

ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ
 ПО ТЕОРИИ ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ
 (ДВУХРАЗМЕРНЫЙ УСТАНОВИВШИЙСЯ ПОТОК)

К. П. Некрасов

(Москва)

§ 1. Постановка задачи. Теория исчезающей вязкости исходит из линеаризованных уравнений движения вязкой, несжимаемой жидкости, которые преобразовываются в «интегральные уравнения гидродинамики».

Рассматривая движение твердого тела в жидкости, определяют при весьма малом коэффициенте вязкости μ порядок малости членов интегральных уравнений гидродинамики по отношению к μ . Отбрасывая члены высшего порядка малости, которые в пределе, при $\mu \rightarrow 0$, должны исчезнуть, находят выражение проекций скорости частицы жидкости $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ и величину

$$q(x, y, z, t) = p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \quad (1.1)$$

где p — гидродинамическое давление, ρ — плотность. Эти выражения в зависимости от трех неизвестных функций a, b, c , — функций координат (ξ, η, ζ) точки поверхности $S(t)$ тела и времени t , и гармонической функции $\psi(x, y, z, t)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \sqrt{\frac{\rho}{\mu\pi}} \int_{t_0}^t d\tau \iint_{S(\tau)} (u_1 a + v_1 b + w_1 c) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= \sqrt{\frac{\rho}{\mu\pi}} \int_{t_0}^t d\tau \iint_{S(\tau)} (u_2 a + v_2 b + w_2 c) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= \sqrt{\frac{\rho}{\mu\pi}} \int_{t_0}^t d\tau \iint_{S(\tau)} (u_3 a + v_3 b + w_3 c) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$q(x, y, z, t) = \rho \iint_{S(\tau)} \left(a \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + b \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + c \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) d\sigma - \frac{\partial \psi}{\partial t} \rho$$

Здесь

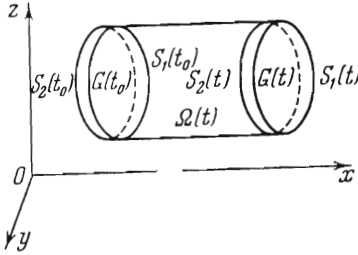
$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2}, \quad v_1 = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \eta}, \quad w_1 = \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \zeta}, \dots, \quad w_3 = -\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} \\ P &= \frac{1}{r} \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - \alpha^2}} \exp \frac{-\rho \alpha^2}{4\mu(t-\tau)} d\alpha \end{aligned} \quad (1.3)$$

причем $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ есть расстояние от частицы жидкости $M(x, y, z)$ до точки (ξ, η, ζ) поверхности тела.

При значении μ , весьма малом, функция P приближенно равна

$$P = \sqrt{\frac{\mu\pi}{\rho}} \frac{1}{r} \quad (1.4)$$

т. е. при весьма малом μ функция P будет порядка $\sqrt{\mu}$. Того же порядка будут и функции $u_1, v_1, w_1, \dots, w_3$, составленные из P , как это видно из (1.3).



Фиг. 1

Приближенные выражения для проекций скорости частицы, находящейся вблизи тела, получаются из формул (1.2) и выражений u_1, v_1, \dots, w_3 .

Твердое тело движется прямолинейно-поступательно со скоростью $U(t)$, параллельной положительному направлению оси x (фиг. 1). Пусть $S_1(t)$ и $S_2(t)$ — «гидродинамически передняя» и «гидродинамически задняя» стороны поверхности; $\Omega(t)$ — область, заключенная между поверхностями $S_1(t_0)$ и $S_2(t)$ внутри цилиндра, высекаемого в пространстве при движении тела.

Если частица находится вблизи тела, внутри области $\Omega(t)$, то для нее получается

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) = & \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)} [a(x, y, z, t_1) - c'(x, y, z, t_1) \cos(nx)] + \\ & + \frac{4\pi}{U_n^{(2)}(t_2)} [a(x, y, z, t_2) - c'(x, y, z, t_2) \cos(nx)] + \frac{\partial\psi}{\partial x} - \\ & - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S(\tau)} \left(a \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + b \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + c \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если частица находится на стороне $S_1(t)$ тела, то

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) = & \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)} [a(x, y, z, t) - c'(x, y, z, t) \cos(nx)] + \frac{\partial\psi}{\partial x} - \\ & - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S(\tau)} \left(a \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + b \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + c \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь

$$c_1' = a \cos(nx) + b \cos(ny) + c \cos(nz)$$

$$U_n^{(1)}(t_1) = |U(t_1) \cos(n_1 x)|, \quad U_n^{(2)}(t_2) = |U(t_2) \cos(n_2 x)|$$

Формулы для $v(x, y, z, t)$ и $w(x, y, z, t)$ получаются круговой перестановкой букв $a, b, c; x, y, z; \xi, \eta, \zeta$.

