Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

О ВОЛНОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ КАРАВАНА СУДОВ

А. А. Костюков

(Одесса)

В настоящей статье приводится решение задачи о волновом сопротивлении конечного каравана судов, расположенных в кильватерном порядке.

Для упрощения задачи принимаются допущения о форме судов такие же, как и в теории Мичелля, т. е. рассматриваются суда, поверхность которых весьма мало отходит от их диаметральной плоскости. Остальные допущения являются обычными допущениями теории волнообразования и волнового сопротивления, а именно жидкость принимается идеальной несжимаемой и однородной, подверженной действию сил тяжести; движение предполагается безвихревым, т. е. обладающим потенциалом скоростей. Амплитуды волн, образуемых движущимися судами, принимаются достаточно малыми.

Движение каравана судов рассматриваем по поверхности бесконечно глубокой жидкости.

Выражение для волнового сопротивления корабля согласно Мичеллю, как известно, имеет следующий вид:

$$R_w = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int\limits_1^\infty (J_1{}^2 + J_2{}^2) \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \tag{1}$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^T e^{-\nu\lambda^2\zeta}\, d\zeta \int\limits_{-1/2\, L}^{1/2\, L} \cos(\nu\lambda\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi}\, d\xi$$

$$J_2 = \int\limits_0^T e^{-\nu\lambda^2\zeta}\, d\zeta \int\limits_{-1/2\, L}^{1/2\, L} \sin(\nu\lambda\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi}\, d\xi \tag{2}$$

Здесь $\eta = f(\xi, \zeta)$ — уравнение судовой поверхности, L и T — соответственно длина и осадка судна, v — скорость движения судна, g — ускорение силы тяжести, ρ — массовая плотность жидкости, $\nu = g / v^2$.

Прямоугольные оси координат выбраны следующим образом: оси ξ и η лежат на свободной поверхности жидкости в состоянии ее покоя, а ось ζ направлена по вертикали вниз.

Систему координатных осей считаем связанной с кораблем, причем начало координат взято по середине длины судна; ось ξ расположена в диаметральной плоскости судна и направлена в сторону носа.

Скорость движения корабля v направлена вдоль оси ξ.

Будем принимать все суда каравана одинаковыми, а также и расстояния между ними.

Следуя Н. Е. Кочину [1], введем в рассмотрение функцию

$$H(\nu, \lambda) = J_1 + iJ_2 \tag{3}$$

которая согласно формулам (2) равна

$$H(\nu, \lambda) = \int_0^T e^{-\nu\lambda^2\zeta}\, d\zeta \int_{-1/2 L}^{1/2 L} e^{i\nu\lambda\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi}\, d\xi \tag{4}$$

Обозначим полную длину каравана судов, т. е. расстояние между носовой оконечностью первого судна и кормовой оконечностью последнего судна, через L_n, так что $L_n = L + (n-1)\, l$, где n — число судов в караване, а l — расстояние между серединами двух судов каравана.

Расположим начало координат по середине длины последнего судна каравана.

Тогда для функции $H_n(\nu, \lambda)$ можно записать следующее выражение:

$$H_n(\nu, \lambda) = \int_0^T e^{-\nu\lambda^2\zeta}\, d\zeta \sum_{m=0}^{n-1} \int_{-1/2 L+ml}^{1/2 L+ml} e^{i\nu\lambda\xi} \frac{\partial f_m}{\partial \xi}\, d\xi \tag{5}$$

Сделав замену переменных $\xi = ml + \xi_0$ и затем обозначая снова ξ_0 через ξ, получаем

$$H_n(\nu, \lambda) = \int_0^T e^{-\nu\lambda^2\zeta}\, d\zeta \int_{-1/2 L}^{1/2 L} e^{i\nu\lambda\xi} \sum_{m=0}^{n-1} e^{i\nu\lambda ml} \frac{\partial f}{\partial \xi}\, d\xi \tag{6}$$

Сумма членов геометрической прогрессии равна

$$\sum_{m=0}^{n-1} e^{i\nu\lambda ml} = \frac{e^{i\nu\lambda nl} - 1}{e^{i\nu\lambda l} - 1} = e^{i\nu\lambda\, 1/2\, (n-1)\, l} \frac{\sin 1/2\, \nu\lambda nl}{\sin 1/2\, \nu\lambda l}$$

Следовательно,

$$H_n(\nu, \lambda) = e^{i\nu\lambda\, 1/2\, (n-1)\, l} \frac{\sin 1/2\, n\nu\lambda l}{\sin 1/2\, \nu\lambda l} H(\nu, \lambda) \tag{7}$$

Таким образом, для волнового сопротивления каравана судов согласно формулам (1) и (3) имеем выражение

$$R_{wn} = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int_1^\infty |H_n(\nu, \lambda)|^2 \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int_1^\infty \frac{\sin^2 1/2\, n\nu\lambda l}{\sin^2 1/2\, \nu\lambda l} (J_1^2 + J_2^2) \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \tag{8}$$

При $n = 1$ формула (8) переходит в формулу (1) для одиночного корабля.

