Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

О КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. А. Троицкий

(Ленинград)

В работе А. И. Лурье [1] было установлено неособенное линейное преобразование дифференциальных уравнений, описывающих поведение регулируемых систем, имеющих один регулирующий орган, к некоторому простому виду, названному автором «канонической формой» уравнений теории автоматического регулирования. В других исследованиях, результаты которых сведены в монографию [2], А. И. Лурье показал, что использование канонической формы при решении некоторых нелинейных задач теории автоматического регулирования в значительной степени сокращает необходимые выкладки.

В настоящей работе дается обобщение преобразования А. И. Лурье на случай регулируемых систем с несколькими регулирующими органами.

В § 1 рассматривается более общая задача о приведении к канонической форме систем n нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Полученные в нем результаты применены в следующих двух параграфах при установлении канонических преобразований дифференциальных уравнений, описывающих поведение регулируемых систем с несколькими регулирующими органами.

Результаты настоящей работы могут быть применены при исследовании устойчивости систем регулирования, при решении задачи о поведении динамических систем и, в частности, систем автоматического регулирования вблизи границы области устойчивости и задачи об автоколебаниях в регулируемых системах.

§ 1. Каноническое преобразование систем нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим систему n нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + X_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где $b_{k\alpha}$ — постоянные коэффициенты, $X_k(x_1, \ldots, x_n)$ — нелинейные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Предположим, что функции $X_k(x_1, \ldots, x_n)$ могут быть представлены в виде

$$X_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\beta=1}^{m} h_{\beta k} f_\beta(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Нетрудно видеть, что подобное разложение всегда возможно при $m = n$, но может случиться, что $m < n$; поэтому мы будем в дальнейшем считать $m \leqslant n$.

Подставив $X_k(x_1, \ldots, x_n)$ из (1.2) в уравнение (1.1), будем иметь

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} h_{\beta k} f_\beta (x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Использование некоторых теорем линейной алгебры в значительной степени облегчает последующие выкладки. Поэтому систему (1.3) мы запишем в виде одного матричного уравнения

$$\dot{x} = bx + \sum_{\beta=1}^{m} h_\beta f_\beta (x_1, \ldots, x_n) \tag{1.4}$$

Здесь

$$h_\beta = \{h_{\beta 1}, \ldots, h_{\beta n}\} \qquad (\beta = 1, \ldots, m)$$

матрицы-столбцы постоянных $h_{\beta k}$,

$$x = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

матрица-столбец переменных x_k, а

$$b = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{Vmatrix}$$

квадратная матрица порядка n коэффициентов $b_{k\alpha}$ системы (1.3); всюду в дальнейшем будем предполагать, что все ее собственные значения различны. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = bx \tag{1.5}$$

получающееся из (1.4), если в нем положить $h_\beta = 0$ $(\beta = 1, \ldots, m)$, и перейдем в нем к новым переменным

$$z = \{z_1, \ldots, z_n\} \tag{1.6}$$

связанным с исходными $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ линейным соотношением

$$x = cz, \qquad |c| \neq 0 \tag{1.7}$$

Подстановка (1.7) в (1.5) приводит к уравнению

$$\dot{z} = c^{-1}bcz \quad \text{или} \quad \dot{z} = \Lambda z \tag{1.8}$$

так как преобразованием подобия $c^{-1}bc$ квадратная матрица b, все собственные значения которой различны, может быть приведена к диагональной матрице ее собственных значений

$$c^{-1}bc = \Lambda = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения

$$D(\lambda) = |\lambda I - b| = 0 \tag{1.9}$$

матрицы b.