Чтобы найти неизвестные функции a, b, c, ψ , входящие в формулы (1.2), пользуются формулами (1.5) и (1.6), которые справедливы и при μ ,

весьма малом. Обозначая через $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ функции a, b, c координат ξ, η, ζ точки поверхности $S(t)$ тела, отнесенные к $S_1(t)$ и $S_2(t)$, пишут шесть условий, выражающих, что проекции скорости частицы жидкости, находящейся на $S_1(t)$ и на $S_2(t)$, равны соответственно проекциям $U(t), 0, 0$ скорости поступательного движения тела (так как $\mu \neq 0$), т. е.

$$U(t) = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)} [a_1(x, y, z, t) - c_1'(x, y, z, t) \cos(nx)] - \\ - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S_1(\tau)} \left(a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + b_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + c_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) d\sigma - \\ - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S_2(\tau)} \left(a_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + b_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + c_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{на } S_1(t) \quad (1.7)$$

$$U(t) = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t_1)} [a_1(x, y, z, t_1) - c_1'(x, y, z, t_1) \cos(nx)] + \\ + \frac{4\pi}{U_n^{(2)}(t)} [a_2(x, y, z, t) - c_2'(x, y, z, t) \cos(nx)] - \\ - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S_1(\tau)} \left(a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + b_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + c_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) d\sigma - \\ - \int_{t_0}^t d\tau \frac{\partial}{\partial x} \iint_{S_2(\tau)} \left(a_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + b_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + c_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) d\sigma + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{на } S_2(t) \quad (1.8)$$

Проекции на оси y и z получается из формул (1.7) и (1.8) посредством круговой перестановки букв $a, b, c; x, y, z; \xi, \eta, \zeta$.

Вводятся обозначения

$$\alpha = \frac{a_1}{U_n^{(1)}} + \frac{a_2}{U_n^{(2)}}, \quad \beta = \frac{b_1}{U_n^{(1)}} + \frac{b_2}{U_n^{(2)}}, \quad \gamma = \frac{c_1}{U_n^{(1)}} + \frac{c_2}{U_n^{(2)}} \quad (1.9)$$

и суммы интегралов, входящих в (1.7) и (1.8), преобразовываются к виду

$$L = \frac{\partial}{\partial x} \iiint_{G_0 + \Omega} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) d\omega + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \iiint_{G(t)} \left(a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + b_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + c_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) \frac{d\omega}{U_n^{(1)}} \quad (1.10)$$

После этого функции α, β, γ подчиняются следующим условиям:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.11)$$

во всем объеме $G(t_0) + \Omega(t)$ (фиг. 1), где α, β, γ определяются как функции ξ, η, ζ на каждом последовательном положении $S_2(\tau)$.

Другое условие

$$\alpha \cos(nx) + \beta \cos(ny) + \gamma \cos(nz) = 0 \quad (1.12)$$

на всей цилиндрической поверхности, которая ограничивает Ω , т. е. для каждого момента τ на кривой, по которой цилиндр касается с поверхностью $S(\tau)$ тела, а также и на $S_2(t_0)$.

Условия (1.11) и (1.12) дают возможность упростить интеграл (1.10). После этого, вводя гармоническую функцию

$$\varphi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) + \iint_{S_2(t)} [\alpha \cos(nx) + \beta \cos(ny) + \gamma \cos(nz)] \frac{d\sigma}{r} - \\ - \iiint_{G(t)} \left(a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + b_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + c_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) \frac{d\omega}{U_n^{(1)}} \quad (1.13)$$

перепишут условия (1.7) в виде

$$U(t) = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}} [a_1 - c_1' \cos(nx)] + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}} [b_1 - c_1' \cos(ny)] + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 0 = \frac{4\pi}{U_n^{(1)}} [c_1 - c_1' \cos(nz)] + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.14)$$

Подставляя $c_1' = a_1 \cos(nx) + b_1 \cos(ny) + c_1 \cos(nz)$ в (1.14), найдем, что определитель системы уравнений (1.14) с неизвестными a_1, b_1, c_1 равен нулю. Умножив уравнения (1.14) на $\cos(nx), \cos(ny), \cos(nz)$ и сложив, получим условие совместности

$$\frac{d\varphi}{dn} = U(t) \cos(nz) \quad \text{на } S_1(t) \quad (1.15)$$

При выполнении условия (1.15) система (1.14) неопределенна и задача допускает бесконечное множество решений. Озеен брал, без всякого обоснования, одно частное решение, полагая

$$c_1' = a_1 \cos(nx) + b_1 \cos(ny) + c_1 \cos(nz) = 0 \quad (1.16)$$

После этого из (1.14) находим

$$a_1 = \frac{U_n^{(1)}}{4\pi} \left(U - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad b_1 = -\frac{U_n^{(1)}}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad c_1 = -\frac{U_n^{(1)}}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.17)$$

Затем из (1.8), (1.9) и (1.13) находим

$$U(t) = 4\pi\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad 0 = 4\pi\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad 0 = 4\pi\gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.18)$$

Наконец, из (1.9) получаем

$$a_2 = U_n^{(2)} \left(\alpha - \frac{a_1}{U_n^{(1)}} \right), \quad b_2 = U_n^{(2)} \left(\beta - \frac{b_1}{U_n^{(1)}} \right), \quad c_2 = U_n^{(2)} \left(\gamma - \frac{c_1}{U_n^{(1)}} \right) \quad (1.19)$$

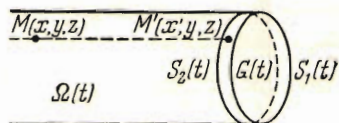
Если записать уравнение поверхности $S_2(t)$ в виде $t = t(x, y, z)$ и подчинить α, β, γ , найденные из (1.18), условию (1.11), то получим

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{dU}{dt} \cos(nx) \quad \text{на } S_2(t) \quad (1.20)$$

Итак, задача привелась к нахождению гармонической функции φ , удовлетворяющей условиям (1.15) и (1.20) и тому, что на больших расстояниях от тела скорость жидкости равна нулю, за исключением направлений, где тело уже прошло в своем движении.

