

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Б. А. Ершов

(Ленинград)

В настоящей работе решаются некоторые новые, достаточно общие задачи автоматического регулирования в двумерном случае на основе качественного метода, предложенного Н. П. Еругиным [1]. В частности, существенным образом используется теорема 1.3 работы [1].

§ 1. Рассмотрим схему непрямого регулирования, состоящую из объекта регулирования и регулятора. Регулятор состоит из чувствительного элемента, сервомотора с золотником и жесткой обратной связи.

Обозначим x — изменение регулируемого параметра, y — смещение поршня сервомотора, σ — смещение золотника сервомотора.

Уравнение объекта регулирования и уравнение сервомотора (без учета инерции всех масс регулятора, трения и запаздывания в нем) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f(\sigma) \quad (\sigma = c_1 x - d_1 y) \quad (1.1)$$

где c_1 и d_1 — положительные постоянные.

В системе (1.1) $F(x, y)$ — непрерывная функция, имеющая частные производные по x и y при всех их значениях, причем $\partial F / \partial x < 0$, если объект регулирования при отсоединенном регуляторе устойчив, т. е. обладает положительным самовыравниванием; $\partial F / \partial x = 0$, если объект регулирования не обладает самовыравниванием, и $\partial F / \partial x > 0$, если объект регулирования при отсоединенном регуляторе неустойчив, т. е. обладает отрицательным самовыравниванием. Далее

$$\frac{\partial F}{\partial y} < 0, \quad F(0, 0) = 0 \quad (1.2)$$

во всех трех случаях.

Непрерывная функция $f(\sigma)$, стоящая в правой части второго уравнения (1.1) удовлетворяет условиям

$$\sigma f(\sigma) > 0 \quad \text{при } \sigma \neq 0 \quad (1.3)$$

$$f(0) = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \geq 0 \quad \text{при всех } \sigma \quad (1.5)$$

При этом в условии (1.5) допускается только не тождественное равенство нулю.

Линейное приближение системы (1.1) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -Nax - by, \quad \frac{dy}{dt} = cx - dy \quad (1.6)$$

где a , b , c и d — положительные постоянные такие, что

$$a = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|, \quad b = \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|, \quad c = c_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \quad d = d_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (1.7)$$

Значения производных в (1.7) берутся при $x = 0$ и $y = 0$.

В системе (1.6) величина $N = 1$ в случае положительного самовыравнивания, $N = 0$ в случае отсутствия самовыравнивания, $N = -1$ в случае отрицательного самовыравнивания.

Тогда система (1.1) после выделения линейной части имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -Nax - by + \varphi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx - dy + \psi(x, y) \quad (1.8)$$

где

$$\varphi(x, y) = F(x, y) - (-Nax - by), \quad \psi(x, y) = f(\sigma) - (cx - dy) \quad (1.9)$$

нелинейности соответственно объекта регулирования и сервомотора.

§ 2. Объект регулирования обладает положительным самовыравниванием, т. е. система (1.1) исследуется при условиях (1.2) — (1.5), причем производная $\partial F / \partial x < 0$.

В силу условий (1.2) — (1.5) кривая $F(x, y) = 0$ и прямая $f(\sigma) = 0$, представляющие собой правые части уравнений (1.1), проходят через начало координат.

Кривая $F(x, y) = 0$ расположена во второй и четвертой четвертях (фиг. 1), так как угловой коэффициент касательной

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial F / \partial x}{-\partial F / \partial y} < 0 \quad (2.1)$$

в силу (1.2), и так как $\partial F / \partial x < 0$.

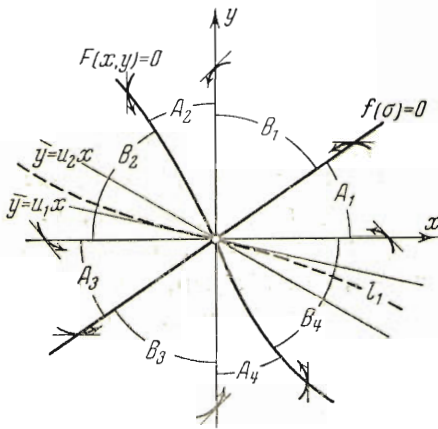
Рассматривая уравнение прямой $f(\sigma) = 0$ в виде $cx - dy = 0$, полу-

чаем, что прямая $f(\sigma) = 0$ расположена в первой и третьей четвертях, так как c и d — положительные постоянные.