Остановимся несколько подробнее на составлении неособенной матрицы преобразования c, выбор которой может быть осуществлен бесчисленным количеством способов. В частности, мы определяли ее соотношением $c = kC$, где k — неособенная квадратная матрица порядка n, составленная из собственных векторов k_i матрицы b, удовлетворяющих уравнениям

$$[\lambda_i I - b]\{k_i\} = 0 \tag{1.10}$$

и имеющих в общем случае вид:

$$k_i = \{D_{j1}(\lambda_i),\ D_{j2}(\lambda_i), \ldots, D_{jn}(\lambda_i)\} \tag{1.11}$$

где $D_{jk}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента, стоящего на пересечении j-й строки и k-го столбца характеристического определителя [см. (1.9)] матрицы b, а C — диагональная матрица произвольных постоянных.

Обращаясь к уравнениям

$$[\varkappa_i][\lambda_i I - b] = 0$$

найдем, что строки $\varkappa_i$ на основании (1.11) определяются соотношениями

$$\varkappa_i = \frac{1}{D_{jk}(\lambda_i)}[D_{1k}(\lambda_i);\ D_{2k}(\lambda_i), \ldots, D_{nk}(\lambda_i)] \tag{1.12}$$

при условии, что $D_{jk}(\lambda_i) \neq 0$, а неособенные квадратные матрицы n-го порядка k и $\varkappa$ (составленная из строк $\varkappa_i$) удовлетворяют уравнению [3]

$$k^{-1} = d^{-1}\varkappa \tag{1.13}$$

где

$$d = \begin{Vmatrix} D'(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D'(\lambda_2) & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & D'(\lambda_n) \end{Vmatrix}$$

Все сказанное позволяет написать матрицу преобразования c, а также обратную ей матрицу c^{-1} на основании (1.12) и (1.13):

$$c = \begin{Vmatrix} C_1 D_{11}(\lambda_1) & \ldots & C_n D_{n1}(\lambda_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_1 D_{1n}(\lambda_1) & \ldots & C_n D_{nn}(\lambda_n) \end{Vmatrix}, \quad c^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{D_{11}(\lambda_1)}{C_1 D'(\lambda_1) D_{11}(\lambda_1)} & \ldots & \dfrac{D_{n1}(\lambda_1)}{C_1 D'(\lambda_1) D_{11}(\lambda_1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{D_{1n}(\lambda_n)}{C_n D'(\lambda_n) D_{nn}(\lambda_n)} & \ldots & \dfrac{D_{nn}(\lambda_n)}{C_n D'(\lambda_n) D_{nn}(\lambda_n)} \end{Vmatrix} \tag{1.14}$$

при условии, конечно, что ни одна из величин $D_{ii}(\lambda_i)$ не обращается в нуль. Если же одна или несколько величин $D_{ii}(\lambda_i)$ равны нулю, то соответствующие столбцы матрицы k и строки матрицы $\varkappa$ следует заменить другими на основании формул (1.11) и (1.12) так, чтобы $D_{jk}(\lambda_i) \neq 0$.

Вернемся теперь к исходному уравнению (1.4) и перейдем в нем к новым переменным. После подстановки x из (1.7) получим каноническую форму уравнения (1.4)

$$\dot{z} = \Lambda z + \sum_{s=1}^{m} a_s F_s(z_1, \ldots, z_n) \tag{1.15}$$

где

$$a_s = c^{-1} h_s = \left\{ \frac{H_{s1}(\lambda_1)}{C_1 D'(\lambda_1) D_{11}(\lambda_1)} \frac{H_{s2}(\lambda_2)}{C_2 D'(\lambda_2) D_{22}(\lambda_2)}, \ldots, \frac{H_{sn}(\lambda_n)}{C_n D'(\lambda_n) D_{nn}(\lambda_n)} \right\} \tag{1.16}$$

полиномы

$$H_{s\rho}(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{n} h_{s\alpha} D_{\alpha\rho}(\lambda) \tag{1.17}$$

получаются из характеристического определителя матрицы b, если ρ-й его столбец заменить столбцом h_s, а $F_s(z_1, \ldots, z_n)$ найдутся из $f_s(x_1, \ldots, x_n)$ после перехода в них от $x_1, \ldots, x_n$ к $z_1, \ldots, z_n$.