Когда скорость движения тела равна $U = \text{const}$, то функции $\varphi(x, y, z, t)$, $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ зависят от t посредством комбинации $x - Ut$, т. е. $\varphi = \varphi(x - Ut, y, z)$.

Область $\Omega(t)$ теперь есть бесконечный цилиндр сзади тела (фиг. 2).



Фиг. 2

Для случая, когда течение жидкости по отношению к телу является установившимся, теория исчезающей вязкости дает выражения для проекций скорости u, v, w частицы и для давления p . Вне области $\Omega(t)$ течение является потенциальным, а в области $\Omega(t)$ — вихревым. При этом получается, что на границе вихревого хвоста скорости и давления претерпевают разрывы, меняясь скачкообразно.

Цейлон показал, что в случае обтекания контура условия (1.15) и (1.20) определяют функцию φ . При этом оказалось, что в точках раздела передней стороны контура от задней напряженность вихря бесконечно велика.

Цейлон пытался исправить недостатки первоначального решения, причем он вводил дополнительные постулаты и в своем исправлении утратил связь с теорией исчезающей вязкости.

Недостатки решения Озеена-Цейлона побудили Вилла через два года после опубликования исправления Цейлона поставить вопрос о нахождении нового решения, свободного от перечисленных недостатков.

В настоящей работе ищется решение задачи о прямолинейно-поступательном и равномерном движении бесконечно длинного цилиндра со скоростью, перпендикулярной к его образующим, без дополнительных постулатов, опираясь исключительно на данные самой теории исчезающей вязкости.

§ 2. О возможности нового асимптотического решения задачи о движении твердого тела в жидкости. Так как $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ в объеме $G(t)$, то сумму интегралов (1.10) можно представить в виде

$$L = \frac{\partial}{\partial x} \iiint_D \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} \right) d\omega \quad (D = G(t_0) + \Omega(t) + G(t))$$

и затем преобразовать так:

$$L = - \frac{\partial}{\partial x} \iiint_D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} \right) \frac{d\omega}{r} - \frac{\partial}{\partial x} \iiint_{\Gamma} [\alpha \cos(nx) + \beta \cos(ny) + \gamma \cos(nz)] \frac{d\gamma}{r} \quad (2.1)$$

$$(D = G(t_0) + \Omega(t) + G(t), \quad \Gamma = S_2(t_0) + \text{пов } \Omega(t) + S_1(t))$$

Теперь вместо условия (1.11) введем условие

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta} + \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} = \nu(\xi, \eta, \zeta, t)U(t) \quad (2.2)$$

во всем объеме $D = G(t_0) + \Omega(t) + G(t)$, где $U(t)$ — известная скорость движения тела, $\nu(\xi, \eta, \zeta, t)$ — функция, подлежащая определению; α, β, γ определяются как функции ξ, η, ζ на каждом последовательном положении поверхности $S(\tau)$. От условия (1.16) откажемся и будем считать, что

$$c_1' = a_1 \cos(nx) + b_1 \cos(ny) + c_1 \cos(nz) \neq 0 \quad (2.3)$$

Если бы мы отказались от условия (1.12) и вместо него положили

$$\alpha \cos(nx) + \beta \cos(ny) + \gamma \cos(nz) = \lambda(\xi, \eta, \zeta, t)$$

на поверхности $S_2(t)$ и на поверхности объема $\Omega(t)$, то можно показать, что функцию $\lambda(\xi, \eta, \zeta, t)$ нельзя определить так, чтобы при помощи нее уничтожить упомянутые разрывы. Поэтому сохраним условие (1.12). Из дальнейшего (§ 5) будет видно, что оно действительно будет выполнено. Теперь вместо φ [формула (1.13)] вводим функцию

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z, t) = & \psi(x, y, z, t) + \iint_{S_1(t)} [\alpha \cos(nx) + \beta \cos(ny) + \gamma \cos(nz)] \frac{d\sigma}{r} + \\ & + \iiint_D \nu(\xi, \eta, \zeta, t) U(t) \frac{d\omega}{r} = \varphi(x, y, z, t) + V(x, y, z, t) \quad (D = G_0 + \Omega + G) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\varphi(x, y, z, t)$ есть гармоническая функция вне поверхности $S(t)$ тела, а функция

$$V(x, y, z, t) = U(t) \iiint_D \nu(\xi, \eta, \zeta, t) \frac{d\omega}{r} \quad (D = G_0 + \Omega + G) \quad (2.5)$$

есть ньютонов потенциал объемных масс, распределенных в объеме $D = G(t_0) + \Omega(t) + G(t)$ с «плотностью» $\nu(\xi, \eta, \zeta, t)U$.

Функция $\varphi_1 = \varphi + V$ удовлетворяет в области $D = G(t_0) + \Omega(t) + G(t)$ уравнению

$$\Delta \varphi_1 = -4\pi\nu U \quad (2.6)$$

а вне ее — уравнению

$$\Delta \varphi_1 = 0 \quad (2.7)$$

Теперь вместо формул (1.14) получим

$$\begin{aligned} U(t) = & \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)} [a_1 - c_1' \cos(nx)] + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ 0 = & \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)} [b_1 - c_1' \cos(ny)] + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ 0 = & \frac{4\pi}{U_n^{(1)}(t)} [c_1 - c_1' \cos(nz)] + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогично (1.15) условие совместности этих уравнений с неизвестными a_1, b_1, c_1 теперь напишется

