Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ КОНВЕКЦИИ

В. С. Сорокин

(Молотов)

В отличии от твердых тел жидкости и газы не могут, вообще говоря, находиться в равновесии в поле тяжести, если они нагреты неравномерно, так как различие плотности неодинаково нагретых частиц вызывает движение (конвекцию), более или менее сложное в зависимости от величин разностей температуры. Равновесие оказывается возможным только в исключительных случаях, и в этих случаях наблюдается интересное явление — скачкообразное возникновение конвекции, когда градиент температуры достигает некоторого критического значения. Исследование таких случаев, интересное и само по себе, оказывается еще более важным, так как оно проливает свет и на явления, происходящие в условиях, когда равновесие невозможно.

§ 1. Условие возможности равновесия. Рассмотрим прежде всего, при каких условиях вообще возможно равновесие в неравномерно нагретой жидкости? Ограничимся случаем, когда изменение плотности, вызванное неодинаковостью давлений, мало по сравнению с изменением плотности, связанным с неравномерной нагретостью, т. е. когда

$$\alpha g\rho_0 z \ll \beta\Delta T \qquad \text{или} \qquad z \ll \frac{\beta\Delta T}{\alpha g\rho_0} \qquad \left(\frac{\Delta\rho_0}{\rho_0} \ll 1\right) \tag{1.1}$$

Здесь β и α — коэффициенты расширения и сжимаемости g — напряженность поля тяжести, ρ_0 — плотность жидкости, ΔT — разность температур и z — разность высот двух частиц жидкости; кроме того, как указано в скобках, предполагается, что изменение плотности относительно мало.

Уравнения движения при этом имеют вид:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}T \\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \qquad \dot{T} + (\mathbf{v}\nabla)T = \chi\nabla^2 T\end{gathered} \tag{1.2}$$

Они получаются из общих уравнений гидродинамики, если пренебречь тепловым расширением везде, кроме членов, содержащих g, и обозначить через p разность между действительным давлением и тем давлением, которое было бы, если бы температура и плотность были везде одинаковы и равны соответственно T_0 и ρ_0.

В уравнениях (1.2) через T обозначена разность температуры и T_0, через ν — кинематическая вязкость, а χ — температуропроводность. Для определенности будем предполагать, что жидкость все время расширяется при нагревании, т. е. что $\beta > 0$.

Если равновесие возможно, то уравнения (1.2) должны иметь решение вида $v = 0$, $T = T_0(\mathbf{r})$, $p = p_0(\mathbf{r})$, причем $T_0(\mathbf{r})$ и $p_0(\mathbf{r})$ должны удовлетворять уравнениям

$$-\frac{1}{\rho_0}\nabla p_0 - \beta \mathbf{g} T_0 = 0, \qquad \nabla^2 T_0 = 0 \tag{1.3}$$

Взяв ротор от первого из уравнений, получим $\beta \nabla T_0 \times \mathbf{g} = 0$. Это означает, что везде в жидкости градиент температуры должен быть параллелен вектору $\mathbf{g}$. Следовательно, можно ввести единичный вектор $\boldsymbol{\gamma}$, направленный вертикально вверх, и написать $\nabla T_0 = -A_0(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\gamma}$.

Отсюда вытекает далее, что $\nabla \times \nabla T_0 = -\nabla A_0 \times \gamma = 0$, т. е. что градиент A_0 вертикален, а это значит, что A_0 зависит только от вертикальной координаты $A_0 = A_0(\mathbf{r}\boldsymbol{\gamma})$.

Наконец, второе уравнение (1.3) дает

$$\nabla^2 T_0 = -\boldsymbol{\gamma}\nabla A_0 = -A_0'(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{или} \quad A_0 = \text{const} \tag{1.4}$$

Итак, равновесие возможно только тогда, когда градиент температуры во всей массе жидкости постоянен и направлен вертикально:

$$\nabla T_0 = -A_0 \boldsymbol{\gamma} \tag{1.5}$$

Замечание. Этот простой результат показывает, что чистая теплопроводность в неподвижной жидкости возможна только в исключительных случаях. До последнего времени рассматривался только случай горизонтального плоского слоя [1,2]. Совсем недавно [3] было замечено, что равновесие возможно также, если жидкость заполняет шаровую или бесконечно длинную цилиндрическую (горизонтальную или вертикальную) полость в твердом массиве, подогреваемом снизу. Повидимому, эти случаи исчерпывают все возможности, когда в окружающем полость твердом массиве задается градиент температуры в бесконечности. Можно, конечно, задать градиент температуры прямо на стенках полости таким образом, чтобы он был постоянен внутри нее, хотя это довольно трудно сделать для полости любой формы.