Отметим еще, что на основании (1.11) и (1.12) может быть доказана нужная в дальнейшем формула

$$\frac{H_{sk}(\lambda_\rho)}{D_{jk}(\lambda_\rho)} = \frac{H_{sl}(\lambda_\rho)}{D_{jl}(\lambda_\rho)} \tag{1.18}$$

Прежде чем переходить к рассмотрению некоторых частных случаев, перепишем каноническую систему (1.15) в развернутой форме. Нетрудно видеть, что «канонические уравнения» будут иметь вид:

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + \sum_{s=1}^{m} a_{s\rho} F_s(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{1.19}$$

где

$$a_{s\rho} = \frac{H_{s\rho}(\lambda_\rho)}{C_\rho D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)} \tag{1.20}$$

а полиномы $H_{s\rho}(\lambda)$ определены равенствами (1.17).

На основании зависимостей (1.7) и (1.14) легко получить соотношения, связывающие канонические переменные z_ρ с исходными x_k:

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{\rho=1}^{n} C_\rho D_{\rho k}(\lambda_\rho) z_\rho \qquad (k = 1, \ldots, n) \\ z_\rho &= \frac{1}{C_\rho D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)} \sum_{k=1}^{n} D_{k\rho}(\lambda_\rho) x_k \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.21}$$

Предположим теперь, что в уравнениях (1.3) $m = 1$. В этом случае каноническую систему можно упростить. В самом деле, выбрав произвольные постоянные C_ρ в виде[1]

$$C_\rho = \frac{H_\rho(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)} \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{1.22}$$

[1] Лишние индексы опущены.

будем иметь

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + F(z_1, \ldots, z_n) \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{1.23}$$

причем соотношения (1.21) на основании (1.18) запишутся в форме

$$x_k = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{H_k(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)} z_\rho \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.24}$$

$$z_\rho = \frac{1}{H_\rho(\lambda_\rho)} \sum_{k=1}^{n} D_{k\rho}(\lambda_\rho) x_k \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{1.25}$$

Если же $m \neq 1$, то выбором произвольных постоянных C_ρ все столбцы a_s нельзя обратить в столбцы единиц, однако можно обратить в столбец единиц один из них. Так, например, взяв

$$C_\rho = \frac{H_{1\rho}(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\sigma)} \tag{1.26}$$

будем иметь

$$a_s = \left\{ \frac{H_{s1}(\lambda_1)}{H_{11}(\lambda_1)}, \frac{H_{s2}(\lambda_2)}{H_{12}(\lambda_2)}, \ldots, \frac{H_{sn}(\lambda_n)}{H_{1n}(\lambda_n)} \right\}, \qquad a_{s\rho} = \frac{H_{s\rho}(\lambda_\rho)}{H_{1\rho}(\lambda_\rho)} \qquad \left(\begin{matrix} s=1, \ldots, m \\ \rho=1, \ldots, n \end{matrix}\right) \tag{1.27}$$

В этом случае канонические уравнения сохранят свой прежний вид (1.19), а соотношения (1.21) запишутся в форме

$$x_k = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{H_{1k}(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)} z_\rho \qquad (k=1, \ldots, n) \tag{1.28}$$

$$z_\rho = \frac{1}{H_{1\rho}(\lambda_\rho)} \sum_{k=1}^{n} D_{k\rho}(\lambda_\rho) x_k \qquad (\rho=1, \ldots, n)$$

При решении частных задач, пожалуй, более целесообразно использовать каноническую систему в виде, не содержащем произвольных постоянных.

Если среди собственных значений матрицы b имеется одно, равное нулю, то все сказанное выше остается справедливым.