$$\frac{d\varphi_1}{dn} = U(t) \cos(nx) \quad \text{на } S_1(t) \quad (2.9)$$

Система уравнений (2.8), как и система (1.14) допускает бесконечное множество решений. Из (2.8) в отличие от (1.17) имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{U_n^{(1)}}{4\pi} \left(U - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \right) + c_1' \cos(nx) \\ b_1 &= -\frac{U_n^{(1)}}{4\pi} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + c_1' \cos(ny) \\ c_1 &= -\frac{U_n^{(1)}}{4\pi} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + c_1' \cos(nz) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из формулы (1.8), пользуясь преобразованием, определенным формулой (2.1), и обозначением (2.4), теперь получим, в отличие от (1.18)

$$\begin{aligned} U(t) &= 4\pi\alpha + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{4\pi c_1'}{U_n^{(1)}(t)} \cos(nx) \\ 0 &= 4\pi\beta + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{4\pi c_1'}{U_n^{(1)}(t)} \cos(ny) \\ 0 &= 4\pi\gamma + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{4\pi c_1'}{U_n^{(1)}(t)} \cos(nz) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Условие, которому функция φ_1 должна удовлетворять на $S_2(t)$, получается из (2.2) и (2.11). Имеем

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} \right) = \frac{dU}{dt} \cos(nx) + \Omega(x, y, z) \quad \text{на } S_2(t) \quad (2.12)$$

в отличие от (1.20). Здесь появилась функция $\Omega(x, y, z, t)$ координат точки стороны $S_2(t)$ тела, так как теперь предполагалось, что $c_1' \neq 0$.

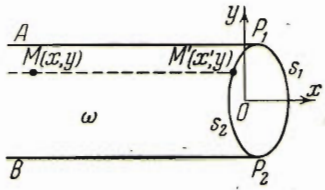
Функции a_2, b_2, c_2 , определяются по формулам (1.19).

Итак, определение течения приводится к нахождению потенциала, удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= -4\pi\nu(x, y, z, t) U(t) && \text{в области } G(t_0) + \Omega(t) \\ \Delta \varphi_1 &= 0 && \text{вне области } G(t_0) + \Omega(t) \\ \frac{d\varphi_1}{dn} &= U(t) \cos(nx) && \text{на поверхности } S_1(t) \\ \frac{d}{dn} \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} \right) &= \frac{dU}{dt} \cos(nx) + \Omega(x, y, z, t) && \text{на поверхности } S_2(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

в условии, что в бесконечности скорость жидкости равна нулю.

§ 3. Двухмерное установившееся течение и условия неразрывности скоростей и давлений на границе вихревого хвоста. На фиг. 3 показано сечение бесконечно длинного цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его образующим. Цилиндр движется прямолинейно-поступательно со скоростью $U = \text{const}$, параллельной оси x .



Фиг. 3

Надо найти потенциал $\varphi_1(x - Ut, y)$, удовлетворяющий условиям (2.13) и, как указано, зависящий от t лишь через посредство комбинации $x - Ut$.

Отвлечемся от переменной t и будем иметь дело с функцией $\varphi_1(x, y)$, к которой приводится потенциал при $t = 0$.

Предполагаем, что при перемещении точки по контуру $S_1 + S_2$ направление касательной в этой точке меняется непрерывно.

Согласно (2.4)

$$\varphi_1(x, y) = \varphi(x, y) + V(x, y)$$

причем

$$V(x, y) = U \iint_{\omega+G} \nu(\xi, \eta) \ln \frac{1}{r} d\xi d\eta \quad (r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}) \quad (3.1)$$

так как объемному потенциалу (2.5) на плоскости соответствует логарифмический потенциал масс, распределенных по площади $\omega + G$ с «плотностью» $\nu(\xi, \eta)U$.

Проекция скорости частицы будут

$$u = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \quad \text{вне области } \omega \quad (3.2)$$

$$u = U + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)_M, \quad v = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_M \quad \text{в области } \omega \quad (3.3)$$

где индекс M' указывает подстановку в результат дифференцирования вместо x абсциссы x' точки M' пересечения прямой MM' , параллельной оси x , с дугой S_2 (фиг. 3).

Из (3.2) и (3.3) видно, что при пересечении прямых AP_1 и BP_2 , ограничивающих область ω , скорость меняется скачком. Потребовав, чтобы она менялась непрерывно, получим

$$\begin{aligned} U - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)_{P_1} &= 0, & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_{P_1} &= 0 & \text{для прямой } AP_1 \\ U - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)_{P_2} &= 0, & \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)_{P_2} &= 0 & \text{для прямой } BP_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Значит, условия неразрывности скорости на прямых AP_1 и BP_2 приводятся к условиям в двух точках $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ контура $S_1 + S_2$. Чтобы им удовлетворить, достаточно предположить, что «масса» с «плотностью» $\nu(\xi, \eta)U$ распределена не по площади $\omega + G$, как в (3.1), а по контуру $s_1 + s_2$. Это и будем предполагать в дальнейшем.

Поэтому будем пользоваться логарифмическим потенциалом простого слоя с «массой», распределенной по контуру $s_1 + s_2$:

$$V(x, y) = -U \int_S \nu(s) \ln r ds \quad (r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}) \quad (3.5)$$

Давление выражается формулами

$$p_1 = \rho U \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 \right] \quad \text{вне области } \omega \quad (3.6)$$

$$p_2 = \rho U \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\rho}{2} \left\{ \left[U + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{M'} \right]^2 + \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{M'} \right]^2 \right\} \quad \text{в области } \omega \quad (3.7)$$

Потребуем, чтобы при пересечении прямых AP_1 и BP_2 (фиг. 3) давление менялось непрерывно. Замечая, что по (3.4)

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{(x_1, y_1)} = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)_{(x_2, y_2)} = 0$$

получим

$$\begin{aligned} \left[U - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{(x_1, y_1)} \right] \left[U - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{(x_2, y_2)} + 2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{(x, y_1)} \right] &= 0 \quad \text{на прямой } AP_1 \\ \left[U - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{(x_2, y_2)} \right] \left[U - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{(x_2, y_2)} + 2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{(x, y_2)} \right] &= 0 \quad \text{на прямой } BP_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эти условия неразрывности давлений на прямых AP_1 и BP_2 будут выполнены, если будут выполнены условия (3.4) неразрывности скоростей.

