Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗАКРУЧЕННОЙ СТРУИ В БЕЗГРАНИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ЗАТОПЛЕННОМ ТОЙ ЖЕ ЖИДКОСТЬЮ

Л. Г. Лойцянский

(Ленинград)

Задача о ламинарном и турбулентном распространении струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью, получила в последнее время принципиальное продвижение. Если ранее вопрос шел лишь о струе, вытекающей из бесконечно тонкой трубки с конечным сохраняющимся вдоль струи импульсом, а следовательно, с нулевым начальным расходом, о недавно Ю. Б. Румером [1] в развитие идеи Л. Д. Ландау [2] найдено приближенное решение задачи о струе, вытекающей с заданным расходом из трубки конечного диаметра.

Решения Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румера представляют два приближения к точному решению строгих уравнений движения вязкой жидкости, имеющему место при любых значениях характерного для этой задачи рейнольдсова числа. Если в этих решениях совершить обычный для теории пограничного слоя переход к большим рейнольдсовым числам, то область струи сосредоточится в окрестность оси струи и мы придем к обычному решению задачи о пограничном слое струи.

Все существующие до сих пор решения задачи о затопленной осесимметричной струе, включая и только что упомянутые, относятся лишь к случаю незакрученной струи, т. е. струи, обладающей скоростями, расположенными в меридиональной плоскости. У таких незакрученных струй главный момент количества движения относительно продольной оси во всех сечениях равен нулю. Между тем в большинстве практических применений струй приходится иметь дело со струями, прошедшими до выхода из сопла через специальный «регистр», придающий им вращательное движение вокруг продольной оси.

Настоящая статья содержит постановку и расчет первых приближений задачи о ламинарном и турбулентном распространении закрученной струи, вытекающей в пространство, затопленное той же жидкостью. Основной трудностью задачи является возникновение в закрученной струе поля давлений, связанного с наличием центробежных сил.

В статье устанавливается асимптотическое разложение скоростей и давлений в закрученной струе в ряд по отрицательным степеням расстояния сечения струи от выходного отверстия. Коэффициенты в этом разложении удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков с переменными коэффициентами. Разобранные в настоящей статье два первых приближения выражаются в конечном виде при помощи простых рациональных функций. Полученное решение для ламинарной струи обобщается затем и на случай турбулентной струи.

Рассмотрение решений позволяет получить некоторые общие выводы о характерных особенностях закрученной струи.

§ 1. Основные уравнения распространения закрученной ламинарной струи. Количество движения и момент количества движения струи. Направим ось x вдоль оси струи и будем пользоваться цилиндрической системой координат x, r, θ, где x — продольное расстояние от источника струи, r — расстояние до оси струи и θ — угол, отсчитываемый вокруг оси x. Соответствующие составляющие скорости будут: u — продольная, v — радиальная и w — трансверсальная скорость, или скорость закручивания струи. В силу симметрии струи относительно ее оси все производные по углу θ будут равны нулю, следовательно, общие уравнения стационарного движения вязкой жидкости в цилиндрических координатах при отсутствии объемных сил примут вид:

$$\begin{gathered}
u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\\
u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{w^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\\
u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{vw}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\
\frac{\partial (ru)}{\partial x}+\frac{\partial (rv)}{\partial r}=0
\end{gathered}\tag{1.1}$$

Если распространение ламинарной струи в пространстве, затопленном той же жидкостью, происходит с достаточно большими значениями рейнольдсова числа[1], то радиальные скорости в струе будут весьма малы по сравнению с продольными скоростями и скоростями закручивания струи. Применяя обычные рассуждения теории пограничного слоя, придем к следующей системе уравнений ламинарного движения вязкой жидкости в закрученной струе:

$$\begin{gathered}
u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\\
\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\rho w^2}{r}\\
u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{vw}{r}=\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}\right)\\
\frac{\partial (ru)}{\partial x}+\frac{\partial (rv)}{\partial r}=0
\end{gathered}\tag{1.2}$$

В отличие от теории незакрученной струи в первом уравнении системы (1.2) уже нельзя опустить член, выражающий продольный перепад давления. Действительно, в силу второго уравнения системы можно заключить о существовании радиального перепада давлений, в то время как во всем пространстве вне струи давление одинаково. Отсюда сразу следует, что вдоль струи давление изменяется. Указанное обстоятельство приводит к взаимной связи между продольным движением жидкости в струе и ее закручиванием. Первое и четвертое уравнения системы (1.2), хотя на первый взгляд и не содержат трансверсальную скорость w,

[1] Характерное для задачи о распространении струи рейнольдсово число будет указано ниже.