Исследуем выражение (8). Сделаем замену переменных $\nu\lambda = u$. Тогда можно записать

$$R_{wn}(l) = \int_\nu^\infty \frac{\sin^2 1/2\, nlu}{\sin^2 1/2\, lu} G(u)\, du \tag{9}$$

В формуле (9) введено следующее обозначение

$$G(u) = \frac{4\rho v^2}{\pi}\left[J_1{}^2\left(\frac{u^2}{\nu}\right) + J_2{}^2\left(\frac{u^2}{\nu}\right)\right]\frac{u^2}{\sqrt{u^2-\nu^2}} \tag{10}$$

Функция $G(u) > 0$, причем

$$\int\limits_{\nu}^{\infty} G(u)\,du = R_{w1} \tag{11}$$

т. е. волновому сопротивлению изолированного судна.

Далее воспользуемся тождеством

$$\frac{\sin^2 {}^1/_2\, nlu}{\sin^2 {}^1/_2\, lu} = n\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\cos klu\right] \tag{12}$$

Из этой формулы видно, что

$$\frac{\sin^2 {}^1/_2\, nlu}{\sin^2 {}^1/_2\, lu} < n^2$$

и, следовательно,

$$R_{wn} < n^2 R_{w1} \tag{13}$$

Пользуясь равенством (12), запишем формулу (9) в следующем виде:

$$R_{wn}(l) = n\int\limits_{\nu}^{\infty} G(u)\,du + 2n\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\nu}^{\infty}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\cos klu\, G(u)\,du \tag{14}$$

Первое слагаемое этого выражения согласно (11) равно

$$n\int\limits_{\nu}^{\infty} G(u)\,du = nR_{w1}$$

т. е. числу судов в караване, умноженному на волновое сопротивление изолированного судна.

Остальные слагаемые (14) зависят от расстояния l между судами каравана. Нетрудно видеть, что при неограниченном возрастании l эти слагаемые формулы (14) будут стремиться к нулю. Таким образом, получим физически естественный результат

$$\lim_{l\to\infty} R_{wn} = nR_{w1} \tag{15}$$

Для определения экстремальных значений функций $R_{wn} = f(l)$ нужно приравнять нулю производную $\partial R_{wn}/\partial l$, которая согласно (14) будет

$$\frac{\partial R_{wn}}{\partial l} = -2n\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\nu}^{\infty} k\left(1 - \frac{k}{n}\right)\sin klu\, G(u)\,u\,du \tag{16}$$

Из этой формулы, в частности, следует, что $\partial R_{wn}/\partial l \to 0$ при $l \to \infty$.

Повторным дифференцированием левой и правой частей равенства (16) убеждаемся в том, что $\partial^m R_{wn}/\partial l^m \to 0$ при $l \to \infty$ для любого целого m. Это указывает на то, что $R_{wn} \to nR_{w1}$ при $l \to \infty$ достаточно быстро.

Найдем теперь асимптотическое выражение для волнового сопротивления каравана R_{wn} при больших значениях n. Для этого формулу (9) после замены переменной u на $\alpha = \frac{1}{2}ul = \frac{1}{2}\nu l\lambda$ представим в виде

$$R_{wn} = \frac{2}{l}\int\limits_{{}^1\!/_2 \nu l}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha} Q(\alpha)\,d\alpha = \frac{2}{l}\int\limits_{a}^{a+\pi} \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha}\left[\sum_{k=0}^{\infty} Q(\alpha + k\pi)\right] d\alpha \tag{17}$$

где

$$Q(\alpha) = G\left(\frac{2\alpha}{l}\right) \tag{18}$$

Положим

$$F(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} Q(\alpha + k\pi) \qquad \left(\tfrac{1}{2}\nu l \leqslant \alpha \leqslant \tfrac{1}{2}\nu l + \pi\right) \tag{19}$$

Доопределим функцию $F(\alpha)$ для всех вещественных значений α $(-\infty < \alpha < \infty)$ так, чтобы $F(\alpha + \pi) = F(\alpha)$, т. е. она была периодической функцией с периодом π. При этом точки $\alpha_m = \frac{1}{2}\nu l + m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ могут оказаться точками разрыва для функции $F(\alpha)$.