§ 2. Уравнения малых возмущений. Допустим, что в жидкости, находящейся в равновесии при постоянном градиенте температуры, почему-либо возникает медленное движение. Будет ли оно затухать с течением времени или, наоборот, начнет усиливаться?

Предположим, что возникло движение с малой скоростью v и связанное с ним изменение температуры и давления. Заменив в уравнениях (1.2) T и p на $-A_0\boldsymbol{\gamma}\mathbf{r} + T$ и $p_0 + p$, получим, учтя условия равновесия и отбросив малые по предположению, квадратичные относительно возмущений члены:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \nu \,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} + \beta g T \boldsymbol{\gamma} \\ \mathrm{div}\,\mathbf{v} &= 0, \qquad \dot{T} - A_0 \mathbf{v}\boldsymbol{\gamma} = \chi \nabla^2 T \end{aligned} \tag{2.1}$$

Если жидкость заполняет полость в массиве, где на бесконечности задан градиент температуры, то эти уравнения надо продолжить в массив, где они будут иметь вид:

$$\mathbf{v} = 0, \qquad \dot{T}^\times = \chi^\times \nabla^2 T^\times \tag{2.2}$$

Здесь $\chi^\times$ — температуропроводность в массиве, $T^\times$ — возмущение температуры в нем. На границе полости должны выполняться условия непрерывности

$$T = T^\times, \qquad \varkappa \frac{\partial T}{\partial n} = \varkappa^\times \frac{\partial T^\times}{\partial n} \tag{2.3}$$

а на бесконечности $T \to 0$.

Если же температура или поток тепла задаются прямо на стенках полости, то уравнения (2.1) нужно решать с граничными условиями, выражающими неизменность температуры на одних частях поверхности (S_1) и неизменность нормальной составляющей градиента температуры (т. е. теплового потока) на других (S_2), т. е.

$$T = 0 \quad \text{на } S_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{на } S_2 \tag{2.4}$$

Кроме того, конечно, на границе полости скорость жидкости

$$\mathbf{v} = 0 \qquad \text{на } S \tag{2.5}$$

Линейные уравнения (2.1) должны иметь решение, зависящее от времени по закону $e^{-\sigma t}$, причем σ может быть комплексным. При такой зависимости всех переменных от времени уравнения (2.1) и (2.2) принимают вид:

$$-\sigma \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \beta g T \boldsymbol{\gamma} \tag{2.6}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad -\sigma T = A_0 \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma} + \chi \nabla^2 T, \qquad -\sigma T = \chi^\times \nabla^2 T \tag{2.7}$$

Равновесие будет устойчивым, если вещественные части всех собственных чисел σ системы (2.6), (2.7) будут положительны.

Даже не решая этих уравнений, можно сделать некоторые заключения о величинах σ. Етли σ комплексно, то вместе с решением $(\mathbf{v}, T, p; \sigma)$ будет существовать другое решение тех же уравнений (2.6) с теми же граничными условиями, именно комплексно-сопряженное с первым $(\mathbf{v}^*, T^*, p^*; \sigma^*)$. Умножим обе части первого и третьего уравнений (2.6) соответственно на $\mathbf{v}^*$ и T^* и проинтегрируем по всему объему. Интегрируя, где нужно, по частям, получим

$$\begin{aligned} -\sigma \int \mathbf{v}\mathbf{v}^* dV &= -\nu \int \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}^* dV + \beta g \int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}^* T dV \\ -\sigma \int T T^* dV &= A_0 \int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v} T^* dV - \chi \int \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} T^* dV \end{aligned} \tag{2.8}$$

Затем вычтем из каждого из этих уравнений комплексно-сопряженное с ним:

$$\begin{aligned} (\sigma^* - \sigma) \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* dV &= \beta g \left[\int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}^* T dV - \int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}\, T^* dV \right] \\ (\sigma^* - \sigma) \int T T^* dV &= -A_0 \left[\int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}^* T dV - \int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}\, T^* dV \right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

Из этих соотношений получается

$$(\sigma^* - \sigma)\int [A_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* + \beta g T T^*]\, dV = 0 \tag{2.10}$$

При подогревании снизу $A_0 > 0$ и, следовательно, интеграл не равен нулю, так что $\sigma^* = \sigma$. Это значит, что σ всегда вещественно, так что в этом случае возмущения могут или монотонно затухать, или монотонно нарастать. Пульсирующие же движения невозможны.