однако не могут разрешаться самостоятельно, так как производная от давления по направлению оси струи в силу второго уравнения системы (1.2) зависит от трансверсальной скорости w.

Пользуясь уравнением неразрывности и производя простые преобразования, перепишем первое уравнение системы в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}(ru^2) + \frac{\partial}{\partial r}(ruv) = -\frac{r}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}[r(p+\rho u^2)] + \frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\rho uv - \mu\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right] = 0$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения поперек струи, считая ширину струи бесконечной в смысле, принятом в теории пограничного слоя; получим

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty r(p+\rho u^2)\,dr + \left[r\left(\rho uv - \mu\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_0^\infty = 0$$

Будем в дальнейшем понимать под величиной p разность между давлением в данной точке струи и давлением вне струи. Тогда, предполагая быстроту убывания давления p и скоростей u и v с ростом r достаточной для конечности интеграла в левой части и обращения в нуль в верхнем пределе выражения в квадратных скобках[1], будем иметь

$$\int_0^\infty r(p+\rho u^2)\,dr = \text{const} = \frac{K_0}{2\pi} \tag{1.3}$$

Полученное равенство выражает теорему об изменении количества движения вдоль струи

$$\int_0^\infty 2\pi r(p+\rho u^2)\,dr = K_0 \tag{1.4}$$

Формулу эту можно было вывести и непосредственно, применяя теорему. Из дальнейшего станет ясным, что постоянная K_0 представляет проекцию на ось струи главного вектора количества движения, переносимого в единицу времени через сечение струи, бесконечно удаленное от ее источника.

Аналогичным образом установим формулу сохранения момента количества движения вдоль струи, для чего обратимся к третьему уравнению системы (1.2), которое после умножения обеих его частей на r и применения уравнения неразрывности может быть переписано в виде

$$\frac{\partial(ruw)}{\partial x} + \frac{\partial(rvw)}{\partial r} + vw = \nu r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right]$$

---

[1] Допустимость такого предположения будет в известной степени оправдана a posteriori при рассмотрении аналитических выражений скоростей и давлений в соответствующем приближении.

или после повторного умножения на r еще так:

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^2uw)+\frac{\partial}{\partial r}(r^2vw)=\nu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right]-2\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right\}$$

Интегрируя обе части этого равенства поперек струи при аналогичном предыдущему допущении о достаточной быстроте убывания u, v и w с ростом r, будем иметь

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty r^2uw\,dr=0$$

или

$$\int_0^\infty r^2uw\,dr=\mathrm{const}=\frac{L_0}{2\pi\rho} \tag{1.5}$$

где L_0 — постоянный вдоль всей струи главный момент количества движения относительно оси струи.

Постоянные величины K_0, L_0 вместе с физическими константами ρ и μ служат основными количественными характеристиками струи вдалеке от ее источника.

Составляя одночленное выражение $K_0^a L_0^b \mu^c \rho^d$, из обычных соображений о размерностях убедимся, что единственной безразмерной комбинацией определяющих движение величин будет величина

$$R_e=\frac{\rho K_0}{\mu^2}=\frac{K_0}{\rho\nu^2} \tag{1.6}$$

эта величина представляет рейнольдсово число.

Величины K_0 и L_0, выраженные интегральными равенствами (1.3) и (1.5), вместе с граничными условиями задачи послужат в дальнейшем для определения постоянных интегрирования.

§ 2. Разложение скоростей и давления в ряды по отрицательным степеням расстояния от источника струи. Основные дифференциальные уравнения задачи. Граничные и интегральные условия. Из последнего уравнения системы (1.2) следует, что продольные и радиальные скорости могут быть выражены через одну функцию $\psi(x, r)$ по формулам

$$u=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\qquad v=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.1}$$

Функция ψ играет роль функции тока для незакрученной части движения в меридиональных плоскостях. Следуя известному решению задачи о незакрученной струе, перейдем от независимых переменных x и r к новым переменным ξ и η, положив

$$\xi=x,\qquad \eta=\frac{r}{x\sqrt{\nu}} \tag{2.2}$$

Операции дифференцирования по старым переменным связаны с операциями дифференцирования по новым следующими формулами:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\xi}-\frac{\eta}{x}\frac{\partial}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{x\sqrt{\nu}}\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{2.3}$$

