенной, ибо, зная величину

$$\Delta w = \Delta w_0 - \sum_{n=0}^{\infty} u_n \psi_n \tag{1.10}$$

можно всегда найти функцию $w$, решая либо задачу Дирихле (граничное условие $[w]_C = f$), либо задачу Неймана (граничное условие $[\partial w / \partial \nu]_C = g$).

Рассмотрим еще вопрос об ортонормировании заданной системы функций по области.

Пусть имеется некоторая полная система гармонических функций $\varphi_n(x, y)$. Составим из нее систему функций $\psi_n(x, y)$ при помощи следующих соотношений:

$$\psi_0 = A_0 \varphi_0, \qquad \psi_n = A_n \left[ \sum_{p=0}^{n-1} a_{np} \psi_p - \varphi_n \right] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.11}$$

Введя обозначение

$$\varphi_{np} = \iint_{\sigma} \varphi_n \varphi_p d\tau \tag{1.12}$$

и определяя числа $a_{np}$ и $A_n$ из условий ортогональности и нормировки, получаем после выкладок следующие формулы:

$$\begin{gathered} a_{n0} = A_0 \varphi_{n0} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots) \\ a_{np} = A_p \left[ \sum_{s=0}^{p-1} a_{ps} a_{ns} - \varphi_{np} \right] \qquad \begin{pmatrix} n=2, 3, 4, \ldots \\ p=1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix} \\ A_0 = \frac{1}{\sqrt{\varphi_{00}}}, \qquad A_n = \left( \varphi_{nn} - \sum_{p=0}^{n-1} a_{np}^2 \right)^{-1/2} \end{gathered} \tag{1.13}$$

Чтобы иметь окончательные выражения для ортонормированных функций $\psi_n$, положим

$$\psi_n = \sum_{s=0}^{n} M_{ns} \varphi_s \tag{1.14}$$

Коэффициенты $M_{ns}$ выражаются через числа $a_{np}$ и $A_n$ следующим образом:

$$\begin{gathered} M_{ns} = A_n \sum_{p=s}^{n-1} a_{np} M_{ps} \qquad \begin{pmatrix} s=0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ n=1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix} \\ M_{nn} = -A_n \quad (n=1, 2, 3\ldots), \qquad M_{00} = A_0 \end{gathered} \tag{1.15}$$

Формулы (1.13) и (1.15) дают возможность последовательно вычислять коэффициенты $M_{ns}$.

На основании всего изложенного решение поставленной бигармонической проблемы складывается из следующих этапов:

1. Подбор для данной области полной системы гармонических функций $\varphi_n(x, y)$.

2. Построение на основе ее ортонормированной системы функций $\psi_n(x, y)$, т. е. вычисление коэффициентов $\varphi_{np}$, $a_{np}$, $A_n$ и $M_{ns}$.

3. Нахождение частного решения $w_0$.

4. Определение коэффициентов $u_n$ по формуле (1.9), после чего функция $\triangle w$ дается формулой

$$\triangle w = \triangle w_0 - \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{s=0}^{n} M_{ns}\varphi_n \tag{1.16}$$

5. Разыскание функции $w$.

Заметим, что первые два этапа не связаны с величинами $Q$, $f$, $g$, т. е. все относящиеся к этим этапам вычисления для данной области могут быть произведены раз навсегда (независимо от вида поперечной нагрузки в случае задачи изгиба плиты и независимо от внешних усилий в случае плоской задачи теории упругости).

**§ 2. Построение ортонормированной системы функций для прямоугольной области.** Обратимся к частному случаю прямоугольной области.

Поместим начало координат $O$ в центр прямоугольника, а оси $x$ и $y$ направим параллельно его сторонам, имеющим соответственно длины $2a$ и $2b$.

Если рассматривается задача поперечного изгиба плиты прямоугольной формы произвольной внешней нагрузкой, то такую задачу удобно разбить на четыре более простые задачи, обладающие определенными свойствами симметрии, а именно, можно положить

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^{4} q^{(i)}(x, y) \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}
q^{(1)}(x, y) = \frac{1}{4}\left[q(x, y) + q(-x, -y) + q(-x, y) + q(x, -y)\right] \\
q^{(1)}(-x, y) = q^{(1)}(x, y), \qquad q^{(1)}(x, -y) = q^{(1)}(x, y) \\
q^{(2)}(x, y) = \frac{1}{4}\left[q(x, y) + q(-x, -y) - q(-x, y) - q(x, -y)\right] \\
q^{(2)}(-x, y) = -q^{(2)}(x, y), \qquad q^{(2)}(x, -y) = -q^{(2)}(x, y) \\
q^{(3)}(x, y) = \frac{1}{4}\left[q(x, y) - q(-x, -y) + q(-x, y) - q(x, -y)\right] \\
q^{(3)}(-x, y) = q^{(3)}(x, y), \qquad q^{(3)}(x, -y) = -q^{(3)}(x, y) \\
q^{(4)}(x, y) = \frac{1}{4}\left[q(x, y) - q(-x, -y) - q(-x, y) + q(x, -y)\right] \\
q^{(4)}(-x, y) = -q^{(4)}(x, y), \qquad q^{(4)}(x, -y) = q^{(4)}(x, y)
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Аналогичным образом можно разложить и заданные внешние напряжения в случае плоской задачи теории упругости, и тогда каждая из функций $f$ и $g$ в условиях (1.3) также может быть разложена на четыре части, обладающие соответствующими свойствами симметрии.