Перепишем для данного случая, когда

$$U = \text{const}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -U \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$$

условия (2.13), вводя в них $\varphi + V$ вместо φ_1 : получим

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 && \text{всюду} \\ \frac{d\varphi}{dn} &= U \cos(nx) - \frac{dV_e}{dn} && \text{на дуге } s_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \Omega_1(s) - \frac{\partial V_e}{\partial y} && \text{на дуге } s_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 && \text{в бесконечности, вне } \omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

Это — условия, которым должна удовлетворять гармоническая функция φ . В них входят еще неизвестные функции $\nu(s)$ и $\Omega_1(s)$.

§ 4. Нахождение гармонической функции $\varphi(x, y)$. Функция φ должна удовлетворять условиям (3.9). Пусть ψ — сопряженная гармоническая функция. Тогда функции

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad F(z) = i \frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

будут аналитическими. Надо найти аналитическую функцию

$$F = A + iB \quad \text{вне контуре } s_1 + s_2 \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} = A, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = B \right)$$

удовлетворяющую, согласно (3.9), условиям:

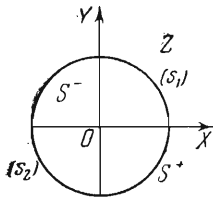
$$\begin{aligned} A \cos(ny) + B \cos(nx) &= U \cos(nx) - \frac{dV_e}{dx} \quad \text{на дуге } s_1 \\ A &= \Omega_1(s) - \frac{\partial V_e}{\partial y} \quad \text{на дуге } s_2 \\ A = B &= 0 \quad \text{в бесконечности, вне } \omega \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отобразим конформно плоскость z на плоскость Z так, чтобы контур $s_1 + s_2$ (фиг. 3) перешел в окружность $Z = e^{i\theta}$ (фиг. 4), т. е. $(s_1) + (s_2)$, и чтобы передняя часть s_1 перешла в правую полуокружность (s_1) , а задняя s_2 — в левую (s_2) .

Надо найти на плоскости Z функцию $F(Z) = A + iB$, аналитическую вне окружности и удовлетворяющую на ней линейному соотношению

$$A(\theta) a(\theta) + B(\theta) b(\theta) = c(\theta) \quad (4.2)$$

где функции $a(\theta)$, $b(\theta)$, $c(\theta)$ в точках окружности равны нижеследующим функциям в соответствующих точках данного контура вследствие конформного отображения и условий (4.1):



Фиг. 4

$$\begin{aligned} a(\theta) &= \cos(ny) \\ b(\theta) &= \cos(nx) \\ c(\theta) &= U \cos(nx) - \partial V_e / \partial n \end{aligned} \quad -\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} a(\theta) &= 1 \\ b(\theta) &= 0 \\ c(\theta) &= \Omega_1(\theta) - \partial V_e / \partial y \end{aligned} \quad +\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$$

Функции $a(\theta)$ и $c(\theta)$ терпят разрывы в точке P_2 . Из (4.2) видно, что нахождение функции

$$F(Z) = A(X, Y) + iB(X, Y) \quad (4.4)$$

приводится к решению задачи Римана-Гильберта с разрывными коэффициентами.

Озеен и Цейлон дали такое решение этой задачи, при котором вихрь приобретает в точках $Z = -i$ и $Z = i$ бесконечно большую напряженность, т. е. решение, не имеющее физического смысла.

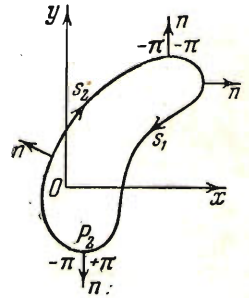
Ниже эта задача Римана-Гильберта решается методом Н. И. Мусхелишвили.

Функция $F(Z)$ находится для области S^+ , внешней к окружности $|Z| = 1$ (фиг. 4). Определяем индекс задачи, т. е. прирост аргумента функции

$$G(Z) = \frac{-a - ib}{a - ib} = \frac{-\cos(ny) - i \cos(nx)}{\cos(ny) - i \cos(nx)} \quad (4.5)$$

при обходе контура по часовой стрелке на 2π , т. е.

$$\chi = \frac{1}{2\pi} [G(Z)]_{s_1 + s_2} \quad (4.6)$$



Фиг. 5

На фиг. 5 показано изменение аргумента функции (4.5) при обходе контура $s_1 + s_2$. Если взять лишь прирост аргумента функции (4.5) при его непрерывном изменении, т. е. 2π , то индекс будет $\chi = 1$. Решение, соответствующее ему, не имеет физического смысла. Остается одна возможность: прибавить скачкообразный прирост аргумента в точке P_2 , т. е. -2π . Тогда по (4.6) получим $\chi = 0$.