Будем искать функцию ψ в виде разложения

$$\psi = \nu\left(\overline{a}x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right) \tag{2.4}$$

где $\overline{a}$, a_0, a_1, ... — неизвестные функции η. Тогда, согласно (2.1) и правилам дифференцирования (2.3) найдем

$$u = \frac{\overline{a}'}{\eta}\frac{1}{x} + \frac{a_0'}{\eta}\frac{1}{x^2} + \frac{a_1'}{\eta}\frac{1}{x^3} + \ldots \tag{2.5}$$

$$v = \frac{\sqrt{\nu}}{x}\left[\overline{a}' - \frac{\overline{a}}{\eta} + a_0'\frac{1}{x} + \left(a_1' + \frac{a_1}{\eta}\right)\frac{1}{x^2} + \ldots\right] \tag{2.6}$$

Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по η, а вместо ξ сохраняется прежнее обозначение x.

Скорость закручивания струи w представим рядом

$$w = \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \cdots \tag{2.7}$$

где b_1, b_2, b_3, ... — также неизвестные функции η.

Наконец, введем еще разложение для давления

$$\frac{p}{\rho} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^2} + \cdots \tag{2.8}$$

где c_1, c_2, ... — неизвестные функции η, а величина p, напоминаем, представляет разность между давлением в данной точке струи и внешним давлением.

Подставляя принятые разложения в основную систему уравнений (1.2), для чего необходимо предположить возможность дифференцирования рядов для скоростей и давления по обеим переменным, и сравнивая коэффициенты при членах, содержащих одинаковые степени x, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $\overline{a}$, a_0, a_1, ...; b_1, b_2, ...; c_1, c_2, ...

Так, из первого уравнения этой системы, приравнивая коэффициенты при x^{-2}, найдем

$$c_1 + \eta c_1' = 0$$

Это при ограниченности давления на оси струи ($\eta = 0$) приводит к тождеству

$$c_1 \equiv 0$$

Сравнение коэффициентов при x^{-3}, x^{-4} и x^{-5} приводит к уравнениям

$$\left(\frac{\overline{a}'}{\eta}\right)'' + \frac{1+\overline{a}}{\eta}\left(\frac{\overline{a}'}{\eta}\right)' + \left(\frac{\overline{a}'}{\eta}\right)^2 + 2c_2 + \eta c_2' = 0 \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{a_0'}{\eta}\right)'' + \frac{1+\overline{a}}{\eta}\left(\frac{a_0'}{\eta}\right)' + \frac{3\overline{a}'}{\eta}\frac{a_0'}{\eta} + 3c_3 + \eta c_3' = 0 \tag{2.10}$$

$$\left(\frac{a_1'}{\eta}\right)'' + \frac{1+\overline{a}}{\eta}\left(\frac{a_1'}{\eta}\right)' + \frac{4\overline{a}'}{\eta}\frac{a_1'}{\eta} - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\overline{a}'}{\eta}\right)' a_1 + \frac{2a_0'^2}{\eta^2} + 4c_4 + \eta c_4' = 0 \tag{2.11}$$

Точно так же из второго уравнения системы (1.2) будем иметь следующую систему уравнений:

$$\eta c_1' = 0, \quad \eta c_2' = b_1^2, \quad \eta c_3' = 2b_1b_2, \quad \eta c_4' = b_2^2 + 2b_1b_3, \ldots \tag{2.12}$$

из которых первое по предыдущему тождественно выполняется.

Обратимся, наконец, к третьему уравнению системы (1.2); приравнивая коэффициенты при x^{-3}, x^{-4} и x^{-5}, получим уравнения

$$b_1'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta} b_1' - \frac{1-\bar{a}}{\eta^2} b_1 = 0 \tag{2.13}$$

$$b_2'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta} b_2' - \frac{1-\bar{a}-\eta\bar{a}'}{\eta^2} b_2 = 0 \tag{2.14}$$

$$b_3'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta} b_3' - \frac{1-\bar{a}-2\eta\bar{a}'}{\eta^2} b_3 + \frac{a_0'b_2}{\eta} - \frac{a_1b_1'}{\eta} - \frac{a_1b_1}{\eta^2} = 0 \tag{2.15}$$

Составим граничные условия. Выбирая ось струи за нулевую линию тока в меридиональном движении, будем иметь

$$\bar{a} = a_0 = a_1 = \cdots = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \tag{2.16}$$

Из условия конечности продольной скорости на оси струи по (2.5) получим

$$\bar{a}' = a_0' = a_1' = \cdots = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \tag{2.17}$$