Теперь всю бигармоническую задачу можно разбить на четыре задачи, положив

$$w = \sum_{i=1}^{4} w_i$$

$$\Delta w_i = Q_i, \qquad [w_i]_C = f_i, \qquad \left[\frac{\partial w_i}{\partial \nu}\right]_C = g_i \tag{2.3}$$

$$\Delta w_i = \Delta w_0^{(i)} - u_i, \qquad \Delta\Delta w_0^{(i)} = Q_i, \qquad \Delta u_i = 0$$

$$u_i = \sum_{R=0}^{\infty} u_n^{(i)} \psi_n^{(i)}, \qquad \psi_n^{(i)} = \sum_{s=0}^{n} M_{ns}^{(i)} \varphi_n^{(i)}$$

В качестве подходящей полной системы гармонических функций $\varphi_n^{(i)}(x, y)$ можно выбрать функции, являющиеся частными решениями соответствующей задачи Дирихле с однородными граничными условиями. Такие функции можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(1)} &= \cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n+1}{2a}\pi x\,\frac{\operatorname{ch}\frac{n+1}{2a}\pi y}{\operatorname{ch}\frac{n+1}{2a}\pi b} + \sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi y}{2b}\,\frac{\operatorname{ch}\frac{n}{2b}\pi x}{\operatorname{ch}\frac{n}{2b}\pi a}\\
\varphi_n^{(2)} &= \cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n+2}{2a}\pi x\,\frac{\operatorname{sh}\frac{n+2}{2a}\pi y}{\operatorname{sh}\frac{n+2}{2a}\pi b} + \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n+1}{2b}\pi y\,\frac{\operatorname{sh}\frac{n+1}{2b}\pi x}{\operatorname{sh}\frac{n+1}{2b}\pi a}\\
\varphi_n^{(3)} &= \cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n+1}{2a}\pi x\,\frac{\operatorname{sh}\frac{n+1}{2a}\pi y}{\operatorname{sh}\frac{n+1}{2a}\pi b} + \sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n+1}{2b}\pi y\,\frac{\operatorname{ch}\frac{n+1}{2b}\pi x}{\operatorname{ch}\frac{n+1}{2b}\pi a}\\
\varphi_n^{(4)} &= \cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n+2}{2a}\pi x\,\frac{\operatorname{ch}\frac{n+2}{2a}\pi y}{\operatorname{ch}\frac{n+2}{2a}\pi b} + \sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi y}{2b}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{n}{2b}\pi x}{\operatorname{sh}\frac{n}{2b}\pi a}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Коэффициенты $\varphi_{np}^{(i)}$ даются при этом формулами

$$\varphi^{(i)}_{2k,\,2s} = \varphi^{(i)}_{2k+1,\,2s+1} = 0 \qquad (k \neq s), \qquad \varphi_{np}^{(i)} = \varphi_{pn}^{(i)} \tag{2.5}$$

$$\varphi^{(1)}_{2k,\,2s+1} = \frac{4\left(\frac{2k+1}{2a}\pi\right)\left(\frac{2s+1}{2b}\pi\right)}{\left[\left(\frac{2k+1}{2a}\pi\right)^2 + \left(\frac{2s+1}{2b}\pi\right)^2\right]^2}, \qquad \varphi^{(1)}_{2k,\,2k} = \frac{ab}{\operatorname{ch}^2\frac{2k+1}{2a}\pi b}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{2k+1}{a}\pi b}{\frac{2k+1}{a}\pi b} + 1\right]$$

$$\varphi^{(1)}_{2s+1,\,2s+1} = \frac{ab}{\operatorname{ch}^2\frac{2s+1}{2b}\pi a}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{2s+1}{b}\pi a}{\frac{2s+1}{b}\pi a} + 1\right] \tag{2.6}$$

$$\varphi^{(2)}_{2k,\,2s+1} = \frac{4\left(\frac{k+1}{a}\pi\right)\left(\frac{s+1}{b}\pi\right)}{\left[\left(\frac{k+1}{a}\pi\right)^2 + \left(\frac{s+1}{b}\pi\right)^2\right]^2}, \qquad \varphi^{(2)}_{2k,\,2k} = \frac{ab}{\operatorname{sh}^2\frac{k+1}{a}\pi b}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{2(k+1)}{a}\pi b}{\frac{2(k+1)}{a}\pi b} - 1\right]$$

$$\varphi^{(2)}_{2s+1,\,2s+1} = \frac{ab}{\operatorname{sh}^2\frac{s+1}{b}\pi a}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{2(s+1)}{b}\pi a}{\frac{2(s+1)}{b}\pi a} - 1\right] \tag{2.7}$$

$$\varphi^{(3)}_{2k,\,2s+1}=\frac{4\left(\frac{2k+1}{2a}\pi\right)\left(\frac{s+1}{b}\pi\right)}{\left[\left(\frac{2k+1}{2a}\pi\right)^2+\left(\frac{s+1}{b}\pi\right)^2\right]^2},\qquad \varphi^{(3)}_{2k,\,2k}=\frac{ab}{\operatorname{sh}^2\frac{2k+1}{2a}\pi b}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{2k+1}{a}\pi b}{\frac{2k+1}{a}\pi b}-1\right]$$

$$\varphi^{(3)}_{2s+1,\,2s+1}=\frac{ab}{\operatorname{ch}^2\frac{s+1}{b}\pi a}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{2(s+1)}{b}\pi a}{\frac{2(s+1)}{b}\pi a}+1\right]\tag{2.8}$$

$$\varphi^{(4)}_{2k,\,2s+1}=\frac{4\left(\frac{k+1}{a}\pi\right)\left(\frac{2s+1}{2b}\pi\right)}{\left[\left(\frac{k+1}{a}\pi\right)^2+\left(\frac{2s+1}{2b}\pi\right)^2\right]^2},\qquad \varphi^{(4)}_{2k,\,2k}=\frac{ab}{\operatorname{ch}^2\frac{k+1}{a}\pi b}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{2(k+1)}{a}\pi b}{\frac{2(s+1)}{a}\pi b}+1\right]$$

$$\varphi^{(4)}_{2s+1,\,2s+1}=\frac{ab}{\operatorname{sh}^2\frac{2s+1}{2b}\pi a}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{2s+1}{b}\pi a}{\frac{2k+1}{a}\pi b}-1\right]\tag{2.9}$$