Таким образом, система (1.1) при сделанных предположениях относительно $F(x, y)$ и $f(\sigma)$ имеет только одну точку равновесия.

Характеристическое уравнение системы линейного приближения (1.6) при $N = 1$

$$\lambda^2 + (a + d)\lambda + bc + ad = 0 \quad (2.2)$$



Фиг. 1

имеет корни с отрицательными вещественными частями и невозмущенное движение $x = 0, y = 0$ асимптотически устойчивое.

Разберем схему поля направлений, соответствующую системе (1.1) в данном случае. Из условий (1.2) — (1.5) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = F(x, y) > 0 & \quad \text{для точек, лежащих ниже кривой } F(x, y) = 0 \\ \frac{dx}{dt} = F(x, y) < 0 & \quad \text{для точек, лежащих выше кривой } F(x, y) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = f(\sigma) > 0 & \quad \text{для точек, лежащих ниже прямой } f(\sigma) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = f(\sigma) < 0 & \quad \text{для точек, лежащих выше прямой } f(\sigma) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

В точках прямой $f(\sigma) = 0$ функция $y(t)$ достигает максимума при $y > 0$ и минимума при $y < 0$; в точках кривой $F(x, y) = 0$ функция $x(t)$ достигает максимума при $x > 0$ и минимума при $x < 0$.

Все это позволяет нанести схему поведения интегральных кривых при $t \rightarrow \infty$, представленную на фиг. 1, где стрелки показывают направление движения при $t \rightarrow \infty$.

За прямую $L(0, \infty)$, указанную в пункте третьем теоремы 1.3 Н. И. Еругина^[1], можно принять, например, прямую $f(\sigma) = 0$.

Кривая $F(x, y) = 0$, прямая $f(\sigma) = 0$ и оси координат разбивают плоскость xy на восемь областей: A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4 , показанных на фиг. 1.

Введем полярные координаты $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Тогда

$$\dot{r} = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi, \quad r \dot{\varphi} = -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi \quad (2.4)$$

Рассмотрим области $B_\nu (\nu = 1, 2, 3, 4)$. Из (2.4) на основании (2.3) получаем, что $\dot{r} < 0$ в областях B_ν , т. е. дуга круга радиуса r_0 с центром в точке $(0, 0)$, расположенная в областях B_ν , будет пересекаться движениями в направлении начала координат.

Следовательно, движения, попадающие в области B_ν либо начинающиеся там, могут только или входить в точку равновесия $(0, 0)$ в областях B_ν при $t \rightarrow \infty$, или выходят из областей B_ν , пересекая соответствующую часть одной из координатных осей.

Обратимся к областям $A_\nu (\nu = 1, 2, 3, 4)$. Из (2.4) на основании (2.3) получаем, что $\dot{\varphi} > 0$ в областях A_ν .

Следовательно, движения в областях A_ν не могут иметь ограниченный полярный угол φ , соответствующий этим областям, и движения, попадающие в области A_ν , либо начинающиеся там, выходят из областей A_ν , пересекая соответствующую часть кривой $F(x, y) = 0$ или прямой $f(\sigma) = 0$.

Отсутствие периодических решений проверяем, используя критерий Бендиксона^[1], условия которого в данном случае выполняются, так как $\partial F / \partial x < 0, d_1 > 0$ и

$$D(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} - d_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma} < 0$$

в силу условия (1.5).

Таким образом, для случая положительного самовыравнивания все требования теоремы 1.3 Н. П. Еругина ^[1] выполнены и мы получаем теорему.

Теорема 2. 1. Все движения, определяемые уравнениями (1.1), в случае $\partial F/\partial x < 0$, при условиях (1.2) — (1.5) обладают свойством $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Уточним качественную картину поведения интегральных кривых системы (1.1) в рассматриваемом случае.

По Фроммеру (см., например, ^[1]), тангенс угла u_k , под которым движения могут входить в точку равновесия $(0,0)$, определяется квадратным уравнением

$$bu^2 + (a-d)u + c = 0 \quad (2.5)$$

Необходимое условие существования движений, приближающихся к особой точке $(0,0)$ с определенной касательной, состоит в неотрицательности дискриминанта этого уравнения $\Delta = (a-d)^2 - 4bc > 0$.