Из условия ограниченности секундного массового расхода жидкости сквозь сечение струи, равного по (2.2) и (2.5)

$$M = \int_0^\infty \rho u 2\pi r\, dr = 2\pi\rho\nu x^2 \int_0^\infty \eta \left(\frac{\bar{a}'}{\eta} \frac{1}{x} + \frac{a_0'}{\eta} \frac{1}{x^2} + \cdots \right) d\eta =$$

$$= 2\pi\mu \left[\bar{a}(\infty) x + a_0(\infty) + a_1(\infty) \frac{1}{x} + \cdots \right] \tag{2.18}$$

вытекает условие ограниченности величин $\bar{a}(\infty)$, $a_0(\infty)$, $a_1(\infty)$, ... По определению скорости закручивания (2.7) имеем граничные условия

$$b_1 = b_2 = \cdots = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \qquad b_1 = b_2 = \cdots = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \infty \tag{2.19}$$

и, наконец, по определению величины p

$$c_1 = c_2 = \cdots = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \infty \tag{2.20}$$

Подставляя разложения (2.5), (2.7) и (2.8) в формулы (1.4) и (1.5) и вновь приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему интегральных условий, которые будут полезны для определения постоянных интегрирования и некоторых общих выводов.

Из формулы количеств движения (1.4) найдем

$$\begin{gathered} \int_0^\infty \eta c_1\, d\eta = 0, \qquad \int_0^\infty \left(\eta c_2 + \frac{\bar{a}'^2}{\eta} \right) d\eta = \frac{K_0}{2\pi\mu} \\ \int_0^\infty \left(\eta c_3 + \frac{2\bar{a}' a_0'}{\eta} \right) d\eta = 0, \qquad \int_0^\infty \left(\eta c_4 + \frac{a_0'^2 + 2\bar{a}' a_1'}{\eta} \right) d\eta = 0 \end{gathered} \tag{2.21}$$

Аналогичным путем получим из формулы моментов (1.5)

$$\int\limits_0^\infty \eta \bar{a}' b_1 d\eta = 0, \qquad \int\limits_0^\infty \eta\,(\bar{a}' b_2 + a_0' b_1)\,d\eta = \frac{L_0}{2\pi\mu\sqrt{\nu}}$$

$$\int\limits_0^\infty \eta\,(\bar{a}' b_3 + a_0' b_2 + a_1' b_1)\,d\eta = 0 \tag{2.22}$$

§ 3. Решение задачи для случая слабо закрученной струи. Система уравнений (2.9) — (2.15) представляет сложную нелинейную систему, и решение ее в общем случае вызывает большие затруднения. Остановимся на случае малой закрутки струи.

Представим себе, что на незакрученную струю, поле скоростей которой известно [3], накладывается возмущение в виде закручивания струи столь малое по величине, что продольные составляющие скорости сохраняют свое направление вниз по потоку, т. е. что нигде в струе не возникают обратные токи.

Замечая, что по физическому смыслу задачи функция b_1 сохраняет свой знак во всем сечении струи, из первого равенства системы (2.22) заключим, что $b_1 = 0$.

В этом предположении решение задачи о закрученной струе сводится к решению системы уравнений

$$\left(\frac{\bar{a}'}{\eta}\right)'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta}\left(\frac{\bar{a}'}{\eta}\right)' + \frac{\bar{a}'^2}{\eta^2} = 0$$

$$\left(\frac{a_0'}{\eta}\right)'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta}\left(\frac{a_0'}{\eta}\right)' + \frac{3\bar{a}'}{\eta}\,\frac{a_0'}{\eta} = 0$$

$$\left(\frac{a_1'}{\eta}\right)'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta}\left(\frac{a_1'}{\eta}\right)' + \frac{4\bar{a}'}{\eta}\,\frac{a_1'}{\eta} - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\bar{a}'}{\eta}\right)' a_1 + \frac{2a_0'^2}{\eta^2} + 4c_4 + \eta c_4' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta c_4' = b_2^2 \tag{3.1}$$

$$b_2'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta} b_2' - \frac{1-\bar{a}-\eta\bar{a}'}{\eta^2} b_2 = 0$$

$$b_3'' + \frac{1+\bar{a}}{\eta} b_3' - \frac{1-\bar{a}-2\eta\bar{a}'}{\eta^2} b_3 + \frac{a_0' b_2}{\eta} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

причем

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 \neq 0.$$

Легко видеть, что в отличие от общей системы уравнений в системе (3.1) неизвестные функции разделены, а это значительно упрощает решение задачи. Первое уравнение системы (3.1) совпадает с известным уравнением незакрученной струи.