§ 2. Каноническое преобразование дифференциальных уравнений, описывающих поведение систем «прямого» регулирования с несколькими регулирующими органами. В этом параграфе устанавливаются канонические преобразования систем нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} h_{\beta k} f_\beta(\sigma_\beta) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

$$\sigma_\beta = \sum_{k=1}^{n} j_{\beta k} x_k \qquad (\beta = 1, \ldots, m) \tag{2.2}$$

где $b_{k\alpha}$, $h_{\beta k}$ и $j_{\beta k}$ — постоянные коэффициенты, $f_\beta(\sigma_\beta)$ — нелинейные функции.

Частный случай этой системы, получающийся из (2.1) и (2.2) при $m = 1$, рассматривался А. И. Лурье, следуя которому будем называть уравнения (2.1) и (2.2) уравнениями «прямого» регулирования.

Сравнивая (2.1) с (1.3), можем заключить, что система (2.1) является частным случаем (1.3) и поэтому к ней применимы все результаты предыдущего параграфа.

Переписав (2.1) в матричной форме

$$\dot{x} = bx + \sum_{\beta=1}^{m} h_\beta f_\beta(\sigma_\beta) \tag{2.3}$$

и перейдя к новым переменным $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$, связанным с исходными соотношением

$$x = cz, \qquad |c| \neq 0 \tag{2.4}$$

квадратная матрица c которого определена формулой (1.14), получим каноническую форму уравнения (2.3)

$$\dot{z} = \Lambda z + \sum_{s=1}^{m} a_s f_s(\sigma_s) \tag{2.5}$$

здесь a_s — матрицы-столбцы (1.16), Λ — диагональная матрица собственных значений матрицы b, а σ_s должны быть выражены через новые переменные $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Введя в рассмотрение матрицы-строки

$$j_\beta = \| j_{\beta 1}, \ldots, j_{\beta n} \| \qquad (\beta = 1, \ldots, m) \tag{2.6}$$

мы сможем переписать зависимости (2.2) в виде

$$\sigma_\beta = j_\beta x \qquad (\beta = 1, \ldots, m) \tag{2.7}$$

или после перехода к каноническим переменным z

$$\sigma_s = \gamma_s z \tag{2.8}$$

где

$$\gamma_s = j_s c = \left\| C_1 \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} D_{1\alpha}(\lambda_1), \ldots, C_n \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} D_{n\alpha}(\lambda_n) \right\| \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{2.9}$$

причем суммы, определяющие элементы строк γ_s, могут быть преобразованы к виду

$$\sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} D_{\rho\alpha}(\lambda_\rho) = \frac{D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)}{H_{s\rho}(\lambda_\rho)} M_{ss}(\lambda_\rho) = \frac{D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)}{H_{\beta\rho}(\lambda_\rho)} M_{s\beta}(\lambda_\rho) \tag{2.10}$$

Здесь

$$M_{s\beta}(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} H_{\beta\alpha}(\lambda) \tag{2.11}$$

Следует отметить, что теперь постоянные C_ρ должны выбираться так, чтобы σ_s оставались вещественными.

Таким образом, каноническая форма уравнений «прямого» регулирования (2.1) и (2.2) имеет вид:

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + \sum_{s=1}^{m} a_{s\rho} f_s(\sigma_s) \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{2.12}$$

$$\sigma_s = \sum_{\rho=1}^{n} \gamma_{s\rho} z_\rho \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{2.13}$$

где

$$a_{s\rho} = \frac{H_{s\rho}(\lambda_\rho)}{C_\rho D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)} \qquad (s = 1, \ldots, m;\ \rho = 1, \ldots, n) \tag{2.14}$$

$$\gamma_{s\rho} = C_\rho \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} D_{\rho\alpha}(\lambda_\rho) = C_\rho \frac{D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)}{H_{s\rho}(\lambda_\rho)} M_{ss}(\lambda_\rho) \tag{2.15}$$