В случае $\Delta < 0$ корни квадратного уравнения (2.5) будут комплексными числами и движения приближаются к особой точке $(0,0)$ по спирали. Особая точка в случае $\Delta < 0$ есть фокус.

Если коэффициенты a , b , c и d системы линейного приближения удовлетворяют условию $\Delta > 0$, то существует не более двух критических направлений, под которыми интегральные кривые могут входить в особую точку $(0,0)$. Рассмотрим следующие случаи.

Случай $\Delta = (a-d)^2 - 4bc > 0$ и $a-d > 0$. Корни уравнения (2.5) u_1 и u_2 отрицательные и такие, что

$$-\frac{a}{b} < u_2 < u_1 < 0$$

Через начало координат проведем прямые $y = u_1 x$ и $y = u_2 x$. Эти прямые проходят в областях B_2 и B_4 . Заметим, что u_1 и u_2 — обыкновенные критические направления, причем вдоль направления u_1 в точку $(0,0)$ входит при $t \rightarrow \infty$ одна интегральная кривая l_1 , а вдоль направления u_2 в точку $(0,0)$ входит при $t \rightarrow \infty$ бесконечное множество интегральных кривых. Этот факт следует из того, что для указанных критических направлений выполняются неравенства (см. ^[1])

$$\frac{\partial \Phi(u_1, 0)}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial \Phi(u_2, 0)}{\partial u} > 0$$

Уравнение траектории l_1 , входящей в особую точку $(0,0)$ вдоль прямой $y = u_1 x$, можно найти методом последовательных приближений. Из (1.1) имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(c_1 x - d_1 y)}{F(x, y)}, \quad y = \int_0^x \frac{f(c_1 x - d_1 y)}{F(x, y)} dx$$

Первое приближение берем равным $y_0 = u_1 x$; тогда

$$y_1(x) = \int_0^x \frac{f(c_1 x - d_1 u_1 x)}{F(x, u_1 x)} dx$$

Дальнейшие приближения найдем из рекуррентной формулы

$$y_n(x) = \int_0^x \frac{f(c_1 x - d_1 y_{n-1}(x))}{F(x, y_{n-1}(x))} dx \quad (2.6)$$

Таким образом, если в уравнениях (1.8) коэффициенты a , b , c , и d удовлетворяют условию $\Delta > 0$ и $a - d > 0$, то все движения, начинающиеся справа от кривой l_1 , при $t \rightarrow \infty$ входят в точку равновесия $(0,0)$, касаясь прямой $y = u_2 x$ в области B_2 . Движения, начинающиеся слева от кривой l_1 , при $t \rightarrow \infty$ входят в точку равновесия $(0,0)$, касаясь прямой $y = u_2 x$ в области B_4 .

Случай $\Delta = (a - d)^2 - 4bc > 0$ и $a - d < 0$. Корни уравнения (2.5) u_3 и u_4 положительные и такие, что

$$\frac{c}{d} < u_3 < u_4$$

Через начало координат проведем прямые

$$y = u_3 x, \quad y = u_4 x$$

Эти прямые проходят в областях B_1 и B_3 . (Этот случай на фиг. 1 не показан.)

Используя правило, указанное в работе [1], получим, что u_3 и u_4 — обыкновенные критические направления, причем вдоль направления u_3 в точку $(0,0)$ входит при $t \rightarrow \infty$ бесконечное множество интегральных кривых. Вдоль направления u_4 в точку $(0,0)$ при $t \rightarrow \infty$ входит одна интегральная кривая l_2 .

Уравнение траектории l_2 , входящей в особую точку $(0,0)$ вдоль прямой $y = u_4 x$, можно найти методом последовательных приближений. Первое приближение берем равным $y_0 = u_4 x$.

Дальнейшие приближения находятся по рекуррентной формуле (2.6).

Таким образом, в рассматриваемом случае все движения, начинающиеся справа от кривой l_2 , входят при $t \rightarrow \infty$ в точку равновесия $(0,0)$, касаясь прямой $y = u_3 x$ в области B_1 . Движения, начинающиеся слева от кривой l_2 при $t \rightarrow \infty$ входят в точку равновесия $(0,0)$, касаясь прямой $y = u_3 x$ в области B_3 .