После этого формулу (17) можно представить в виде

$$R_{wn} = \frac{2}{l}\int\limits_{-{}^1\!/_2\pi}^{{}^1\!/_2\pi} \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha} F(\alpha)\,d\alpha \tag{20}$$

Из теории тригонометрических рядов известно, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-{}^1\!/_2\pi}^{{}^1\!/_2\pi} \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha} F(\alpha)\,d\alpha = \frac{F(+0) + F(-0)}{2} \tag{21}$$

Если $a = \frac{1}{2}\nu l$ не является кратным π $(a \neq \alpha_m,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то

$$F(+0) = F(-0) = F(0)\, F = (m\pi),$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$. Выберем теперь m так, чтобы

$$a < m\pi < a + \pi, \quad \text{или} \quad m = \left[\frac{\nu l}{2\pi}\right] + 1 \tag{22}$$

где $[x]$ обозначает целую часть x. Следовательно, согласно (19)

$$F(m\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} Q(m\pi + k\pi) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

или

$$F(m\pi) = \sum_{k=m}^{\infty} Q(k\pi) = \sum_{k=m}^{\infty} G\left(\frac{2k\pi}{l}\right) \tag{23}$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{wn}}{n\pi} = \frac{2}{l} F(m\pi) = \frac{2}{l}\sum_{k=m}^{\infty} G\left(\frac{2k\pi}{l}\right) \tag{24}$$

где m определяется согласно (22).

Тогда искомое асимптотическое выражение для R_{wn} при больших значениях n будет

$$R_{wn} \sim \frac{2n\pi}{l} \sum_{k=m}^{\infty} G\left(\frac{2k\pi}{l}\right) \tag{25}$$

и в среднем на одно судно будет приходиться сопротивление

$$R_w^{(1)} = \frac{R_{wn}}{n} \sim \frac{2\pi}{l} \sum_{k=m}^{\infty} G\left(\frac{2k\pi}{l}\right) \tag{26}$$

Заметим, что стоящая справа величина, вообще говоря, отлична от сопротивления R_{w1} изолированного корабля. Однако при $l \to \infty$ эта величина стремится к

$$\int_{\nu}^{\infty} G(u)\,du = R_{w1} \tag{27}$$

так как она представляет собой частную сумму для этого интеграла при $\Delta u = 2\pi / l$; целое же число m выбрано из условия (22), которое можно записать в следующем виде:

$$\frac{\nu l}{2} < m\pi < \frac{\nu l}{2} + \pi \quad \text{или} \quad \nu < \frac{2m\pi}{l} < \nu + \frac{2\pi}{l}$$

Отсюда

$$\frac{2\pi m}{l} \to \nu \quad \text{при} \quad l \to \infty$$

Полученный результат находится в полном соответствии с формулой (15).

Отметим, что величина $R_w^{(1)}$ допускает еще следующее толкование: представим себе, что вместо n судов движется бесконечный караван из равноотстоящих и одинаковых по размерам судов. Тогда сопротивление каждого судна будет одним и тем же. Рассматривая этот случай как предельный, когда $n \to \infty$, получим сопротивление $R_w^{(1)}$.

По приведенным формулам (8), (14), (25) можно производить при принятых допущениях о форме судов вычисления волнового сопротивления каравана одинаковых кораблей, расположенных в кильватерном порядке на равных расстояниях друг от друга.

Не составляет затруднений и получение решения о волнообразовании при движении каравана судов.

Действительно, ординаты профиля волн, образующихся на свободной поверхности жидкости при движении корабля, в силу принятого допущения о малости волн определяются, как известно, по формуле

$$\zeta_w = -\frac{v}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, 0)}{\partial x} \tag{28}$$

где $\varphi(x, y, z)$ — потенциал скоростей потока, вызываемого движущимся кораблем.

Беря попрежнему все суда каравана одинаковыми, а также и расстояния между ними, можно записать для потенциала скоростей в любой точке (x, y, z) потока, вызываемого движущимся караваном судов, следующее выражение:

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i [x + (i-1) l, y, z] \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{29}$$

(нумерация судов в караване производится от переднего судна).

При прежних допущениях о форме судов для потенциала скоростей изолированного корабля можно воспользовзться известной формулой Мичелля и, следовательно, каждое слагаемое равенства (29) определить по этой формуле, подставляя в нее, начиная со второго судна, вместо x соответственно $x + (i-1) l$, где $i = 2, 3, \ldots, n$.

Таким образом, волновой профиль для каравана судов получается в результате алгебраического сложения ординат волн, создаваемых отдельными судами.

Другими словами, достаточно произвести по формуле (28) вычисления ординат волнового профиля лишь для одиночного ($i = 1$) судна, а затем, построив такие же волновые профили для остальных судов, определить в каждой точке (x, y) путем суммирования ординат волновой профиль для каравана судов.

Поступила 13 VI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Собрание соч., т. II, стр. 105—182, Изд. АН СССР, 1949.