В табл. 1—3, даются коэффициенты ${\varphi_{np}}^{(i)}$, ${a_{np}}^{(i)}$, ${A_n}^{(i)}$ и ${M_{ns}}^{(i)}$ для квадратной области, причем расчет велся на девять функций и было положено $a=1$; заметим, что в этом случае ${\varphi_{np}}^{(4)}\equiv{\varphi_{np}}^{(3)}$ и, следовательно,

$${a_{np}}^{(4)}\equiv{a_{np}}^{(3)},\ \ {A_n}^{(4)}\equiv{A_n}^{(3)},\ \ {M_{ns}}^{(4)}\equiv{M_{ns}}^{(3)}.$$

**§ 3. Изгиб упругой тонкой прямоугольной плиты сосредоточенной нагрузкой.** Полагая в (1.1) и (1.3)

$$Q=\frac{q}{D},\qquad f=g=0\tag{3.1}$$

из приведенного общего решения получим решение задачи об изгибе тонкой упругой плиты с закрепленным контуром под действием поперечной нагрузки.

Для прямоугольной области один из возможных способов нахождения исходной полной системы гармонических функций $\varphi_n(x, y)$ и построения соответствующей ортонормированной системы функций $\psi_n(x, y)$ указан в § 2. Дальнейшие действия — нахождение частного решения $w_0$ и вычисление коэффициентов $u_n$ — связаны уже с конкретным типом нагрузки $q(x, y)$.

Будем разыскивать функцию Грина данной задачи, т. е. найдем прогиб $w(x, y)$ в том случае, когда внешняя нагрузка представляет собой сосредоточенную силу $P$, приложенную в произвольной точке $(x_0, y_0)$ плиты. В соответствии с разбиением всей задачи на четыре отдельные задачи [формулы (2.1)—(2.3)], будем определять поотдельности частные решения ${w_0}^{(i)}$ и коэффициенты ${u_n}^{(i)}$.

Мы во всех случаях будем искать частные решения, соответствующие случаю свободно опертых краев плиты.

В случае задачи I внешняя нагрузка $q(x, y)$ складывается, очевидно, из четырех сосредоточенных сил величины $P/4$ каждая, приложенных в симметрично расположенных точках.

Разложим ${w_0}^{(1)}$ в двойной тригонометрический ряд:

$${w_0}^{(1)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}{w_0}^{(1)}\cos\frac{2m+1}{2a}\pi x\cos\frac{2n+1}{2b}\pi y\tag{3.2}$$

*Таблица 1*

Коэффициенты $\varphi_{np}^{(i)}$

| $n$ \ $p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | *Задача I* ($i = 1$) | |
| 0 | 0.7427 | | | | | | | | | |
| 1 | 0.4053 | 0.7427 | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 0.4863 | 0.2125 | | | | | | | |
| 3 | 0.04863 | 0 | 0.04503 | 0.2125 | | | | | | |
| 4 | 0 | 0.01199 | 0 | 0.02104 | 0,1273 | | | | | |
| 5 | 0.01199 | 0 | 0.02104 | 0 | 0.01621 | 0.1273 | | | | |
| 6 | 0 | 0.004539 | 0 | 0,01012 | 0 | 0.01036 | 0.09094 | | | |
| 7 | 0.004539 | 0 | 0.01012 | 0 | 0.01036 | 0 | 0.008272 | 0.09094 | | |
| 8 | 0 | 0.002170 | 0 | 0.005404 | 0 | 0.006492 | 0 | 0.006043 | 0.07074 | |
| 9 | 0.002170 | 0 | 0.005404 | 0 | 0.006492 | 0 | 0.006043 | 0 | 0.005003 | 0.07074 |
| | | | | | | | | | *Задача II* ($i = 2$) | |
| 0 | 0.3120 | | | | | | | | | |
| 1 | 0.1013 | 0.3120 | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 0.03242 | 0.1592 | | | | | | | |
| 3 | 0.03242 | 0 | 0.02533 | 0.1592 | | | | | | |
| 4 | 0 | 0.01216 | 0 | 0.01439 | 0.1061 | | | | | |
| 5 | 0.01216 | 0 | 0.01439 | 0 | 0.01126 | 0.1061 | | | | |
| 6 | 0 | 0.005609 | 0 | 0.008106 | 0 | 0.007781 | 0.07955 | | | |
| 7 | 0.005609 | 0 | 0.008106 | 0 | 0.007781 | 0 | 0.006331 | 0.07955 | | |
| 8 | 0 | 0.002998 | 0 | 0.004819 | 0 | 0.005260 | 0 | 0.004823 | 0.06365 | |
| 9 | 0.002998 | 0 | 0.004819 | 0 | 0.005260 | 0 | 0.004823 | 0 | 0.004053 | 0.06365 |
| | | | | | | | | | *Задача III* ($i = 3$) | |
| 0 | 0.5051 | | | | | | | | | |
| 1 | 0.1297 | 0.3246 | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 0.05755 | 0.2119 | | | | | | | |
| 3 | 0.02244 | 0 | 0.03113 | 0.1592 | | | | | | |
| 4 | 0 | 0.01928 | 0 | 0.01928 | 0.1273 | | | | | |
| 5 | 0.007107 | 0 | 0.01441 | 0 | 0.01307 | 0.1061 | | | | |
| 6 | 0 | 0.008078 | 0 | 0.01074 | 0 | 0.009423 | 0.09094 | | | |
| 7 | 0.003069 | 0 | 0.007299 | 0 | 0.008187 | 0 | 0.007109 | 0.07955 | | |
| 8 | 0 | 0.004038 | 0 | 0.006202 | 0 | 0.006396 | 0 | 0.005553 | 0.07074 | |
| 9 | 0.001589 | 0 | 0.004094 | 0 | 0.005188 | 0 | 0.005110 | 0 | 0.004454 | 0.06365 |