Особая точка в случае $\Delta > 0$ есть узел.

§ 3. Объект регулирования не обладает самовыравниванием, т. е. $\partial F / \partial x = 0$, и система (1.1) исследуется при условиях (1.2) — (1.5).

Прямая $F(y) = 0$ и прямая $f(\sigma) = 0$ проходят в силу условий (1.2) — (1.5) через начало координат.

Прямая $F(y) = 0$ совпадает с осью x , а прямая $f(\sigma) = 0$ проходит в первой и третьей четвертях.

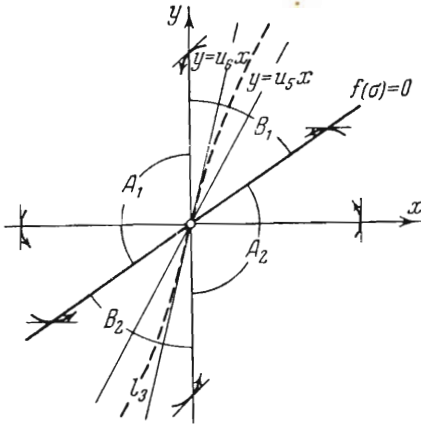
Следовательно, точка $(0,0)$ в данном случае единственная точка равновесия системы (1.1).

Характеристическое уравнение системы линейного приближения (1.6) при $N = 0$ будет

$$\lambda^2 + d\lambda + bc = 0$$

Оно имеет корни с отрицательными вещественными частями и невозмущенное движение $x=0, y=0$, асимптотически устойчивое.

Разберем схему поля направлений, соответствующую системе (1.1) в данном случае. Из условий (1.2) — (1.5) следует, что (фиг. 2) (3.1)



Фиг. 2

$\frac{dx}{dt} = F(y) > 0$	для точек, лежащих ниже оси x
$\frac{dx}{dt} = F(y) < 0$	для точек, лежащих выше оси x
$\frac{dy}{dt} = f(\sigma) > 0$	для точек ниже прямой $f(\sigma) = 0$
$\frac{dy}{dt} = f(\sigma) < 0$	для точек выше прямой $f(\sigma) = 0$

В точках прямой $f(\sigma) = 0$ функция $y(t)$ достигает максимума при $y > 0$ и минимума при $y < 0$; в точках, лежащих на оси x , функция $x(t)$ достигает максимума при $x > 0$ и минимума при $x < 0$.

Схема поведения интегральных кривых при $t \rightarrow \infty$ представлена на фиг. 2, где стрелки показывают направление движения при $t \rightarrow \infty$.

За прямую $L(0, \infty)$ здесь можно принять прямую $f(\sigma) = 0$.

На фиг. 2 показаны четыре области A_1, A_2 и B_1, B_2 , границами которых служат прямая $f(\sigma) = 0$ и ось y .

Переходим к полярным координатам. Из (2.4) на основании (3.1) получаем, что $\dot{r} < 0$ в областях B_1 и B_2 .

Следовательно, движения, попадающие в области B_1 и B_2 либо начинающиеся там, могут только или входить в точку равновесия $(0,0)$ в областях B_1 и B_2 при $t \rightarrow \infty$, или выходить из областей B_1 и B_2 , пересекая соответствующую часть оси y .

Из (2.4) на основании (3.1) имеем $\dot{\varphi} > 0$ в областях A_1 и A_2 . Следовательно, движения в областях A_1 и A_2 не могут иметь ограниченного полярного угла φ , соответствующего этим областям, и движения, попадающие в области A_1 и A_2 либо начинающиеся там, выходят из областей A_1 и A_2 , при $t \rightarrow \infty$, пересекая соответствующую часть прямой $f(\sigma) = 0$.

По Бендиксону, в рассматриваемом случае

$$D(x, y) = -d_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma} \leq 0$$

причем тождественное равенство нулю исключается и система (1.1) не имеет периодических решений.

Таким образом, для случая отсутствия самовыравнивания все требования теоремы 1.3 Н. П. Еругина^[1] выполнены и мы получаем теорему.