Решение задачи Римана-Гильберта при $\chi = 0$ имеет вид:

$$F(Z) = \frac{X(Z)}{\pi i} \int_s \frac{cdt}{(a-ib)\dot{X}^+(t)(t-Z)} - \frac{\dot{X}(Z)}{2\pi i} \int_s \frac{c}{(a-ib)\dot{X}^+(t)} \frac{dt}{t} + C_0 X(Z) \quad (4.7)$$

где C_0 — вещественная постоянная.

Предельное значение $F(Z)$ при переходе извне окружности на окружность в точке t_0 будет

$$F^+(e^{i\theta}) = F^+(t_0) = c(\theta_0) a(\theta_0) + e^{\eta(\theta_0)} \frac{b(\theta_0)}{2\pi} \left\{ \int_s c(\theta) e^{-\eta(\theta)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta + 2\pi C_0 \right\} + i \left\{ c(\theta_0) b(\theta_0) - e^{\eta(\theta_0)} \frac{a(\theta_0)}{2\pi} \left[\int_s c(\theta) e^{-\eta(\theta)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta + 2\pi C_0 \right] \right\} = A(\theta_0) + iB(\theta_0) \quad (4.8)$$

где

$$\eta(\theta_0) = \frac{1}{4\pi} \int_s \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2ab}{a^2 - b^2} \right) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta$$

Отделяя вещественную часть от мнимой, найдем (4.9)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s = A(\theta_0) = c(\theta_0) a(\theta_0) + b(\theta_0) e^{\eta(\theta_0)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_s c(\theta) e^{-\eta(\theta)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta + C_0 \right]$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_s = B(\theta_0) = c(\theta_0) b(\theta_0) - a(\theta_0) e^{\eta(\theta_0)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_s c(\theta) e^{-\eta(\theta)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta + C_0 \right]$$

Так как $a^2 + b^2 = 1$, то из (4.9) видно, что соотношение (4.2) выполняется. На задней стороне контура, где $a = 1, b = 0$, будет

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{s_2} = B(\theta_0) = -e^{\eta(\theta_0)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_s c(\theta) e^{-\eta(\theta)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta + C_0 \right] \quad (4.10)$$

Согласно (3.3) выражение для вихря в области ω будет

$$\begin{aligned} \zeta(y) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{M'} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{s_2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[B(\theta_0) + \frac{\partial V_e}{\partial x} \right]_{s_2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta_0} \left[B(\theta_0) + \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{s_2} \right] \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \end{aligned}$$

Так как $Y = \sin \theta_0, \theta_0 = \arcsin Y$, на окружности $Z = e^{i\theta_0}$, то

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial y} = \frac{d\theta_0}{dY} \frac{dY}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-Y^2}} \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{\cos \theta_0} \frac{\partial Y}{\partial y}$$

Поэтому выражение для вихря напишется так:

$$\zeta(y) = \frac{1}{2 \cos \theta_0} \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{d}{d\theta_0} \left[B(\theta_0) + \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{s_2} \right] \quad (4.11)$$

§ 5. Составление интегрального уравнения для определения функции $\psi(\theta)$. Вихрь (4.11) должен иметь в точках P_1 и P_2 конечную напряженность. Поэтому потребуем, чтобы выражение

$$\frac{d}{d\theta_0} \left[B(\theta_0) + \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{s_2} \right]$$

содержало в своем составе множитель $\cos \theta_0$ в такой степени, чтобы вихрь имел в точках P_1 и P_2 конечное значение.

В числе условий неразрывности скоростей и давлений (3.4) имеются

$$U - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{P_1} = 0, \quad U - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{P_2} = 0$$

которые перепишем так:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{P_1} + \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{P_1} - U = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{P_2} + \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_{P_2} - U = 0 \quad (5.1)$$

В дальнейшем понадобятся формулы

$$\begin{aligned} \frac{dV_e}{ds} &= \frac{dV}{ds} = -\frac{\partial V_e}{\partial x} a(\theta) + \frac{\partial V_e}{\partial y} b(\theta), \\ \frac{dV_e}{dn} &= \frac{\partial V}{\partial x} b(\theta) + \frac{\partial V}{\partial y} a(\theta) + \pi U \nu(\theta) \end{aligned} \quad (5.2)$$

которые получаются из обычных, если заметить, что при переходе от плоскости z к плоскости Z функции $\cos(nx)$ и $\cos(ny)$ должны быть заменены соответственно на $b(\theta)$ и $a(\theta)$.

Надо удовлетворить условиям (5.1) и тому, чтобы вихрь (4.11) имел конечную напряженность в точках P_1 и P_2 .

По второй формуле (4.9) видно, что всем этим условиям можно удовлетворить, если положить

$$-e^{\gamma(\theta_0)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_s c(\theta) e^{-\gamma(\theta)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta + C_0 \right] = kU \cos^r \theta_0 + Ua(\theta_0) + \frac{dV}{ds} \quad (5.3)$$

где k и r — пока неизвестные вещественные постоянные.

При помощи условия (5.3) формулы (4.9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s &= c(\theta_0) a(\theta_0) - b(\theta_0) \left[kU \cos^r \theta_0 + Ua(\theta_0) + \frac{dV}{ds} \right] \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_s &= c(\theta_0) b(\theta_0) + a(\theta_0) \left[kU \cos^r \theta_0 + Ua(\theta_0) + \frac{dV}{ds} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Так как $a(\theta_0) = \cos(ny)$, $b(\theta_0) = \cos(nx)$ на s_1 и $a(\theta_0) = 1$, $b(\theta_0) = 0$ на s_2 , то по второй из формул (5.4) видно, что если приближаться к точкам P_1 или P_2 по окружности справа или слева (фиг. 4), то всегда

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_s \rightarrow U - \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_s \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_s + \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \right)_s - U \rightarrow 0$$

а это значит, что условия (5.1) будут выполнены.