*Таблица 2*

Коэффициенты $a_{np}^{(i)}$ и $A_n^{(i)}$

| $n$ \ $p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $A_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | *Задача I* | | |
| 0 | | | | | | | | | | 1.160 |
| 1 | 0.4701 | | | | | | | | | 1.384 |
| 2 | 0 | −0.06730 | | | | | | | | 2.192 |
| 3 | 0.05641 | 0.03670 | −0.1041 | | | | | | | 2.252 |
| 4 | 0 | −0.01659 | 0.002448 | −0.04932 | | | | | | 2.833 |
| 5 | 0.01391 | 0.009050 | −0.04746 | 0.01364 | −0.04858 | | | | | 2.860 |
| 6 | 0 | −0.006282 | 0.0009268 | −0.02353 | 0.003581 | −0.03132 | | | | 3.346 |
| 7 | 0.005265 | 0.003425 | −0.02269 | 0.006272 | −0.03057 | 0.007879 | −0.02951 | | | 3.361 |
| 8 | 0 | −0.00303 | 0.0004430 | −0.01252 | 0.01894 | 0.01946 | −0.003112 | −0.02166 | | 3.786 |
| 9 | 0.002517 | 0.001637 | −0.01209 | 0.003290 | −0.01901 | 0.004553 | 0.02125 | 0.005236 | −0.02029 | 3.797 |
| | | | | | | | | *Задача II* | | |
| 0 | | | | | | | | | | 1.790 |
| 1 | 0.1813 | | | | | | | | | 1.893 |
| 2 | 0 | −0.06137 | | | | | | | | 2.537 |
| 3 | 0.05803 | 0.01991 | −0.06737 | | | | | | | 2.572 |
| 4 | 0 | −0.02302 | 0.003585 | −0.03881 | | | | | | 3.100 |
| 5 | 0.02177 | 0.007472 | −0.03767 | 0.01016 | −0.03708 | | | | | 3.122 |
| 6 | 0 | −0.01062 | 0.001654 | −0.02168 | 0.003382 | −0.02582 | | | | 3.574 |
| 7 | 0.01004 | 0.003445 | −0.02110 | 0.005301 | −0.02523 | 0.006325 | −0.02418 | | | 3.586 |
| 8 | 0 | −0.005675 | 0.0008836 | −0.01284 | 0.001959 | −0.01729 | 0.002831 | −0.02069 | | 3.992 |
| 9 | 0.005366 | 0.001842 | −0.01252 | 0.003066 | −0.01694 | 0.003931 | −0.01747 | 0.004873 | −0.01743 | 4.000 |
| | | | | | | | | *Задача III* | | |
| 0 | | | | | | | | | | 1.407 |
| 1 | 0.1825 | | | | | | | | | 1.847 |
| 2 | 0 | −0.1063 | | | | | | | | 2.233 |
| 3 | 0.03157 | 0.01064 | −0.07204 | | | | | | | 2.558 |
| 4 | 0 | −0.03581 | 0.008501 | −0,05185 | | | | | | 2.848 |
| 5 | 0.009997 | 0.003369 | −0.03298 | 0.006978 | −0.03939 | | | | | 3.202 |
| 6 | 0 | −0.01492 | 0.003541 | −0.02859 | 0.005827 | −0.03208 | | | | 3.356 |
| 7 | 0.004318 | 0.001455 | −0,01664 | 0.003456 | 0.02438 | −0.005062 | −0.02548 | | | 3.581 |
| 8 | 0 | −0.007458 | 0.001770 | −0.01639 | 0.003224 | −0.02320 | 0.004527 | −0.02133 | | 3.796 |
| 9 | 0.002236 | 0.0007538 | −0.009321 | 0.001918 | −0.01536 | 0.003044 | −0.01811 | 0.02353 | −0.01978 | 4.014 |