Теорема 3.1. Все движения, определяемые уравнениями (1.1), в случае $\partial F / \partial x = 0$ при условиях (1.2) — (1.5) обладают свойством

$$x \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty$$

Уточним качественную картину поведения интегральных кривых системы (1.1) для случая отсутствия саморегулирования.

Квадратное уравнение

$$bu^2 - du + c = 0 \quad (3.2)$$

для определения возможных критических направлений в случае $\Delta = d^2 - 4bc < 0$ имеет комплексные корни, и движения приближаются к особой точке по спирали. Особая точка в случае $\Delta < 0$ есть фокус.

Если коэффициенты b , c и d удовлетворяют условию $\Delta = d^2 - 4bc > 0$, то корни u_5 и u_6 уравнения (3.2) положительные и такие, что

$$\frac{c}{d} < u_5 < u_6$$

Критические направления u_5 и u_6 обыкновенные. Через начало координат (фиг. 2) проведем прямые $y = u_5x$ и $y = u_6x$.

Исследование знака производной $\partial\Phi(u_k, 0)/\partial u_k$ для критических направлений u_5 и u_6 показывает, что вдоль направления u_5 в точку $(0, 0)$ входит при $t \rightarrow \infty$ бесчисленное множество интегральных кривых, а вдоль направления u_6 в точку $(0, 0)$ входит при $t \rightarrow \infty$ одна интегральная кривая l_3 . Уравнение траектории l_3 , входящей в особую точку $(0, 0)$ вдоль прямой $y = u_6x$, можно найти методом последовательных приближений. Первое приближение берем равным $y_0 = u_6x$. Дальнейшие приближения находятся по рекуррентной формуле (2.6).

Итак, в случае $\Delta > 0$ все движения, начинающиеся справа от кривой l_3 , входят при $t \rightarrow \infty$ в точку равновесия $(0, 0)$, касаясь прямой $y = u_5x$ в области B_1 .

Движения, начинающиеся слева от кривой l_3 , при $t \rightarrow \infty$ входят в точку равновесия $(0, 0)$ касаясь прямой $y = u_5x$ в области B_2 . Особая точка в случае $\Delta > 0$ есть узел.

§ 4. Объект регулирования обладает отрицательным самовыравниванием, т. е. производная $\partial F/\partial x > 0$, и система (1.1) рассматривается при условиях (1.2) — (1.5).

Выше были рассмотрены случаи, при которых точка $(0, 0)$ была единственной особой точкой системы (1.1) в силу условий, налагаемых на функции $F(x, y)$ и $f(\sigma)$.

В настоящем случае кривая $F(x, y) = 0$ и прямая $f(\sigma) = 0$ располагаются в первой и третьей четвертях.

Условие 1. Это условие выполняется, если при $x < 0$ кривая $F(x, y) = 0$ лежит выше прямой $f(\sigma) = 0$, а при $x > 0$ ниже прямой $f(\sigma) = 0$, т. е. кривая $F(x, y) = 0$ располагается в области между прямой $f(\sigma) = 0$ и осью x .

Выполнение условия 1 гарантирует единственность особой точки $(0, 0)$ системы (1.1).

Характеристическое уравнение системы линейного приближения (1.6) при $N = -1$ будет

$$\lambda^2 + (d - a)\lambda + bc - ad = 0.$$

Оно имеет корни с отрицательными вещественными частями, если

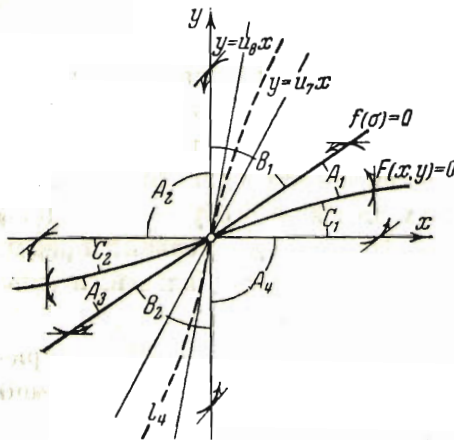
$$d - a > 0 \quad (4.1)$$

$$bc - ad > 0 \quad (4.2)$$

Из (1.7) видно, что при выполнении условия 1 неравенство (4.2) удовлетворяется.

Тогда в случае отрицательного самовыравнивания объекта регулирования при выполнении условий 1 и (4.1) невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчивое.