Если обратить внимание на вторую из формул (5.2), то при помощи условия (5.3) формула (4.10) переписется так:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{s_2} = B(\theta_0) = kU \cos^r \theta_0 + U - \left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right)_{s_2}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{s_2} + \left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right)_{s_2} - U &= kU \cos^r \theta_0 \\ \frac{d}{d\theta_0} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{s_2} + \left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right)_{s_2} \right] &= -kUr \cos^{r-1} \theta_0 \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Поэтому выражение для вихря (4.11) примет вид:

$$\zeta(y) = -kU \frac{r}{2} \cos^{r-2} \theta_0 \sin \theta_0 \frac{\partial Y}{\partial y}$$

Значит, вихрь будет иметь в точках P_1 и P_2 конечную, отличную от нуля напряженность лишь при единственном значении r , а именно при $r = 2$. Поэтому

$$\zeta(y) = -kU \sin \theta_0 \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (5.6)$$

В уравнение (5.3) входят две неизвестные функции: «плотность» $\nu(\theta)$ и функция $\Omega_1(\theta)$, так как $c(\theta) = \Omega_1(\theta) - \partial V_e / \partial y$ на s_2 .

Из (4.11) и (4.10) видно, что в выражение вихря войдет расходящийся интеграл

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \Omega_1(\theta) e^{-\eta(\theta)} \frac{1}{\sin^{2\frac{1}{2}}(\theta - \theta_0)} d\theta$$

и задача теряет физический смысл. Функция $\Omega_1(\theta)$ и расходящийся интеграл появились в вычислении потому, что в соответствии с (2.3) было предположено, что $c_1' \neq 0$. Поэтому в этом пункте надо вернуться к предположению Озеена, что $c_1' = 0$, а значит, и $\Omega_1(\theta) \equiv 0$. Это обстоятельство является обоснованием выбора единственного решения из бесконечного множества, доставляемого уравнениями (2.8).

При $c_1' = 0$ условие (4.12) будет выполнено само собой, что видно из (2.9) и (2.11).

Из формулы $z = P(Z)$, дающей конформное отображение, имеем $x = p(X, Y)$, $y = q(X, Y)$. На окружности $|Z| = 1$, где $X = \cos \theta$, $Y = \sin \theta$, будет $x = p(\theta)$, $y = q(\theta)$. Поэтому

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{[p'(\theta)]^2 + [q'(\theta)]^2} d\theta = \lambda(\theta) d\theta$$

$$\lambda(\theta) = \sqrt{[p'(\theta)]^2 + [q'(\theta)]^2}$$

$$s = \int_0^\theta \lambda(\theta) d\theta = \mu(\theta), \quad \nu(s) = \nu[\mu(\theta)] = \nu(\theta)$$

Поэтому значения частных производных логарифмического потенциала (3.5) в точке контура $s_1 + s_2$ будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -U \int_0^{2\pi} \nu(\theta) \frac{[p(\theta_0) - p(\theta)] \lambda(\theta) d\theta}{[p(\theta_0) - p(\theta)]^2 + [q(\theta_0) - q(\theta)]^2} \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -U \int_0^{2\pi} \nu(\theta) \frac{[q(\theta_0) - q(\theta)] \lambda(\theta) d\theta}{[p(\theta_0) - p(\theta)]^2 + [q(\theta_0) - q(\theta)]^2} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Так как $b(\theta) = 0$, $a(\theta) = 1$ на s_2 , а $\Omega_1(\theta) \equiv 0$, то из (4.3) и (5.2) следует, что можно рассматривать $c(\theta)$ как единую функцию на всей окружности $|Z| = 1$, а именно

$$c(\theta) = Ub(\theta) - \frac{dV_e}{dn} \quad (5.8)$$

имеющую разрыв в точке P_2 . Теперь условие (5.3) переписывается так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{dV_0}{dn} - Ub(\theta) \right] e^{-\gamma(\theta)} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta = \\ = e^{-\gamma(\theta_0)} \left[kU \cos^2 \theta_0 + Ua(\theta_0) + \frac{dV}{ds} \right] - C_0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости этого интегрального уравнения с ядром Гильберта определяет C_0 . Имеем

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\gamma(\theta)} \left[kU \cos^2 \theta + Ua(\theta) + \frac{dV}{ds} \right] d\theta \quad (5.10)$$

Решая уравнение (5.9), найдем

$$\begin{aligned} \left[\frac{dV_e}{dn} - Ub(\theta_0) \right] e^{-\gamma(\theta_0)} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\gamma(\theta)} \left[kU \cos^2 \theta + Ua(\theta) + \frac{dV}{ds} \right] \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta + C_1 U \end{aligned} \quad (5.11)$$

При помощи первой из формул (5.2) перепишем уравнение (5.11) так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} b(\theta_0) + \frac{\partial V}{\partial y} a(\theta_0) + \pi U \nu(\theta_0) = \\ = Ub(\theta_0) - \frac{e^{\gamma(\theta_0)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\gamma(\theta)} [kU \cos^2 \theta + Ua(\theta)] \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta - \\ - \frac{e^{\gamma(\theta_0)}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\gamma(\theta)} \left[-\frac{\partial V_e}{\partial x} a(\theta) + \frac{\partial V_e}{\partial y} b(\theta) \right] \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta + C_1 U e^{\gamma(\theta_0)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Возьмем голоморфную функцию