Если жидкость подогревается сверху, такого заключения сделать нельзя, так как интеграл может оказаться равным нулю ($A_0 < 0$). В этом случае рассмотрим вместо разностей суммы уравнений (2.8) и их комплексно-сопряженных:

$$\begin{gathered}(\sigma^* + \sigma)\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^* dV = 2\nu \int \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}^*\, dV - \beta g \int [\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}^* T + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}\, T^*] dV \\ (\sigma^* + \sigma)\int TT^*\, dV = 2\chi \int \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} T^* dV - A_0 \int [\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}^* T + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v} T^*] dV\end{gathered} \tag{2.11}$$

Они дают

$$\begin{gathered}(\sigma^* + \sigma)\int \left[\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*}{\beta g} + \frac{TT^*}{-A_0}\right] dV = \\ = \frac{2\nu}{\beta g}\int \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}^*\, dV + \frac{2\chi}{-A_0}\int \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} T^* dT\end{gathered} \tag{2.12}$$

и так как теперь оба интеграла положительны и могут быть нулями только при $v = 0$, $T = 0$, то $\sigma^* + \sigma > 0$, т. е. при подогреве сверху (и нормальном тепловом расширении) всякое движение будет затухать и конвекция невозможна.

Вернемся к случаю подогрева снизу ($A_0 > 0$). Так как здесь σ вещественно, то и $\mathbf{v}$ и T можно считать вещественными. Уравнения (2.12) дают тогда

$$\sigma = \frac{J}{K} \tag{2.13}$$

где

$$J = \int \left(\frac{\nu}{\beta g} (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 + \frac{\chi}{A_0} (\operatorname{grad} T)^2 - 2\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}\, T\right) dV \tag{2.14}$$

$$K = \int \left(\frac{\mathbf{v}^2}{\beta g} + \frac{T^2}{A_0}\right) dV \tag{2.15}$$

и видно, что σ уже не обязательно положительно. При подогреве снизу движение может быть и устойчивым и неустойчивым.

§ 3. Вариационный принцип и доказательство существования критического градиента. Уравнения (2.6) можно рассматривать как уравнения Эйлера некоторой вариационной задачи. Пусть нужно найти стационарное значение интеграла J, определенного (2.14), при дополнительных условиях

$$K = 1, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{3.1}$$

причем на границе полости или на бесконечности имеют место условия (2.3) и (2.4). Интегралы (2.14) и (2.15) можно считать распространенными на все пространство. Тогда χ в твердом массиве следует считать равным $\chi^\times$.

Чтобы получить уравнения Эйлера, варьируем выражения (2.14), (2.15) для J, K. Освобождая вариации из-под производных интегрирования по частям, получим

$$\delta J = \int\left(\frac{\nu}{\beta g}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v} - \gamma T\right)\cdot\delta\mathbf{v}\,dV - \int\left(\frac{\chi}{A_0}\nabla^2 T + \gamma\mathbf{v}\right)\cdot\delta T\,dV$$

$$\delta K = \int\left(\frac{\mathbf{v}}{\beta g}\cdot\delta\mathbf{v} + \frac{T}{A_0}\delta T\right)dV$$

Вариацию δK умножим на множитель Лагранжа, обозначив его $-\sigma$. Варьируя второе условие (3.1), умножим его также на множитель Лагранжа $-p/\rho_0\beta g$, проинтегрируем по объему и выведем вариацию из-под знака производной, проинтегрировав по частям

$$\int\frac{\operatorname{grad} p}{\rho_0\beta g}\cdot\delta\mathbf{v}\,dV$$

Складывая все это и приравнивая нулю множители при $\delta\mathbf{v}$ и δT, получим в точности уравнения (2.6).