Разберем схему поля направлений, соответствующую системе (1.1) в данном случае, т. е. считая $\partial F / \partial x > 0$ и выполненными условия (1.2) — (1.5), условия 1 и (4.1). Из (1.5) и (1.6) следует (фиг. 3) (4.3)



Фиг. 3

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) > 0 \quad \text{для точек ниже кривой } F(x, y) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) < 0 \quad \text{для точек выше кривой } F(x, y) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = f(\sigma) > 0 \quad \text{для точек ниже прямой } f(\sigma) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = f(\sigma) < 0 \quad \text{для точек выше прямой } f(\sigma) = 0$$

В точках прямой $f(\sigma) = 0$ функция $y(t)$ достигает максимума при $y > 0$ и минимума при $y < 0$; в точках кривой $F(x, y) = 0$ функция $x(t)$ достигает максимума при $x > 0$ и минимума при $x < 0$.

Схема поведения интегральных кривых при $t \rightarrow \infty$ изображена на фиг. 3, где стрелки показывают направление движения при $t \rightarrow \infty$.

За прямую $L(0, \infty)$ можно принять, например, прямую $f(\sigma) = 0$.

Кривая $F(x, y) = 0$, прямая $f(\sigma) = 0$ и оси координат разбивают плоскость xy на восемь областей: A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2 , и C_1, C_2 , показанных на фиг. 3.

Переходим к полярным координатам. Из (2.4) на основании (4.3) получаем, что $\dot{\varphi} > 0$ в областях A_v ($v = 1, 2, 3, 4$). Следовательно, движения в областях A_v не могут иметь ограниченного полярного угла φ , соответствующего этим областям, и движения, попадающие в области A_v либо начинающиеся там, при $t \rightarrow \infty$ выходят из областей A_v , пересекая ось x или прямую $f(\sigma) = 0$.

Аналогично получаем, что $\dot{r} < 0$ в областях B_1 и B_2 .

Таким образом, движения, попадающие в области B_1 и B_2 либо начинающиеся там, могут только или входить в точку равновесия $(0, 0)$ в областях B_1 и B_2 при $t \rightarrow \infty$, или выходить из областей B_1 и B_2 , пересекая ось y . На границах областей C_1 и C_2 , т. е. на оси x и на кривой $F(x, y) = 0$ производная $\dot{\varphi} > 0$.

Потребуем, чтобы $\dot{\varphi}$ было больше нуля и внутри областей C_1 и C_2 . Из (2.4) получим, что если в областях C_1 и C_2

$$r\dot{\varphi} = \dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi > 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} > \operatorname{tg} \varphi \quad (4.4)$$

где $0 \leq \operatorname{tg} \varphi < b/a$, то $\dot{\varphi} > 0$ в областях C_1 и C_2 . Следовательно, при выполнении условия (4.4) движения в областях C_1 и C_2 не могут иметь ограниченный полярный угол, соответствующий этим областям, и движения, попадающие в области C_1 и C_2 либо начинающиеся там, при $t \rightarrow \infty$ выходят из областей C_1 и C_2 , пересекая кривую $F(x, y) = 0$.

Ниже будет показано, как можно реализовать условие (4.4).

В данном случае система (1.1) не будет иметь периодических решений, если

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \sigma} d_1 \leq 0 \quad (4.5)$$

Здесь допускается не тождественное равенство нулю. Заметим, что при $x = 0$ и $y = 0$ условие (4.5) совпадает с неравенством (4.1).

Таким образом, требования теоремы 1.3 Н. П. Еругина^[1] в случае отрицательного саморегулирования выполняются при дополнительных условиях 1, (4.1), (4.4) и (4.5), и мы получаем теорему.

Теорема 4.1. Все движения, определяемые уравнениями (1.1), в случае $\partial F / \partial x > 0$ при условиях (1.2) — (1.5), (4.1), (4.4) и (4.5) и условии 1 обладают свойством $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Уточним качественную картину поведения интегральных кривых системы (1.1) для случая отсутствия саморегулирования при условиях теоремы 4.1. Квадратное уравнение

$$bu^2 - (a + d)u + c = 0 \quad (4.6)$$

для определения возможных критических направлений при $\Delta = (a + d)^2 - 4bc < 0$ имеет комплексные корни и движения приближаются к особой точке по спиральям. Особая точка в случае $\Delta < 0$ есть фокус.