Решение его не составляет труда и приводит к результату

$$\bar{a}(\eta) = \frac{\alpha^2\eta^2}{1 + {}^1/_4\alpha^2\eta^2} \tag{3.2}$$

В решении (3.2) α — постоянная интегрирования, которая может быть представлена в виде

$$\alpha = \sqrt{\frac{3K_0}{16\pi\mu}} \tag{3.3}$$

при помощи второго из интегральных условий (2.21), в данном случае сводящегося к более простому равенству

$$\int_0^\infty \frac{\bar{a}'^2}{\eta} d\eta = \frac{K_0}{2\pi\mu}$$

Приводим соответствующие равенству (3.2) выражения функции тока меридионального (незакрученного) движения и распределение скоростей в нем:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \nu x \bar{a} = \nu x \frac{\alpha^2\eta^2}{1 + {}^1/_4\alpha^2\eta^2} \\ \bar{u} &= \frac{2\alpha^2}{x} \frac{1}{(1 + {}^1/_4\alpha^2\eta^2)^2} \\ \bar{v} &= \frac{\alpha\sqrt{\nu}}{x} \frac{\alpha\eta\,(1 - {}^1/_4\alpha^2\eta^2)}{(1 + {}^1/_4\alpha^2\eta^2)^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Определим функцию $a_0(\eta)$ и $b_2(\eta)$, представляющую возмущение незакрученного движения. Полагая во втором уравнении системы (3.1)

$$\frac{a_0'}{\eta} = A(\eta) \tag{3.5}$$

и переходя от аргумента η к $\bar{a}$, связанному с ним равенством (3.2), после простых преобразований получим линейное уравнение второго порядка

$$\bar{a}(4 - \bar{a})\frac{d^2A}{d\bar{a}^2} + 4\frac{dA}{d\bar{a}} + 6A = 0 \tag{3.6}$$

При этом согласно (3.2)

$$\bar{a} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0; \qquad \bar{a} = 4 \quad \text{при} \quad \eta = \infty \tag{3.7}$$

Полагая в уравнении (3.6)

$$\bar{a} = 4\xi \tag{3.8}$$

придем к следующему гипергеометрическому уравнению:

$$\xi(\xi - 1)\frac{d^2A}{d\xi^2} - \frac{dA}{d\xi} - 6A = 0 \tag{3.9}$$

Регулярное решение этого уравнения будет

$$A(\xi) = C(1 - \xi)^2(1 - 4\xi) \tag{3.10}$$

Возвращаясь к уравнению (3.5) и переходя в нем также к аргументу ξ, получим после интегрирования

$$a_0(\xi) = \beta\xi(2\xi - 1) \tag{3.11}$$

где β — новая постоянная интегрирования. Замечая, что по (3.7) и (3.8)

$$\xi = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0; \qquad \xi = 1 \quad \text{при} \quad \eta = \infty \tag{3.12}$$

видим, что

$$\beta = a_0(\infty) \tag{3.13}$$

При этом согласно (2.18) эта величина определяет поправку в выражении секундного массового расхода (2.18) во втором приближении.

Возвращаясь к аргументу η, окончательно найдем

$$a_0(\eta) = \frac{1}{4}\beta\bar{a}\left(\frac{1}{2}\bar{a} - 1\right) = -\beta\,\frac{{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2\,(1 - {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)}{(1 + {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^2}. \tag{3.14}$$

Легко убедиться, что функция $a_0(\eta)$ удовлетворяет граничным условиям (2.16) и (2.17) и условию ограниченности на бесконечности. Кроме того, простое вычисление показывает, что выполняется и третье из интегральных условий системы (2.21), которое в рассматриваемом простом случае приводится к виду

$$\int_0^\infty \frac{\bar{a}'a_0'}{\eta}\,d\eta = 0$$

Уравнение для определения $b_2(\eta)$

$$b_2'' + \frac{1 + \bar{a}}{\eta}b_2' - \frac{1 - \bar{a} - \eta\bar{a}'}{\eta^2}b_2 = 0 \tag{3.15}$$

легко интегрируется. Переписывая его в форме

$$\eta^2 b_2'' + \eta b_2' - b_2 + \eta\bar{a}b_2' + \eta\bar{a}'b_2 + \bar{a}b_2 = 0$$