*Таблица 3*

Числа $M_{ns}^{(i)}$

| $n \backslash s$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | *Задача I* | |
| 0 | 1.160 | | | | | | | | | |
| 1 | 0.7545 | —1.384 | | | | | | | | |
| 2 | —0.1114 | 0.2042 | —2.192 | | | | | | | |
| 3 | 0.2358 | —0.1623 | 0.5138 | —2.252 | | | | | | |
| 4 | —0.06765 | 0.08913 | —0.08700 | 0.3147 | —2.833 | | | | | |
| 5 | 0.09944 | —0.08225 | 0.3295 | —0.1316 | 0.3936 | —2.860 | | | | |
| 6 | —0.04601 | 0.05220 | —0.08281 | 0.1948 | —0.07515 | 0.2997 | —3.346 | | | |
| 7 | 0.05683 | —0.05142 | 0.2039 | —0.1026 | 0.3089 | —0.1054 | 0.3320 | —3.361 | | |
| 8 | —0.03295 | 0.03530 | —0.07065 | 0.1294 | —0.07553 | 0.2229 | —0.06663 | 0.2755 | —3.786 | |
| 9 | 0.03783 | —0.03581 | 0.1352 | —0.08084 | 0.2817 | —0.09287 | 0.2817 | —0.08819 | 0.2918 | —3.797 |
| | | | | | | | | | *Задача II* | |
| 0 | 1.790 | | | | | | | | | |
| 1 | 0.6142 | —1.893 | | | | | | | | |
| 2 | —0.09562 | 0.2948 | —2.537 | | | | | | | |
| 3 | 0.3151 | —0.1480 | 0.4396 | —2.572 | | | | | | |
| 4 | —0.08280 | 0.1562 | —0.08110 | 0.3094 | —3.100 | | | | | |
| 5 | 0.1670 | —0.1018 | 0.3216 | —0.1174 | 0.3589 | —3.122 | | | | |
| 6 | —0.06469 | 0.09653 | —0.07970 | 0.2138 | —0.07059 | 0.2881 | —3.574 | | | |
| 7 | 0.1022 | —0.07330 | 0.2219 | —0.07287 | 0.2947 | —0.09582 | 0.3100 | —3.586 | | |
| 8 | —0.05174 | 0.06691 | 0.07353 | 0.01508 | 0.07417 | 0.2267 | —0.06599 | 0.2962 | —3.992 | |
| 9 | 0.06988 | —0.05556 | 0.1580 | —0.07176 | 0.2264 | —0.08688 | 0.2604 | —0.09052 | 0.2784 | —4.000 |
| | | | | | | | | | *Задача III* | |
| 0 | 1.407 | | | | | | | | | |
| 1 | 0.4743 | —1.847 | | | | | | | | |
| 2 | —0.1126 | 0.4383 | —2.233 | | | | | | | |
| 3 | 0.1473 | —0.1310 | 0.4115 | —2.558 | | | | | | |
| 4 | —0.07285 | 0.2183 | —0.1148 | 0.3777 | —2.848 | | | | | |
| 5 | 0.07451 | —0.09667 | 0.2595 | —0.1048 | 0.3595 | —3.202 | | | | |
| 6 | —0.04870 | 0.1249 | —0.09618 | 0.2641 | —0.09437 | 0.3449 | —3.356 | | | |
| 7 | 0.04090 | —0.06958 | 0.1616 | —0.09063 | 0.2637 | —0.08952 | 0.3063 | —3.581 | | |
| 8 | —0.03495 | 0.08226 | —0.07960 | 0.18500 | 0.08947 | 0.2952 | —0.08245 | 0.2899 | —3.796 | |
| 9 | 0.03499 | —0.05980 | 0.1255 | —0.08670 | 0.2188 | —0.09610 | 0.2795 | —0.3612 | 0.3014 | —4.014 |

При этом величина $w_0^{(1)}$ должна удовлетворять неоднородному бигармоническому уравнению

$$\triangle^2 w_0^{(1)} = \frac{q^{(1)}}{D} \tag{3.3}$$

и граничным условиям

$$\left[w_0^{(1)}\right]_C = 0 \tag{3.4}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial y^2}\right)_{x=\pm a} = \left(\frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial y^2}\right)_{y=\pm b} = 0 \tag{3.5}$$

Для нахождения коэффициентов $w_{mn}^{(1)}$ умножим уравнение (3.3) на $\cos[(2n+1)\pi x/2a]\cos[(2n+1)\pi y/2b]\,dx\,dy$ и проинтегрируем по всей площади прямоугольника. Это дает

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left(\frac{\partial^4 w_0^{(1)}}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_0^{(1)}}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0^{(1)}}{\partial y^4}\right)\cos\frac{2m+1}{2a}\pi x\cos\frac{2n+1}{2b}\pi y\,dx\,dy = \tag{3.6}$$

$$= \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\frac{q\,(x,\,y)}{D}\cos\frac{2m+1}{2a}\pi x\cos\frac{2n+1}{2b}\pi y\,dx\,dy = \frac{P}{D}\cos\frac{2m+1}{2a}\pi x_0\cos\frac{2n+y}{2b}\pi y_0$$

Интегрируя по частям стоящие слева интегралы и учитывая условия свободного опирания (3.4)—(3.5), получаем искомое значение $w_{mn}^{(1)}$:

$$w_{mn}^{(1)} = \frac{P}{abD}\,\frac{\cos\frac{2m+1}{2a}\pi x_0\cos\frac{2n+1}{2b}\pi y_0}{\left[\left(\frac{2m+1}{2a}\pi\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{2b}\pi\right)^2\right]^2} \tag{3.7}$$

Таким образом, частное решение $w_0^{(1)}$ найдено. Аналогичным образом можно получить частные решения для остальных трех задач.

Переходим к определению коэффициентов $u_n^{(1)}$. Из (1.9) при $f = g = 0$ имеем

$$u_n^{(i)} = \iint_\sigma \left(\triangle w_0^{(i)}\right)\psi_n^{(i)}\,d\tau \tag{3.8}$$

Подставляя сюда выражение (1.14), получаем

$$u_n^{(i)} = \sum_{s=0}^{n} M_{ns}^{(i)}\iint_\sigma \left(\triangle w_0^{(i)}\right)\varphi_s^{(i)}\,d\tau \tag{3.9}$$

Подсчитаем входящий сюда двойной интеграл при помощи формулы Грина. Учитывая равенства $\triangle\varphi_s^{(i)} = 0$, $\left[w_0^{(i)}\right]_C = 0$, будем иметь

$$\iint_\sigma \triangle w_0^{(i)}\varphi_s^{(i)}\,d\tau = \iint_\sigma\left[\triangle w_0^{(i)}\varphi_s^{(i)} - \triangle\varphi_s^{(i)}w_0^{(i)}\right]d\tau =$$

$$= \int_C\left[\varphi_s^{(i)}\frac{\partial w_0^{(i)}}{\partial\nu} - w_0^{(i)}\frac{\partial\varphi_s^{(i)}}{\partial\nu}\right]ds = \int_C \varphi_s^{(i)}\frac{\partial w_0^{(i)}}{\partial\nu}\,ds$$