Легко показать, что интеграл J при дополнительных условиях (3.1) имеет нижнюю грань, т. е. что наименьший экстремум будет минимумом. Для доказательства заметим, что по неравенству Буняковского-Шварца

$$\left|\int\mathbf{v}\gamma\,T dV\right|^2 \leqslant \left(\int(\mathbf{v}\gamma)^2\,dV\right)\int T^2 dV \leqslant \int\mathbf{v}^2\,dV\int T^2\,dV$$

Следовательно,

$$J \geqslant -(\beta g A_0)^{1/2}\left[\left(\int\frac{\mathbf{v}^2}{\beta g}\,dV\right)\int\frac{T^2}{A_0}\,dV\right]^{1/2}$$

Так как оба интеграла в этом выражении связаны условием нормировки (3.1), то здесь выражение в квадратных скобках не больше единицы. Отсюда следует, что

$$J \geqslant -(\beta g A_0)^{1/2} \tag{3.2}$$

Отметим, что верхняя грань возможных значений J равна $+\infty$, так как при почти разрывных течениях вихрь скорости может быть сколь угодно большим. Итак, наименьшее σ_0 равно минимальному значению выражения (2.13), т. е.

$$\sigma_0 = \min\frac{J}{K} \tag{3.3}$$

при всевозможных $\mathbf{v}$ и T, удовлетворяющих граничным условиям и условию несжимаемости (3.1). Было бы нетрудно показать, что и все остальные собственные значения σ равны минимумам этого же выражения при некоторых дополнительных условиях ортогональности пар функций $\mathbf{v}$, T к собственным функциям более низких σ совершенно так же, как в обычной задаче о собственных значениях. Нет смысла останавливаться на этом подробнее, так как наименьшее σ важно для суждения об устойчивости. Для наименьшего же σ условие минимальности (3.3) позволяет вывести одно очень важное свойство, именно позволяет установить характер зависимости σ_0 от параметров задачи.

Введем в (3.3) безразмерные переменные, приняв за единицу длины характерный размер полости R и подобрав единицы скорости v_1 и температуры T_1 так, чтобы коэффициенты при двух первых слагаемых в числителе стали одинаковыми. Это дает

$$\frac{v_1}{T_1} = \left(\frac{\chi\beta g}{\nu A_0}\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

Если попрежнему обозначать скорость и температуру в новых единицах через $\mathbf{v}$ и T, то для σ получится

$$\frac{R^2}{\chi}\sigma = \min\frac{J_1}{K_1} \tag{3.5}$$

где

$$J_1 = \int\left\{(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})^2 + (\mathrm{grad}\,T)^2 - 2\left[\frac{\beta g R^4 A_0}{\nu\chi}\right]^{1/2}\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}T\right\}dV \tag{3.6}$$

$$K_1 = \frac{\chi}{\nu}\int\mathbf{v}^2 dV + \int T^2 dV \tag{3.7}$$

а граничные условия и условие несжимаемости останутся без изменения, так как они однородны. Выражения (3.5)—(3.7) показывают, что (для случая, когда граничные условия заданы на самой границе полости)

$$\sigma = \frac{\chi}{R^2} f\left(\frac{\chi}{\nu},\ \frac{\beta g R^4 A_0}{\nu\chi}\right) \tag{3.8}$$

как и следовало ожидать по теории подобия.

Важнее всего второе следствие: если увеличивать градиент температуры A_0, то последний член выражения (3.6) увеличивается по абсолютной величине для любых $\mathbf{v}$ и T. Для удобства обозначим

$$I = \int\mathbf{v}\boldsymbol{\gamma}T\,dV \tag{3.9}$$

Если $\mathbf{v}$ и T таковы, что $I < 0$, это приведет к увеличению всей дроби, но тогда для v и $-T$ получится $I > 0$ и соответствующее значение выражения (3.5), бывшее и раньше меньше его значения для $\mathbf{v}$ и T, еще больше уменьшится. Следовательно, уменьшится (или по крайней мере не увеличится) и минимум выражения (3.5), т. е. σ_0. Поэтому σ_0 *уменьшается с увеличением градиента температуры*, и так как, каковы бы ни были v и T (при $I > 0$), можно всегда взять A_0 настолько большим, что выражение (3.5) станет отрицательным, *то при достаточно больших градиентах температуры равновесие всегда не устойчиво*.