а полиномы $H_{s\rho}(\lambda)$ и $M_{ss}(\lambda)$ даются формулами (1.17) и (2.11). Исходные переменные x_k связаны с каноническими z_ρ соотношениями

$$x_k = \sum_{\rho=1}^{n} C_\rho D_{\rho k}(\lambda_\rho) z_\rho \qquad (k = 1, \ldots\ n) \tag{2.16}$$

$$z_\rho = \frac{1}{C_\rho D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)} \sum_{k=1}^{n} D_{k\rho}(\lambda_\rho) x_k \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{2.17}$$

Продифференцировав зависимости (2.13) по времени, найдем

$$\dot{\sigma}_s = \sum_{\rho=1}^{n} \beta_{s\rho} z_\rho + \sum_{\beta=1}^{m} r_{s\beta} f_\beta(\sigma_\beta) \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{2.18}$$

где

$$\beta_{s\rho} = \lambda_\rho \gamma_{s\beta}, \qquad r_{s\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} h_{\beta\alpha} \tag{2.19}$$

Если среди собственных значений матрицы b имеется равное нулю, $\lambda_n = 0$, то следует рассматривать укороченную систему

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + \sum_{s=1}^{m} a_{s\rho} f_s(\sigma_s) \qquad (\rho = 1, \ldots, n-1) \tag{2.20}$$

$$\dot{\sigma}_s = \sum_{\rho-1}^{n} \beta_{s\rho} z_\rho + \sum_{\beta=1}^{m} r_{s\beta} f_\beta(\sigma_\beta) \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{2.21}$$

Решив эту систему, т. е. определив из нее $z_1, \ldots, z_{n-1}, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$, мы можем затем из какого-нибудь соотношения (2.13) найти последнюю переменную z_n, а затем по формулам (2.16) вычислить исходные переменные x_k.

Каноническое преобразование А. И. Лурье получается из приведенного выше как частный случай. Уравнения, рассмотренные А. И. Лурье найдем из (2.1) и (2.2), положив в них $m=1$. Тогда имеем

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + h_k f(\sigma) \quad (k=1,\ldots,n), \qquad \sigma = \sum_{k=1}^{n} j_k x_k \tag{2.22}$$

причем наличие только одного регулирующего органа позволяет выбрать произвольные постоянные C_ρ так, что каноническая система уравнений примет вид:

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + f(\sigma) \quad (\rho=1,\ldots,n), \qquad \sigma = \sum_{\rho=1}^{n} \gamma_\rho z_\rho \tag{2.23}$$

где

$$\gamma_\rho = \frac{M(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)}, \qquad M(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} j_k H_k(\lambda), \qquad H_k(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha D_{\alpha k}(\lambda) \tag{2.24}$$

В самом деле, задавшись в (2.16) ($m=1$)

$$C_\rho = \frac{H_\rho(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)} \tag{2.25}$$

мы приведем систему (2.22) к виду (2.23).

Нетрудно показать, что соотношения, связывающие канонические переменные z_ρ с исходными x_k, запишутся в этом случае в форме

$$x_k = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{H_k(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)} z_\rho \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{2.26}$$

$$z_\rho = \frac{1}{H_\rho(\lambda_\rho)} \sum_{k=1}^{n} D_{k\rho}(\lambda_\rho) x_k \qquad (\rho=1,\ldots,n) \tag{2.27}$$

Если $H_\rho(\lambda_\rho)=0$, то соотношения (2.27) необходимо заменить зависимостями

$$z_\rho = \frac{1}{H_l(\lambda_\rho)} \sum_{k=1}^{n} D_{kl}(\lambda_\rho) x_k \qquad (\rho=1,\ldots,n) \tag{2.28}$$

для получения которых следует обратиться к формуле (1.18).