При $\Delta > 0$ корни u_7, u_8 уравнения (4.6) положительные и $c/d < u_7 < u_8$. Критические направления u_7 и u_8 обыкновенные.

Через начало координат (фиг. 3) проведем прямые $y = u_7x$ и $y = u_8x$. Эти прямые проходят в областях B_1 и B_2 .

Исследование знака производной $\partial \Phi(u_k, 0) / \partial u_k$ для критических направлений u_7 и u_8 показывает, что вдоль направления u_7 в точку $(0, 0)$ входит при $t \rightarrow \infty$ бесчисленное множество интегральных кривых, а вдоль направления u_8 в точку $(0, 0)$ входит при $t \rightarrow \infty$ одна интегральная кривая l_4 . Уравнение траектории l_4 , входящей в особую точку $(0, 0)$ вдоль прямой $y = u_8x$, можно найти методом последовательных приближений. Первое приближение берем равным $y_0 = u_8x$. Дальнейшие приближения находятся по рекуррентной формуле (2.6).

В случае $\Delta > 0$ все движения, начинающиеся справа от кривой l_1 , входят при $t \rightarrow \infty$ в точку равновесия $(0, 0)$, касаясь прямой $y = u_7x$ в области B_1 . Движения, начинающиеся слева от кривой l_1 , при $t \rightarrow \infty$

входят в точку равновесия $(0, 0)$, касаясь прямой $y = u_7x$ в области B_2 . Особая точка в случае $\Delta > 0$ есть узел.

§ 5. При доказательстве факта устойчивости для случая объекта, обладающего отрицательным самовыравниванием, потребовалось наложить на правые части уравнений (1.1) условие (4.4). Смысл этого условия состоит в том, что оно гарантирует в областях C_1 и C_2 неравенство $\dot{\varphi} > 0$. Разберем подробнее это неравенство. Из (2.4) получаем, что

$$r\dot{\varphi} = f(\sigma) \cos \varphi - F(x, y) \sin \varphi$$

В случае, когда объект регулирования обладает отрицательным самовыравниванием $N = -1$, и согласно (1.9) имеем

$$F(x, y) = ax - by + \varphi(x, y), \quad f(\sigma) = cx - dy + \psi(x, y)$$

Тогда

$$r\dot{\varphi} = r[b \sin^2 \varphi - (a + d) \sin \varphi \cos \varphi + c \cos^2 \varphi] + \psi(x, y) \cos \varphi - \varphi(x, y) \sin \varphi$$

При φ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi \leq \arctg \frac{b}{a} & \quad \text{в области } C_1 \\ \pi \leq \varphi \leq \pi + \arctg \frac{b}{a} & \quad \text{в области } C_2 \end{aligned}$$

получим

$$\frac{\dot{\varphi}}{r \cos^2 \varphi} = b \operatorname{tg}^2 \varphi - (a + d) \operatorname{tg} \varphi + c + \frac{1}{r \cos^2 \varphi} [\psi(x, y) \cos \varphi - \varphi(x, y) \sin \varphi] \quad (5.1)$$

Если

$$\varphi(x, y) < 0, \quad \psi(x, y) > 0 \quad \text{в области } C_1 \quad (5.2)$$

то четвертое слагаемое в (5.1) будет больше нуля для всех x и y (т. е. r и φ) из области C_1 . Условие (5.2) перепишем так:

$$\frac{1}{r \cos^2 \varphi} [\psi(x, y) \cos \varphi - \varphi(x, y) \sin \varphi] = e > 0 \quad (5.3)$$

Обозначая через $\operatorname{tg} \varphi = u$, запишем (5.1) в виде

$$\frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} = bu^2 - (a + d)u + (c + e)$$

Правая часть этого выражения совпадает с левой частью уравнения (4.6) с точностью до свободного члена $c + e$. Принимая во внимание величину корней уравнения (4.6), получаем, что $\dot{\varphi}$ будет больше нуля в интервале

$$0 \leq u \leq \frac{b}{a} < \frac{c}{d}$$

Далее, если

$$\varphi(x, y) > 0, \quad \psi(x, y) < 0 \quad \text{в области } C_2 \quad (5.4)$$

то попрежнему сохраняется неравенство (5.3) и $\dot{\varphi}$ будет больше нуля.