Таким образом,

$$u_n^{(i)} = \sum_{s=0}^{n} M_{ns}^{(i)}\int_C \varphi_s^{(i)}\frac{\partial w_0^{(i)}}{\partial\nu}\,ds \tag{3.10}$$

В случае задачи I имеем [см. формулы (2.4)]

$$\left[\varphi_{2k}^{(1)}\right]_{x=\pm a} = \left[\varphi_{2k+1}^{(1)}\right]_{y=\pm b} = 0$$

$$\left[\varphi_{2k}^{(1)}\right]_{y=\pm b} = (-1)^k \cos\frac{2k+1}{2a}\pi x, \qquad \left[\varphi_{2k+1}^{(1)}\right]_{x=\pm a} = (-1)^k \cos\frac{2k+1}{2b}\pi y \tag{3.11}$$

При помощи (3.11), (3.7) и (3.2) получим для коэффициента $u_n^{(1)}$:

$$u_{2k}^{(1)} = \frac{P}{2D}\left[\sum_{s=0}^{k} (-1)^s M_{2k,\,2s}^{(1)} F_s(a,b,x_0 y_0) + \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s M_{2k,\,2s+1}^{(1)} F_s(b,a,y_0,x_0)\right]$$

$$u_{2k+1}^{(1)} = \frac{P}{2D}\left[\sum_{s=0}^{k} (-1)^s M_{2k+1,\,2s}^{(1)} F_s(a,b,x_0,y_0) + \sum_{s=0}^{k} (-1)^s M_{2k+1,\,2s+1}^{(1)} F_s(b,a,y_0,x_0)\right] \tag{3,12}$$

Здесь обозначено

$$F_s = F_s(a,\, b,\, x_0,\, y_0) = \tag{3.13}$$

$$= \left[\frac{y_0}{b}\,\mathrm{sh}\,\frac{2s+1}{2a}\pi y_0\,\mathrm{ch}\,\frac{2s+1}{2a}\pi b - \mathrm{ch}\,\frac{2s+1}{2a}\pi y_0\,\mathrm{sh}\,\frac{2s+1}{2a}\pi b\right]\frac{b^2\cos\frac{2s+1}{2a}\pi x_0}{\frac{2s+1}{2a}\pi b\,\mathrm{ch}^2\frac{2s+1}{2a}\pi b}$$

Точно таким же образом можно получить аналогичные формулы для коэффициентов $u_n^{(2)}$, $u_n^{(3)}$ и $u_n^{(4)}$, которые здесь не приводятся.

В табл. 4 приведены коэффициенты $u_n^{(i)}$ для квадрата.

*Таблица 4*

| $n$ | $u_n^{(1)}$ | $u_n^{(2)}$ | $u_n^{(3)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | —0.1170 | —0.02607 | —0.03912 |
| 1 | +0.0636 | +0.01863 | +0.02607 |
| 2 | —0.001085 | —0.002902 | +0.001545 |
| 3 | —0.00085 | —0.002433 | —0.002735 |
| 4 | —0.004287 | —0.001806 | —0.003479 |
| 5 | —0.003579 | —0.001607 | —0.001520 |
| 6 | —0.001166 | —0.0004120 | —0.001148 |
| 7 | —0.001036 | —0.0003732 | —0.000102 |
| 8 | —0.000340 | —0.0001600 | —0.000435 |
| 9 | —0.000276 | —0.0001524 | —0.000022 |

Имея частные решения $w_0^{(i)}$ и коэффициенты $u_n^{(i)}$, можно написать при помощи формул (1.10) и (1.14):

$$\Delta w = \sum_{i=1}^{4}\left[\Delta w_0^{(i)} - \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(i)} \sum_{s=0}^{n} M_{ns}^{(i)}\varphi_s^{(i)}\right] \tag{3.14}$$

Дальнейшее решение задачи, как уже было указано в § 1, сводится к задаче Дирихле или Неймана.

Если мы интересуемся не прогибом плиты $w$, а значениями опорных моментов (т. е. изгибающих моментов на контуре плиты), то формула (3.14) сразу дает нам значения искомых величин. В самом деле, если края плиты закреплены, то опорный момент $M \equiv M(s)$ дается формулой

$$-M = [D\Delta w]_C \tag{3.15}$$

Если воспользоваться выражением (3.14) и вспомнить, что частные решения $w_0^{(i)}$ выбирались так, что $\left[\Delta w_0^{(i)}\right]_C = 0$, то получим следующее значение для опорного момента:

$$M = \left[D\sum_{i=1}^{4}\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(i)} \sum_{s=0}^{n} M_{ns}^{(i)}\varphi_s^{(i)}\right]_C \tag{3.16}$$

Очевидно, что расчет опорных моментов для каждой из четырех задач следует производить лишь для участка контура $x = a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ и для