или

$$(\eta^2 b_2')' - (\eta b_2)' + (\eta\bar{a}b_2)' = 0$$

получим

$$\eta b_2' = (1 - \bar{a})\,b_2$$

Отсюда следует

$$b_2(\eta) = \gamma\frac{\alpha\eta}{(1 + {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^2} \tag{3.16}$$

Постоянную интегрирования γ можно при желании связать с величиной момента L_0 при помощи второго интегрального условия системы (2.22), которое в настоящем случае имеет вид:

$$\int_0^\infty \eta\bar{a}'b_2\,d\eta = \frac{L_0}{2\pi\mu\sqrt{\nu}} \tag{3.17}$$

Выполнив интегрирование, найдем

$$\gamma = \frac{3\alpha L_0}{16\pi\mu\sqrt{\nu}} = \frac{3\sqrt{3}}{64\pi\sqrt{\pi}}\,\frac{L_0\sqrt{\rho K_0}}{\mu^2} \tag{3.18}$$

Имея выражение (3.16) для $b_2(\eta)$, из дифференциального уравнения системы (3.1)

$$\eta c_4' = b_2^2$$

нетрудно найти $c_4(\eta)$; будем иметь

$$c_4 = -\frac{2}{3}\gamma^2 \frac{1}{(1 + {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^3} \tag{3.19}$$

Определение функций a_1, b_3 и др. требует численного интегрирования.

Подставив полученное значение (3.14) для неизвестной функции $a_0(\eta)$ и ранее найденное выражение (3.2) для $\overline{a}(\eta)$ в равенства (2.4), (2.5) и (2.6), будем иметь следующие выражения функции тока и скоростей меридиональной (незакрученной) части потока в рассматриваемом приближении:

$$\psi = \nu\left[\frac{\alpha^2\eta^2}{1 + {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2}\,x - \beta\,\frac{{}^1/_4\,\alpha^2\eta^2\,(1 - {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)}{(1 + {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^2}\right] \tag{3.20}$$

$$u = \frac{2\alpha^2}{(1 + {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^2}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\beta\alpha^2\,\frac{1 - {}^3/_4\,\alpha^2\eta^2}{(1 + {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^3}\,\frac{1}{x^2} \tag{3.21}$$

$$v = \sqrt{\nu}\left[\frac{\alpha^2\eta\,(1 - {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)}{(1 + {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^2}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\beta\alpha^2\,\frac{\eta\,(1 - {}^3/_4\,\alpha^2\eta^2)}{(1 + {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^3}\,\frac{1}{x^2}\right] \tag{3.22}$$

Секундный массовый расход по (2.18), (3.2) и (3.13) будет в том же приближении равен

$$M = 2\pi\mu\,(4x + \beta) \tag{3.23}$$

Скорость крутки струи определится по (2.7) и (3.16); получим

$$w = \gamma\,\frac{\alpha\eta}{(1 + {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^2}\,\frac{1}{x^2} \tag{3.24}$$

Наконец, по (3.19), (2.8) и по условию обращения в нуль величин c_1, c_2 и c_3, получим выражение для давления:

$$p = -\frac{2}{3}\gamma^2\,\frac{1}{(1 + {}^1/_4\,\alpha^2\eta^2)^3}\,\frac{1}{x^4} \tag{3.25}$$

Величины α, β и γ являются характерными постоянными струи, которые должны быть заданы наперед или выражены через суммарные характеристики струи.

§ 4. Некоторые выводы об общем характере распространения слабо закрученных струй. Приведенное в конце предыдущего параграфа решение позволяет сделать заключение о некоторых общих закономерностях распространения слабо закрученных струй.

Обращает на себя внимание прежде всего факт быстрого исчезновения крутки при удалении от источника струи. В то время как продольная и поперечная скорости в струе убывают обратно пропорционально первой степени расстояния до источника, скорость крутки убывает обратно пропорционально квадрату того же расстояния. Таким образом, слабо закрученные струи в достаточном удалении от начального участка ведут себя как незакрученные. Этим, повидимому, объясняется, почему, несмотря на неизбежность наличия начальной крутки при входе струи в затопленное пространство, в основной части струи закрутка практически отсутствует.

Скорость крутки возрастает от нуля на оси струи до максимального своего значения

$$w_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{\gamma}{x^2} \tag{4.1}$$

достигаемого на конусе

$$\eta = \frac{2\sqrt{3}}{3\alpha} \tag{4.2}$$

Скорость закрутки струи зависит как от характерного для струи момента количества движения, так и от элементов меридиональной части потока. Обратное влияние закрутки на меридиональный поток, как об этом можно судить по (3.20)—(3.23), в рассматриваемом приближении отсутствует.