Условия (5.2) и (5.4) для нелинейности $\varphi(x, y)$ означают, что характеристика объекта регулирования $F = F(x, y)$ находится под плоскостью

линейного приближения $F_0 = ax - by$ при x и y из области C_1 и над плоскостью линейного приближения при x и y из области C_2 .

Аналогично условия (5.2) и (5.4) для нелинейности $\psi(x, y)$ означают, что характеристика сервомотора $f = f(\sigma)$ находится над плоскостью линейного приближения $f_1 = cx - dy$ при x и y из области C_1 и под плоскостью линейного приближения при x и y из области C_2 .

§ 6. В случае отрицательного самовыравнивания объекта регулирования, когда характеристическое уравнение линейного приближения (1.6) имеет один нулевой корень, т. е. коэффициенты a, b, c и d удовлетворяют условию (4.1) и

$$bc - ad = 0 \quad (6.1)$$

можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 4.1. Для этого нужно, чтобы выполнялись дополнительно условия асимптотической устойчивости невозмущенного движения.

Теорема 6.1. Все движения, определяемые уравнениями (1.1), в случае $\partial F / \partial x > 0$ при условиях (1.2) — (1.5), (4.1), (4.5), (6.1), условия 1 и при условии асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = 0, y = 0$ обладают свойством $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Ниже будет приведен случай, в котором выполняются условия асимптотической устойчивости невозмущенного движения $x = 0, y = 0$.

Качественная картина поведения интегральных кривых будет такой же, как и в случае § 4.

В данном случае рассматривается система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - by + \varphi(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= cx - dy + \psi(x, y) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Положим, что

$$\varphi(x, y) = \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \dots$$

$$\psi(x, y) = \psi_2(x, y) + \psi_3(x, y) + \dots$$

где

$$\varphi_2(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$$

$$\varphi_3(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$$

$$\psi_2(x, y) = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$$

$$\psi_3(x, y) = b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3$$

Следуя Ляпунову^[2], приводим (6.2) подстановкой $z_1 = -cx + ay$, $z_2 = ax - by$ к каноническому виду

$$\frac{dz_1}{dt} = \bar{\varphi}(z_1, z_2), \quad \frac{dz_2}{dt} = (a - d)z_2 + \bar{\psi}(z_1, z_2)$$

где

$$\bar{\varphi}(z_1, z_2) = A_{20}z_1^2 + A_{11}z_1z_2 + A_{02}z_2^2 + A_{30}z_1^3 + A_{21}z_1^2z_2 + A_{12}z_1z_2^2 + A_{03}z_2^3 + \dots$$

$$\bar{\psi}(z_1, z_2) = B_{20}z_1^2 + B_{11}z_1z_2 + B_{02}z_2^2 + B_{30}z_1^3 + B_{21}z_1^2z_2 + B_{12}z_1z_2^2 + B_{03}z_2^3 + \dots$$

Затем определяем z_2 из соотношения

$$(d-a)z_2 = B_{20}z_1^2 + B_{11}z_1z_2 + B_{02}z_2^2 + B_{30}z_1^3 + B_{21}z_1^2z_2 + B_{12}z_1z_2^2 + B_{03}z_2^3 + \dots$$

в виде

$$z_2 = \frac{B_{20}}{d-a}z_1^2 + \frac{C}{d-a}z_1^3 + \dots \quad (C = B_{11}B_{20} + B_{30})$$

Подставим полученное выражение для z_2 в $\bar{\varphi}(z_1, z_2)$:

$$\bar{\varphi}(z_1, z_2) = A_{20}z_1^2 + gz_1^3 + \dots \quad \left(g = \frac{A_{11}B_{20}}{d-a} + A_{30}\right)$$

Отсюда видно, что асимптотическая устойчивость движения $x = 0$, $y = 0$ возможна в случае, когда

$$A_{20} = 0, \quad \frac{A_{11}B_{20}}{d-a} + A_{30} < 0 \quad (6.3)$$

Нетрудно выписать выражения коэффициентов A_{20} , A_{11} , B_{20} и A_{30} через a , b , c и d .

Поступила 28 X 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.