*Таблица 5*

| $\frac{x}{a}$ | $\frac{1}{P}\,[M]_{y=b}$ | $\frac{y}{a}$ | $\frac{1}{P}\,[M]_{x=a}$ | $\frac{x}{a}$ | $\frac{1}{P}\,[M]_{y=b}$ | $\frac{y}{a}$ | $\frac{1}{P}\,[M]_{x=a}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| —1 | 0 | —1 | 0 | 0 | —0.112 | 0 | —0.0495 |
| —0.9 | 0.0110 | —0.9 | 0.0014 | 0.1 | —0.141 | 0.1 | —0.0518 |
| —0.8 | 0.0122 | —0.8 | —0.0002 | 0.2 | —0.173 | 0.2 | —0.0522 |
| —0.7 | 0.0034 | —0.7 | —0.0048 | 0.3 | —0.200 | 0.3 | —0.0512 |
| —0.6 | —0.0090 | —0.6 | —0.0102 | 0.4 | —0.212 | 0.4 | —0.0479 |
| —0.5 | —0.0199 | —0.5 | —0.0167 | 0.5 | —0,205 | 0.5 | —0.0407 |
| —0.4 | —0.319 | —0.4 | —0.0241 | 0.6 | —0.169 | 0.6 | —0.0308 |
| —0.3 | —0.0488 | —0.3 | —0.0320 | 0.7 | —0.108 | 0.7 | —0.0230 |
| —0.2 | —0.0686 | —0.2 | —0.0390 | 0.8 | —0.0452 | 0.8 | —0.0176 |
| —0.1 | —0.0892 | —0.1 | —0.0450 | 0.9 | —0.0080 | 0.9 | —0.0104 |
| | | | | 1.0 | 0 | 1.0 | 0 |

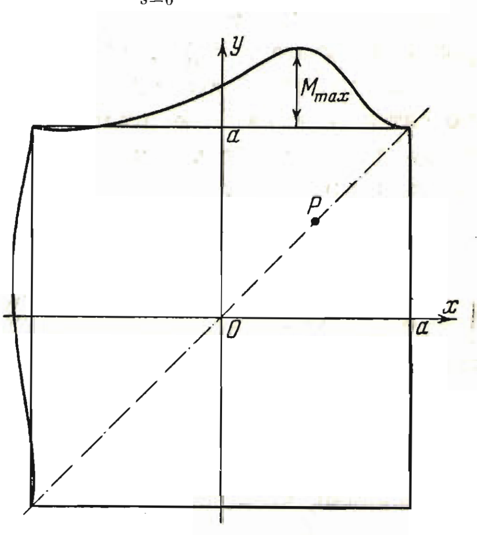
участка $y = b$, $0 \leqslant x \leqslant a$, так как на все остальные участки полученные значения моментов могут быть продолжены либо четным, либо нечетным образом. Положим

$$
\begin{aligned}
M_x^{(i)} &= \left[M^{(i)}(s)\right]_{y=b} = D \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(i)} \sum_{s=0}^{n} M_{ns}^{(i)} \varphi_s^{(i)}(x, b) \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) \\
M_y^{(i)} &= \left[M^{(i)}(s)\right]_{x=a} = D \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(i)} \sum_{s=0}^{n} M_{ns}^{(i)} \varphi_s^{(i)}(a, y) \qquad (0 \leqslant y \leqslant b)
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Так как согласно (2.4), $\varphi_{2k}^{(i)}(a, y) = \varphi_{2k+1}^{(i)}(x, b) = 0$, , то

$$
\begin{aligned}
M_x^{(i)} &= D \sum_{k=0}^{\infty} \left[u_{2k}^{(i)} \sum_{s=0}^{k} M_{2k,\,2s}^{(i)} \varphi_{2s}^{(i)}(x, b) + u_{2k+1}^{(i)} \sum_{s=0}^{k} M_{2k+1,25}^{(i)} \varphi_{2s}^{(i)}(x, b)\right] \\
M_y^{(i)} &= D \sum_{s=0}^{\infty} \left[u_{2k}^{(i)} \sum_{s=0}^{k-1} M_{2k,\,2s+1}^{(i)} \varphi_{2s+1}^{(i)}(a, y) + u_{2k+1,25}^{(i)} \sum_{s=0}^{k} M_{2k+1}^{(i)} \varphi_{2k+1}^{(i)}(a, y)\right]
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Подставляя при помощи (2.4) значения $\varphi_n^{(i)}(a, y)$ и $\varphi_n^{(i)}$ $(b, x)$, получаем окончательные формулы для опорных моментов. Результаты вычислений опорных моментов для квадратной плиты в том случае, когда сосредоточенная сила $P$ приложена в точке $x_0 = y_0 = {}^1/_2 a$, приведены в табл. 5 и изображены графически на фиг. 1.




Фиг. 1

Максимальное значение опорного момента получается при этом равным

$$
|M_{\max}| = \frac{1}{P} 0.212
$$

Для случая центральной силы соответствующее значение коэффициента, как известно, равно 0.126.

**§ 4. Плоская задача теории упругости.** Согласно сказанному в § 1, в случае плоской задачи теории упругости функция напряжений $\Phi$ определяется равенствами

$$\Delta\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n, \quad a_n = \int_C \left(g\psi_n - f\frac{\partial\psi_n}{\partial\nu}\right) ds, \quad f = [\Phi]_C, \quad g = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right]_C \tag{4.1}$$

Обычно на контуре задаются нормальные и касательные напряжения

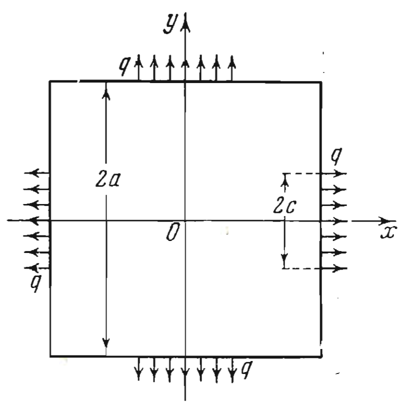
$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}$$

При этом контурные значения $\Phi$ и $\partial\Phi/\partial\nu$ могут быть выражены через них следующим образом:

$$[\Phi]_C = \int_0^S \left[\cos(\nu, x)\int_0^S Y_\nu\, ds + \cos(\nu, x)\int_0^S X_\nu\, ds\right] ds$$

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right]_C = -\cos(\nu, x)\int_0^S Y_\nu\, ds + \cos(\nu, y)\int_0^\nu X_\nu\, ds$$

$$\begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x\cos(\nu, x) + \tau_{xy}\cos(\nu, y) \\ Y_\nu &= \tau_{xy}\cos(\nu, x) + \sigma_y\cos(\nu, y) \end{aligned} \tag{4.2}$$




Фиг. 2

Что касается системы ортонормированных функций $\psi_n(x, y)$, то она строится по способу, указанному в § 1. Для случая прямоугольной области можно непосредственно использовать результаты § 2.