В зависимостях А. И. Лурье, соответствующих (2.26), перед суммой стоит знак минус. Это различие обусловлено иным написанием характеристического полинома матрицы b. А. И. Лурье составлял его в виде

$$D(\lambda) = |b - \lambda I|$$

Если $m \neq 1$, то мы, так же как и в предыдущем параграфе, можем выбрать произвольные постоянные C_ρ по (2.24). Тогда каноническая система не изменит своего вида (2.12) и (2.13), но коэффициенты ее запишутся в форме

$$\begin{aligned} a_{s\rho} &= \frac{H_{s\rho}(\lambda_\rho)}{H_{1\rho}(\lambda_\rho)} \qquad \binom{s=1,\ldots,m}{\rho=1,\ldots,n} \\ \gamma_{s\rho} &= \frac{H_{1\rho}(\lambda_\rho)}{H_{s\rho}(\lambda_\rho)} \frac{M_{ss}(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)} \end{aligned} \tag{2.29}$$

тогда между каноническими и исходными переменными будут иметь место соотношения

$$x_k = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{H_{1k}(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)} z_\rho \quad (k=1, \ldots, n), \qquad z_\rho = \frac{1}{H_{1\rho}(\lambda_\rho)} \sum_{k=1}^{n} D_{k\rho}(\lambda_\rho)\, x_k \quad (\rho=1, \ldots, n) \tag{2.30}$$

При таком выборе произвольных постоянных остается справедливым все сказанное выше относительно наличия одного нулевого корня характеристического уравнения матрицы b исходной системы (2.3).

§ 3. Каноническое преобразование дифференциальных уравнений, описывающих поведение систем непрямого регулирования с несколькими регулирующими органами. Настоящий параграф посвящен установлению канонического преобразования дифференциальных уравнений, описывающих поведение регулируемых систем непрямого регулирования, имеющих несколько регулирующих органов. Нетрудно показать, что в случае наличия сервомоторов, уравнения которых нелинейны, эти уравнения могут быть записаны в виде

$$\dot{x}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} x_\alpha + \sum_{\beta=1}^{m} n_{\beta k} \xi_\beta \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

$$\dot{\xi}_\beta = f_\beta(\sigma_\beta) \tag{3.2}$$

$$\sigma_\beta = \sum_{k=1}^{n} j_{\beta k} x_k + \sum_{s=1}^{m} r_{\beta s} \xi_s \qquad (\beta = 1, \ldots, m) \tag{3.3}$$

Следуя пути, намеченному в предыдущих параграфах, перепишем уравнения (3.1) в форме одного матричного уравнения

$$\dot{x} = bx + \sum_{\beta=1}^{m} n_\beta \xi_\beta \tag{3.4}$$

матрицы-столбцы x и n_β и квадратная матрица b которого определены в § 1.

При помощи соотношения

$$z = c_1 x + \sum_{s=1}^{m} a_s \xi_s \tag{3.5}$$

перейдем к новым переменным $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Для этого продифференцируем (3.5) по времени

$$\dot{z} = c_1 \dot{x} + \sum_{s=1}^{m} a_s f_s(\sigma_s)$$

и подставим в это равенство $\dot{x}$ из уравнения (3.4), а затем перейдем от x к z по (3.5). После указанных преобразований получим

$$\dot{z} = c_1 b c_1^{-1} + \sum_{s=1}^{m} (c_1 n_s - c_1 b c_1^{-1} a_s)\, \xi_s + \sum_{s=1}^{m} a_s f_s(\sigma_s) \tag{3.6}$$

На основании сказанного о предыдущих параграфах, выбрав $c_1 = c^{-1}$, где c определена формулой (1.15), найдем $c_1 b c_1^{-1} = \Lambda$. Определив затем a_s из соотношений

$$c_1 n_s - c_1 b c_1^{-1} a_s = 0$$

получим каноническую форму уравнения (3.4)

$$\dot{z} = \Lambda z + \sum_{s=1}^{m} a_s f_s(\sigma_s) \tag{3.7}$$

матрицы-столбцы a_s которого имеют вид:

$$a_s = \Lambda^{-1} c_1 n_s = \left\{ \frac{N_{s1}(\lambda_1)}{C_1 \lambda_1 D'(\lambda_1) D_{11}(\lambda_1)}, \frac{N_{s2}(\lambda_2)}{C_2 \lambda_2 D'(\lambda_2) D_{22}(\lambda_2)}, \ldots, \frac{N_{sn}(\lambda_n)}{C_n D'(\lambda_n) D_{nn}(\lambda_n)} \right\} \tag{3.8}$$