Переход от устойчивого равновесия к неустойчивому происходит при некотором критическом градиенте A_0, при котором наименьшее значение σ равно нулю. Очевидно, что тогда числитель J_1 выражения (3.5) обратится в нуль, и, следовительно, согласно (3.6) для критического A_0 будет иметь место равенство

$$\left[\frac{\beta g R^4 A_0}{\nu\chi}\right]^{1/2} = \frac{1}{2I}\int\{(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})^2 + (\mathrm{grad}\,T)^2\}\,dV \tag{3.10}$$

где в правой части стоят те $\mathbf{v}$ и T, которые соответствуют стационарному движению ($\sigma = 0$), а I — согласно (3.9). Точно такие же результаты получаются, как можно показать, и для высших σ. Каждое из них при некотором A_0 обращается в нуль, и соответствующее возмущение при больших градиентах оказывается неустойчивым.

§ 4. Стационарные движения. Критические движения описываются, очевидно, уравнениями (2.6), в которых нужно положить $\sigma = 0$, т. е.

$$\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p + \nu \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{v} - \beta g \boldsymbol{\gamma} T = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad A_0 \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v} + \chi \nabla^2 T = 0 \tag{4.1}$$

с прежними граничными условиями (2.3) и (2.4). Критические градиенты можно рассматривать, как характеристические числа системы (4.1). При переходе через каждый критический градиент равновесие становится неустойчивым относительно возмущения еще одного вида. Все критические движения удовлетворяют некоторым условиям ортогональности, которые можно получить так.

Рассмотрим два решения уравнений (4.1), соответствующие двум различным градиентам ($\mathbf{v}$, T, p; A) и ($\mathbf{v}_1$, T_1, p_1; A_1). Если умножить уравнения для первого решения соответственно на $\mathbf{v}_1$ и T_1 и проинтегрировать по всему объему, то получим

$$\begin{aligned} &\nu \int \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}\, dV - \beta g \int \boldsymbol{\gamma} \mathbf{v}_1 T\, dV = 0 \\ &-\chi \int \operatorname{grad} T_1 \cdot \operatorname{grad} T\, dV + A \int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v} T_1\, dV = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Точно таким же способом из уравнений для второго решения получим

$$\begin{aligned} &\nu \int \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_1\, dV - \beta g \int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v} T_1\, dV = 0 \\ &-\chi \int \operatorname{grad} T \cdot \operatorname{grad} T_1\, dV + A_1 \int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}_1 T\, dV = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Разность первых уравнений (4.2) и (4.3) дает

$$\int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v} T_1\, dV = \int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}_1 T\, dV \tag{4.4}$$

Разность вторых уравнений (4.2) и (4.3), если использовать (4.4), дает

$$(A - A_1) \int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v} T_1\, dV = 0 \tag{4.5}$$

Если A не равно A_1, то отсюда вытекает

$$\int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v} T_1 T\, dV = \int \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}_1 T\, dV = 0 \tag{4.6}$$

Далее из (4.3)

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_1\, dV = 0, \qquad \int \operatorname{grad} \cdot \operatorname{grad} T_1\, dV = 0 \tag{4.7}$$

Можно сказать, что вихри двух разных критических движений ортогональны друг к другу, так же как и градиенты температур.

Кроме того, вертикальная составляющая одного движения ортогональна к температуре другого[1].

В случае, когда оба движения одинаковы, уравнения (4.2) дают

$$A = \frac{\chi}{I} \int (\operatorname{grad} T)^2\, dV \tag{4.8}$$

$$\nu \int (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2\, dV = \beta g I = \frac{\beta g \chi}{A} \int (\operatorname{grad} T)^2\, dV \tag{4.9}$$

[1] В работе [3] некоторые из этих результатов были получены для частного случая конвекции в неограниченном плоском горизонтальном слое.

Поэтому можно написать

$$A = \frac{\chi\beta g}{\nu}\left(\int (\operatorname{grad} T)^2\, dV\right) : \left(\int (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2\, dV\right) \qquad (4.10)$$

что еще раз подтверждает положительность критических градиентов. Легко видеть, что при $A = 0$ единственное решение будет $T = 0$, $v = 0$, и если исключить этот тривиальный случай, то все критические A образуют возрастающую последовательность положительных чисел.