Остановимся на частной задаче о растяжении квадратной пластинки симметричной нагрузкой, распределенной по некоторому участку (фиг. 2).

Очевидно, что в этом случае мы имеем дело с задачей I и достаточно ограничиться функциями $\varphi_n(x, y) \equiv \varphi_n^{(1)}(x, y)$. Положим

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right]_C \equiv qc, \qquad \begin{aligned} [\Phi]_{x=\pm a} &= \begin{cases} -qcy - \frac{1}{2}qc^2 & (-a \leqslant y \leqslant -c) \\ \frac{1}{2}qy^2 & (|y| \leqslant c) \\ qcy - \frac{1}{2}qc^2 & (c < y < a) \end{cases} \\ [\Phi]_{y=\pm a} &= \begin{cases} -qcx - \frac{1}{2}qc^2 & (-a \leqslant x \leqslant -c) \\ \frac{1}{2}qx^2 & (|x| \leqslant c) \\ qcx - \frac{1}{2}qc^2 & (c \leqslant x \leqslant a) \end{cases} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Легко видеть, что при этом касательные и нормальные напряжения на контуре принимают требуемые значения:

$$[\sigma_x]_{x=\pm a} = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right]_{x=\pm a} = \begin{cases} 0 & (|y| > c) \\ q & (|y| < c) \end{cases}$$

$$[\sigma_x]_{y=\pm a} = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right]_{y=\pm a} = \begin{cases} 0 & (|x| > c) \\ q & (|x| < c) \end{cases}$$

$$[\tau_{xy}]_C = -\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\, \partial y}\right]_C = 0$$

Кроме того, выражения (4.3) обеспечивают непрерывность $\Phi$ на контуре вместе с первыми производными.

Вычислим коэффициенты $a_n$ по формуле (4.1):

$$a_n = \sum_{s=0}^{n} M_{ns} \int\limits_C \left[\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\varphi_s - \Phi\frac{\partial\varphi_s}{\partial\nu}\right] ds \tag{4.4}$$

Здесь $M_{ns} \equiv M_{ns}^{(1)}$. Так как при $b = a$

$$[\varphi_{2k}^{(1)}]_{x=\pm a} = 0, \qquad [\varphi_{2k}^{(1)}]_{y=\pm a} = (-1)^k \cos\alpha_k x \qquad \left(\alpha_k = \frac{2k+1}{2a}\pi\right)$$

$$\left[\frac{\partial\varphi_{2k}^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\pm a} = -\alpha_k \frac{\operatorname{ch}\alpha_k y}{\operatorname{ch}\alpha_k a}, \qquad \left[\frac{\partial\varphi_{2k}^{(1)}}{\partial y}\right]_{y=\pm a} = \alpha_k(-1)^k \operatorname{th}\alpha_k a \cos\alpha_k x$$

$$[\varphi_{2k+1}^{(1)}]_{x=\pm a} = (-1)^k \cos\alpha_k y, \qquad [\varphi_{2k+1}^{(1)}]_{y=\pm a} = 0$$

$$\left[\frac{\partial\varphi_{2k+1}^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\pm a} = \alpha_k(-1)^k \operatorname{th}\alpha_k a \cos\alpha_k y, \qquad \left[\frac{\partial\varphi_{2k+1}^{(1)}}{\partial y}\right]_{y=\pm a} = -\alpha_k \frac{\operatorname{ch}\alpha_k x}{\operatorname{ch}\alpha_k a}$$

то после некоторых выкладок найдем, что

$$a_n = 4Pa^2 \sum_{s=0}^{n} \frac{M_{ns}}{\alpha_s^2}\left[(-1)^s \operatorname{th}\alpha_s a \frac{\sin\alpha_s c}{c} + \frac{\operatorname{sh}\alpha_s c}{c}\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_s a}\right] \tag{4.5}$$

где обозначено $2qc = P$.

Рассмотрим сумму нормальных напряжений $\sigma_x + \sigma_y = \triangle\Phi$ в центре пластинки, даваемую формулой

$$(\triangle\Phi)_{x=y=0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{s=0}^{n} M_{ns}\varphi_s(0, 0) \quad \text{или} \quad (\sigma_x + \sigma_y)_{x=y=0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{s=0}^{n} \frac{M_{ns}}{\operatorname{ch}\alpha_s a} \tag{4.6}$$

Численные расчеты производились для $c = 0$ (сосредоточенная сила величины $P$), для $c = \frac{1}{2}a$ и для $c = a$ (простое растяжение). Суммы нормальных напряжений в центре пластины получились соответственно равными

$$2.60\frac{P}{2a}, \qquad 2.34\frac{P}{2a}, \qquad 1.998\frac{P}{2a}$$

Точное решение для последнего случая дает коэффициент 2.

Поступила 19 IX 1952

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. О решении плоской задачи теории упругости и задачи об изгибе тонкой плиты с закрепленным контуром. ДАН СССР, т. LXXVI, 1951.