Добавочными членами в формулах меридиональной части движения в закрученной струе (3.20)—(3.23), содержащими константу β, при рассмотрении закрутки пренебрегать уже нельзя, так как они того же порядка, что и скорости закрутки. Эти члены соответствуют предельному значению (при больших рейнольдсовых числах) указанного впервые Ю. Б. Румером[1] решения для струи с конечным расходом из источника. Однако в силу асимптотичности полученного нами решения связать константу β непосредственно с начальным секундным массовым расходом M_0 не представляется возможным.

По (3.21) легко определить изменение максимального значения продольной скорости на оси струи с удалением от источника; в принятом приближении будет

$$u_{\max} = \frac{2\alpha^2}{x} - \frac{1}{2}\beta\frac{\alpha^2}{x^2} \tag{4.3}$$

При приближении к источнику, но все же на больших еще расстояниях от него максимальная скорость возрастает слабее, чем это должно быть по общепринятой формуле, соответствующей первому члену разложения (4.3).

Как это следует из (3.21), дополнительный поток уменьшает продольные скорости вблизи оси и, наоборот, увеличивает их в некотором удалении от нее, вне конуса

$$\eta = \frac{2\sqrt{3}}{3\alpha}$$

совпадающего с конусом (4.2), на котором скорость закрутки достигает своего максимального значения.

Как уже отмечалось ранее, в рассматриваемой области струи слабая закрутка не влияет на меридиональную часть течения в струе, не влияет она при этом и на эжекционную способность струи.

Разность между давлением внутри струи и вне ее согласно (3.25) имеет место лишь при наличии закрутки и быстро убывает с удалением от источника струи по закону обратной пропорциональности четвертой степени расстояния до источника.

Как будет показано в следующем параграфе, законы распространения закрученной турбулентной струи отличаются от соответствующих законов распространения ламинарной струи лишь с количественной, а не с качественной стороны. Все сводится к разнице в числовых значениях коэффициентов молекулярной и молярной (турбулентной) вязкости. Поэтому изложенные выводы верны безотносительно к тому, будет ли струя ламинарной или турбулентной.

Сделанные выводы относятся, конечно, лишь к слабо закрученной струе. В случае сильной закрутки, благодаря возникновению значительного центробежного эффекта, разрежения в струе вызовут обратное подтекание жидкости в ядре струи и положенное в основу теории слабо закрученной струи предположение о существенной положительности продольной проекции скоростей отпадает. При этом в асимптотическом разложении скорости закрутки (3.7) член с x^{-1} должен быть сохранен, так как из первого условия (2.22) уже не вытекает равенство нулю функции $b_1(\eta)$; не будут равны нулю и функции c_2 и c_3 в распределении давлений (2.8). Вопрос о распространении сильно закрученной струи нуждается в специальном рассмотрении, так как при наличии обратного течения в ядре струи поперечные ее размеры настолько возрастают, что становится недопустимым применять по всей области струи приближенные уравнения пограничного слоя (1.2).

§ 5. Распространение турбулентной закрученной струи. Гипотеза постоянства коэффициента турбулентного перемешивания. Сохраняя для осредненных скоростей и давления в турбулентной струе те же обозначения, что и в случае ламинарного движения, и обозначая пульсационные добавки соответственно через u', v' и w', будем иметь основную систему дифференциальных уравнений турбулентного распространения закрученной струи в виде

$$\begin{gathered} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial r}\overline{u'v'}-\frac{\overline{u'v'}}{r} \\ u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{vw}{r}=-\frac{\partial}{\partial r}\overline{v'w'}-2\,\frac{\overline{v'w'}}{r} \\ \frac{\partial(ru)}{\partial x}+\frac{\partial(rv)}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\rho w^2}{r} \end{gathered} \tag{5.1}$$

В этой системе, как и в случае ламинарной струи, учтена сравнительная малость радиальных скоростей по отношению к продольным и трансверсальным, а также малость продольных производных по сравнению с радиальными. Кроме того, в системе опущены члены, выражающие влияние обычной молекулярной вязкости, и пренебрежено влиянием нормальных компонент тензора турбулентных напряжений на давление.