Для действительного вычисления критических градиентов в конкретных случаях существенно, что уравнения стационарной конвекции (4.1) также могут быть получены из вариационного принципа.

Чтобы показать это, введем безразмерные переменные, как это было сделано выше [формула (3.4)], и, подобрав подходящим образом единицы для p и ρ_0 (знать их нам не будет нужно), перепишем уравнения (4.1) в форме

$$-\operatorname{grad} p - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{v} + C\boldsymbol{\gamma} T = 0, \quad \nabla^2 T + C\boldsymbol{\gamma}\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad (4.11)$$

Через C здесь обозначено собственное число этой новой системы уравнений, равное, как легко подсчитать:

$$C = \left[\frac{\beta g A R^4}{\nu\chi}\right]^{1/2} = [PrGr]^{1/2} \qquad (4.12)$$

Рассмотрим теперь такую вариационную задачу: найти стационарные значения интеграла

$$J^0 \equiv \frac{1}{2}\int [(\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 + (\operatorname{grad} T)^2]\, dT \qquad (4.13)$$

при дополнительных условиях

$$I \equiv \int \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{v} T dV = 1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad (4.14)$$

Интегралы здесь можно считать распространенными или только на объем жидкости, или на весь объем жидкости и твердого массива. В первом случае на границе жидкости должны иметь место условия (2.4), во втором же в твердом массиве скорость равна нулю и часть интеграла J, относящуюся к массиву, нужно писать

$$\frac{\lambda}{2}\int (\operatorname{grad} T)^2\, dV \quad \left(\lambda = \frac{\varkappa^{\times}}{\varkappa}\right) \qquad (4.15)$$

где через градиент λ обозначено отношение теплопроводностей жидкости и массива. Обе эти возможности будем различать как варианты A и $Б$.

Вариант А. Варьирование интеграла J дает, если проинтегрировать по частям и использовать условия на границе

$$\delta J^{\circ} = \int (\operatorname{rot} \mathbf{v}\cdot\operatorname{rot} \delta\mathbf{v} + \operatorname{grad} T\cdot\operatorname{grad} \delta T)\, dV =$$
$$= \int (\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v} - \nabla^2 T\cdot\delta T)\, dV \qquad (4.16)$$

Вариация условия (4.14) даст

$$\delta I = \int (\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{v}\delta T + \boldsymbol{\gamma} T\cdot\delta\mathbf{v})\, dV \qquad (4.17)$$

Наконец, вариация условия несжимаемости после умножения на множитель Лагранжа $-p(r)$ и интегрирование по частям даст

$$-\int p\,(\operatorname{div}\delta\mathbf{v})\,dV = \int \operatorname{grad} p \cdot \delta\mathbf{v}\,dV \tag{4.18}$$

Умножив δI на лангранжев множитель C, сложим полученное выражение с (4.16) и (4.18) и приравняем коэффициенты при δv и δT нулю. Это даст как раз уравнения (4.11).

Вариант Б. Варьирование интеграла J дает в жидкости

$$\delta J^{\circ} = \int\{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v} - \nabla^2 T\cdot\delta T\}\,\delta V + \int(\operatorname{grad} T\cdot d\mathbf{S})\,\delta T \tag{4.19}$$

В твердом же массиве при условии, что температура стремится к нулю на бесконечности:

$$\delta J^{\times} = -\lambda\int\nabla^2 T^{\times}\delta T^{\times} dV - \lambda\int \operatorname{grad} T^{\times}\cdot d\mathbf{S}\,\delta T \tag{4.20}$$

Все остальное остается без изменения, как в случае A. Поступая так же, как там, получим в жидкости опять уравнения (4.11). В массиве вместо этого будет $\lambda\nabla^2 T^{\times} = 0$, а на границе жидкости само собой получится условие равенства нормальных потоков тепла $(\operatorname{grad}\boldsymbol{T})_n = \lambda\,(\operatorname{grad} T^{\times})_n$.