где

$$N_{s\rho}(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{n} n_{s\alpha} D_{\alpha\rho}(\lambda) \tag{3.9}$$

Переходя к новым переменным $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ в соотношениях (3.3) (записанных в матричной форме), будем иметь

$$\sigma_s = \gamma_s z + \sum_{\beta=1}^{m} R_{s\beta} \xi_\beta \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{3.10}$$

Здесь

$$\gamma_s = \left\| C_1 \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} D_{1\alpha}(\lambda_1),\ C_2 \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} D_{2\alpha}(\lambda_2), \ldots,\ C_n \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} D_{n\alpha}(\lambda) \right\| \tag{3.11}$$

$$R_{s\beta} = r_{s\beta} - \frac{M_{s\beta}(0)}{D(0)} \qquad \binom{s=1, \ldots, m}{\beta=1, \ldots, m} \tag{3.12}$$

$$M_{s\beta}(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} N_{\beta\alpha}(\lambda)$$

Продифференцировав (3.10) по времени, получим

$$\dot{\sigma}_s = \beta_s z + \sum_{\beta=1}^{m} r_{s\beta} f_\beta(\sigma_\beta) \qquad (\beta_s = \gamma_s \Lambda) \tag{3.13}$$

Таким образом, переходя от переменных x_k к новым, каноническим переменным z_ρ по формулам

$$x_k = \sum_{\rho=1}^{n} C_\rho D_{\rho k}(\lambda_\rho) z_\rho - \sum_{s=1}^{m} \frac{N_{sk}(0)}{D'(0)} \xi_s \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.14}$$

$$z_\rho = \frac{1}{C_\rho D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)} \sum_{k=1}^{n} D_{k\rho}(\lambda_\rho) x_k +$$

$$+ \frac{1}{C_\rho \lambda_\rho D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)} \sum_{s=1}^{m} N_{s\rho}(\lambda_\rho) \xi_s \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{3.15}$$

мы приведем исходную систему уравнений (3.1), (3.2) и (3.3) к каноническому виду

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + \sum_{s=1}^{m} a_{s\rho} f_s(\sigma_s) \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{3.16}$$

$$\sigma_s = \sum_{\rho=1}^{n} \gamma_{s\rho} z_\rho + \sum_{\beta=1}^{m} R_{s\beta}\xi_\beta \tag{3.17}$$

$$\dot{\sigma}_s = \sum_{\rho=1}^{n} \beta_{s\rho} z_\rho + \sum_{\beta=1}^{m} r_{s\beta} f_\beta(\sigma_\beta) \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{3.18}$$

причем коэффициенты $a_{s\rho}$, $\gamma_{s\rho}$, $\beta_{s\rho}$ и $R_{s\beta}$ даются формулами

$$a_{s\rho} = \frac{N_{s\rho}(\lambda_\rho)}{C_\rho \lambda_\rho D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)}, \qquad \gamma_{s\rho} = C_\rho \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha} D_{\rho\alpha}(\lambda_\rho)$$
$$\beta_{s\rho} = \lambda_\rho \gamma_{s\rho}, \qquad R_{s\beta} = r_{s\beta} - \frac{M_{s\beta}(0)}{D(0)} \tag{3.19}$$

а входящие в (3.19) полиномы $N_{s\rho}(\lambda)$ и $M_{s\beta}(\lambda)$ определены соотношениями (3.9) и (3.12).

Если одно из собственных значений матрицы b равно нулю, $\lambda_n = 0$, то теряет смысл формула (3.15), тогда как (3.14) остается в силе. Каноническая система также не изменяет своего вида.