Относительно касательных турбулентных напряжений

$$\tau_{rx}=-\rho\overline{u'v'}, \qquad \tau_{r\theta}=-\rho\overline{v'w'}$$

сохраненных в уравнениях (5.1) и имеющих основное значение для разбираемой задачи, необходимо сделать то или другое допущение соответственно существующим воззрениям на механизм перемешивания в турбулентной струе.

Наиболее простым является следующее широко принятое в различных полуэмпирических теориях допущение о пропорциональности касательных компонент тензора турбулентных напряжений соответствующим компонентам тензора осредненных скоростей деформаций:

$$\tau_{rx} = -\rho\overline{u'v'} = A\frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \tau_{r\theta} = -\rho\overline{v'w'} = A\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\right) \tag{5.2}$$

При этом коэффициент «турбулентной вязкости» A принимается равным

$$A = \rho l^2\sqrt{J} \tag{5.3}$$

где l — так называемый «путь смешения», а J — квадратичный инвариант тензора осредненных скоростей деформаций, при принятой оценке малости величин равный

$$J = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\right)^2 \tag{5.4}$$

В целях дальнейшего упрощения задачи ограничимся случаем слабой закрутки и будем считать скорости закрутки малыми по сравнению с продольными скоростями. В этом случае в предыдущем равенстве можно пренебречь второй скобкой по сравнению с первой и принять

$$A = \rho l^2\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \tag{5.5}$$

а для касательных напряжений пользоваться формулами

$$\tau_{rx} = \rho l^2\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|\frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \tau_{r\theta} = \rho l^2\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\right) \tag{5.6}$$

Относительно величины пути смешения l естественно, как обычно, предположить, что она пропорциональна условной ширине струи $b(x)$:

$$l = cb \tag{5.7}$$

а производную, входящую в выражение коэффициента A, заменить ее приближенным выражением, положив

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \approx \frac{u_m}{{}^1/_2 b} \tag{5.8}$$

где u_m — максимальная скорость на оси струи. Тогда будем иметь

$$A = \rho l^2\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| \approx \rho c^2 b^2\frac{u_m}{{}^1/_2 b} \approx 2c^2\rho b u_m \tag{5.9}$$

Здесь c — некоторая безразмерная константа, зависящая лишь от турбулентной структуры струи (интенсивности турбулентности и др.).

Приняв за основной поток незакрученную струю и рассматривая изменения, вносимые закруткой, как некоторые малые возмущения, мы тем самым предполагаем коэффициент A зависящим лишь от поля скоростей в незакрученной струе. При таком подходе можно при определении величины A приближенно принять ширину струи b пропорциональной расстоянию x от источника струи, а максимальную скорость u_m обратно пропорциональной этому расстоянию. Тогда произведение bu_m представит не зависящую от x постоянную величину, и мы придем к гипотезе постоянства коэффициента турбулентного обмена A. Примем в дальнейшем эту гипотезу и введем для кинематического коэффициента турбулентной вязкости, т. е. постоянной величины $A\rho^{-1}$, обозначение ε. Тогда для касательных компонент турбулентного трения будем иметь выражения

$$\tau_{rx} = \rho\varepsilon \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \tau_{r\theta} = \rho\varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r}\right) \tag{5.10}$$

формально ничем не отличающиеся от соответствующих выражений касательных напряжений при ламинарном движении. Отсюда сразу вытекает, что все результаты, полученные в предыдущих параграфах для ламинарной струи, остаются верными и для турбулентного движения, если только величины μ и ν заменить соответственно на A и ε и рассматривать их как заданные постоянные.

Принятие гипотезы постоянства A не является необходимым условием для доведения задачи до конца. Можно было бы проводить все решение, пользуясь лишь предположением о пропорциональности пути смешения l ширине струи b и формулами (5.6); однако это излишне усложнило бы вычислительную сторону решения задачи. Как показали опыты, приближенная замена (5.8) и вытекающая отсюда гипотеза постоянства A в случае незакрученной струи дают результаты нисколько не менее точные, чем общее предположение (5.6). Можно предполагать, что то же будет иметь место и в случае слабо закрученной струи.

Как показали специально поставленные (В. С. Дубовым) опыты, предлагаемая теория слабо закрученной струи хорошо соответствует действительности.

Поступила 24 IX 1952

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Румер Ю. Б. Задача о затопленной струе. ПММ, т. XVI, вып. 2, 1952.
2. Ландау Л. и Лифшиц Е. Механика сплошных сред, § 19. ГТТИ, 1944.
3. Schlichting H. Laminare Strahlausbreitung. ZAMM, Bd. 13, H. 4, 1933.