Вариационная задача (4.13)—(4.14) не совсем обычна, так как интеграл в дополнительном условии (4.14) не положительно-определенный. Можно, однако, не теряя никаких значений интеграла J°, рассматривать только такие скорости и температуры, для которых интеграл I положителен. В самом деле, если для каких-нибудь $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{T}$ интеграл I отрицателен, то для $\mathbf{v}$ и $-T$ он будет положителен, значение же интеграла J° в обоих случаях одно и то же. Конечно, нужно исключить такие распределения скорости и температуры, для которых интеграл I равен нулю. Но такие скорости и температуры не могут давать интегралу J° стационарного значения, так как, если бы это было так, из уравнений (4.11) следовало бы, что и градиент температуры и вихрь скорости равны нулю. Но тогда и сами эти величины были бы нулями. Легко показать, что при указанных выше ограничениях нижняя грань интеграла J° положительна.

Для отыскивания первого критического решения среди всех несжимаемых течений и всех распределений температуры (которые могут быть какими угодно, лишь бы были удовлетворены граничные условия) найдем такие $\mathbf{v}_1$ и T_1, для которых выполнено условие (4.14), а интеграл J° имеет минимальное значение. Это распределение скорости и температуры будет удовлетворять уравнениям (4.11) с некоторым значением C_1, причем это C_1 будет равно минимальному значению интеграла J°, так как из уравнений (4.11) следует, что

$$C_1 = \left[\tfrac{1}{2}\int\{(\operatorname{rot}\mathbf{v}_1)^2 + (\operatorname{grad} T)^2\}\,dV\right] : \left[\int \gamma\mathbf{v}_1 T_1 dV\right] \tag{4.21}$$

Если нужно найти остальные критические решения, то будем снова искать минимум интеграла J, наложив на скорость и температуру, кроме прежних условий, еще дополнительное требование ортогональности к уже найденному решению ($\mathbf{v}_1$, T_1; C_1). Это условие можно взять, например, в форме

$$\int \gamma \mathbf{v}_1 T dV = 0 \tag{4.22}$$

Уравнение Эйлера будет тогда иметь вид:

$$\operatorname{grad} p_2 + \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{v}_2 - C_2 \gamma T_2 = 0, \qquad \nabla^2 T_2 + C_2 \gamma \mathbf{v}_2 + D \gamma \mathbf{v}_1 = 0 \tag{4.23}$$

и из них следует, что

$$\begin{gathered}\int \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 dV = C_2 \int \gamma \cdot \mathbf{v}_1 T_2 dV = 0 \\ \int \operatorname{grad} T_1 \cdot \operatorname{grad} T_2 dV - C_2 \int \gamma \cdot \mathbf{v}_2 T_1 dV - D = 0\end{gathered} \tag{4.24}$$

Из уравнений же для первого критического решения (4.11) получаются аналогичные соотношения

$$\begin{gathered}\int \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 dV = C_1 \int \gamma \cdot \mathbf{v}_2 T_1 dV \\ \int \operatorname{grad} T_2 \cdot \operatorname{grad} T_1 dV = C_1 \int \gamma \cdot \mathbf{v}_1 T_2 dV = 0\end{gathered} \tag{4.25}$$

Отсюда вытекают, во-первых, все остальные условия ортогональности для вихрей скорости и градиентов температур, а также ортогональность в смысле равенства (4.22).

Во-вторых, из (4.24) следует, что $D = 0$, так что для нового критического решения опять получаются уравнения (4.11), а C_2 будет равно минимуму интеграла J при дополнительном условии ортогональности (4.22). Очевидно, что между C_1 и C_2 уже не может быть критических C, так как соответствующие им решения были бы ортогональны к первому и, следовательно, C было бы больше C_2. Точно так же можно поступить и дальше: требуя от искомого решения ортогональности к уже найденным $(n-1)$ решениям, мы получим n-е решение и т. д.

Для приближенного вычисления критических градиентов можно применить метод Ритца. Наименьший критический градиент, определяющий условия устойчивости, можно найти очень просто, строя удовлетворяющие граничным условиям приближенные выражения для скорости и температуры с несколькими неопределенными параметрами и определяя эти параметры из условия минимума выражения (4.21). Остальные критические градиенты менее интересны, так как равновесное состояние (чистая теплопроводность) не осуществимо практически при $C > C_{\min}$.

Поступила 14 V 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. Phil. Mag., 32, 529, 1916.
2. Pellew A and Southwell R. V. On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc. A. 176, 312, 1940.
3. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. ГИТТЛ, 1952.