Точно так же как и в предыдущем параграфе, может быть получено каноническое преобразование А. И. Лурье дифференциальных уравнений, описывающих поведение систем непрямого регулирования с одним регулирующим органом. Для этого в выписанных выше соотношениях следует принять $m = 1$ и определить постоянные C_ρ так, чтобы все коэффициенты $a_{1\rho} = a_\rho$ обратились в единицы. Нетрудно показать, что C_ρ следует взять в виде

$$C_\rho = \frac{N_\rho(\lambda_\rho)}{\lambda_\rho D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)} = \frac{N_\alpha(\lambda_\rho)}{\lambda_\rho D'(\lambda_\rho) D_{\rho\alpha}(\lambda_\rho)} \tag{3.20}$$

Тогда каноническая система запишется в форме

$$\dot{z}_\rho = \lambda_\rho z_\rho + f(\sigma) \quad (\rho = 1, \ldots, n), \qquad \sigma = \sum_{\rho=1}^{n} \gamma_\rho z_\rho + R\xi, \qquad \dot{\sigma} = \sum_{\rho=1}^{n} \beta_\rho z_\rho + r f(\sigma) \tag{3.21}$$

причем

$$x_k = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{N_k(\lambda_\rho)}{\lambda_\rho D'(\lambda_\rho)} z_\rho - \frac{N_k(0)}{D(0)}\xi \qquad (k = 1, \ldots, n)$$
$$z_\rho = \frac{\lambda_\rho}{N_\rho(\lambda_\rho)} \sum_{k=1}^{h} D_{k\rho}(\lambda_\rho) x_k + \xi \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{3.22}$$

Аналогично могут быть выбраны произвольные постоянные и при $m \neq 1$. Так, например, положив

$$C_\rho = \frac{N_{1\rho}(\lambda_\rho)}{\lambda_\rho D'(\lambda_\rho) D_{\rho\rho}(\lambda_\rho)} \tag{3.23}$$

мы не изменим вида канонической системы (3.16), (3.18), но для коэффициентов ее получим зависимости

$$
\begin{aligned}
a_{s\rho} &= \frac{N_{s\rho}(\lambda_\rho)}{N_{1\rho}(\lambda_\rho)}, & \gamma_{s\rho} &= \frac{N_{1\rho}(\lambda_\rho)}{\lambda_\rho N_{s\rho}(\lambda_\rho)} \frac{M_{ss}(\lambda_\rho)}{D'(\lambda_\rho)} \\
\beta_{s\rho} &= \lambda_\rho \gamma_{s\rho}, & R_{s\beta} &= r_{s\beta} - \frac{M_{s\beta}(0)}{D(0)}
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Соотношения, связывающие исходные переменные с каноническими, примут более простой вид:

$$
\begin{aligned}
x_k &= \sum_{\rho=1}^{n} \frac{N_{1k}(\lambda_\rho)}{\lambda_\rho D'(\lambda_\rho)} z_\rho - \sum_{s=1}^{m} \frac{N_{sk}(0)}{D(0)} \xi_s \qquad (k = 1, \ldots, n) \\
z_\rho &= \frac{\lambda_\rho}{N_{1\rho}(\lambda_\rho)} \sum_{k=1}^{n} D_{k\rho}(\lambda_\rho) x_k + \sum_{s=1}^{m} N_{s\rho}(\lambda_\rho) \xi_s \qquad (\rho = 1, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

При решении частных задач, пожалуй, удобнее использовать каноническую форму уравнений в виде, не содержащем произвольных постоянных, так как это в некоторой степени сокращает необходимые выкладки.

Поступила 16 X 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. О канонической форме уравнений теории автоматического регулирования. ПММ, т. XII, вып. 5, стр. 651—666, 1948.
2. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951.
3. Фрезер Р., Дункан В. и Коллар А. Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, стр. 83—89. Изд. иностр. литературы, 1950.