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial x} \right) e^{-\Gamma(Z)} \quad \left(\Gamma(Z) = \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2ab}{a^2 - b^2} \frac{dt}{t - Z} \right) \quad (5.13)$$

При помощи интегрального соотношения Дини

$$\psi(\theta_0) = C + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta$$

связем коэффициент мнимой части и вещественную часть функции (5.13) на окружности $|Z| = 1$. Получим

$$\begin{aligned} & e^{-n(\theta_0)} \left[a(\theta_0) \frac{\partial V_e}{\partial y} + b(\theta_0) \frac{\partial V_e}{\partial x} \right] = \\ & = CU + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n(\theta)} \left[b(\theta) \frac{\partial V_e}{\partial y} - a(\theta) \frac{\partial V_e}{\partial x} \right] \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta \end{aligned}$$

При помощи этой формулы уравнение (5.12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \nu(\theta) \frac{1}{\theta - \theta_0} \frac{\{b(\theta_0)[p(\theta_0) - p(\theta)] + a(\theta_0)[q(\theta_0) - q(\theta)]\} \lambda(\theta) (\theta - \theta_0) d\theta}{[p(\theta_0) - p(\theta)]^2 + [q(\theta_0) - q(\theta)]^2} - \pi \nu(\theta_0) = \\ & = \frac{e^{n(\theta_0)}}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n(\theta)} [k \cos^2 \theta + a(\theta)] \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} d\theta - \frac{1}{2} b(\theta_0) - k_1 e^{n(\theta_0)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Это и есть сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши 2-го рода, из которого должна быть определена функция $\nu(\theta)$.

Можно показать, что уравнение (5.14) принадлежит к нормальному типу. В результате его решения функция $\nu(\theta)$ представится в форме

$$\nu(\theta) = kl(\theta) + k_1 m(\theta) + u(\theta) \quad (5.15)$$

где $l(\theta)$, $m(\theta)$, $n(\theta)$ — известные функции.

§ 6. Распределение скоростей и давлений в потоке, омывающем цилиндр. Отделяя в (4.7) вещественную часть от мнимой, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = A(X, Y) &= \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_s \gamma L d\theta\right) \left[\cos\left(\frac{1}{\pi} \int_s \gamma M d\theta\right) \left(\frac{1}{\pi} \int_s c e^{-n(\theta)} L d\theta + C_0\right) + \right. \\ & \left. + \sin\left(\frac{1}{\pi} \int_s \gamma M d\theta\right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_s c e^{-n(\theta)} d\theta - \frac{1}{\pi} \int_s c e^{-n(\theta)} M d\theta\right) \right] \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = B(X, Y) &= \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_s \gamma L d\theta\right) \left[\cos\left(\frac{1}{\pi} \int_s \gamma M d\theta\right) \left(\frac{1}{\pi} \int_s c e^{-n(\theta)} M d\theta - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2\pi} \int_s c e^{-n(\theta)} d\theta\right) + \sin\left(\frac{1}{\pi} \int_s \gamma M d\theta\right) \left(\frac{1}{\pi} \int_s c e^{-n(\theta)} L d\theta + C_0\right) \right] \end{aligned} \quad (6.1)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2ab}{a^2 - b^2}, \quad L = \frac{X \sin \theta - Y \cos \theta}{(\cos \theta - X)^2 + (\sin \theta - Y)^2}$$

$$M = \frac{1 - X \cos \theta - Y \sin \theta}{(\cos \theta - X)^2 + (\sin \theta - Y)^2}$$

Найдя $\partial \varphi / \partial x$ и $\partial \varphi / \partial y$, находим распределение в потоке скоростей и давлений по формулам (3.2), (3.3), (3.6) и (3.7).

При этом получится поток, в котором скорости и давления меняются непрерывно при пересечении границ вихревого хвоста, а вихрь сохраняет конечную напряженность в точках P_1 и P_2 .

§ 7. Выполнение условий в бесконечности (определение постоянных k и k_1). Пусть (X_0, Y_0) есть точка плоскости Z , соответствующая бесконечно далекой точке плоскости z . Согласно последнему из условий (4.1) в этой точке должно быть

$$A(X_0, Y_0) = B(X_0, Y_0) = 0 \quad (7.1)$$

Подставим в формулы (6.1) X_0 и Y_0 вместо X и Y и полученные выражения приравняем нулю. Получим систему уравнений

$$\alpha_1 k + \beta_1 k_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 k + \beta_2 k_2 + \gamma_2 = 0 \quad (7.2)$$

где $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_2$ — определенные числа.

Из системы (7.2) найдем k и k_1 , каковые и надо будет подставить во все формулы, куда они входят, в частности в (6.1).

§ 8. Подъемная сила и лобовое сопротивление. Лобовое сопротивление P_x и подъемная сила P_y определяются по формулам (8.1)

$$P_x = -\frac{\rho}{2} \int_{S_2} \left(U - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 dy, \quad P_y = \frac{\rho}{2} \int_{S_2} \left[U^2 - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \rho U \int_{S_1+S_2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} dy \right) \quad (8.2)$$

где

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = c(\theta_0) b(\theta_0) + a(\theta_0) \left[kU \cos^2 \theta_0 + Ua(\theta_0) + \frac{dV}{ds} \right] + \frac{\partial V}{\partial x} + \pi U \nu(\theta_0) b(\theta_0)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = c(\theta_0) a(\theta) - b(\theta_0) \left[kU \cos^2 \theta_0 + Ua(\theta_0) + \frac{dV}{ds} \right] + \frac{\partial V}{\partial y} + \pi U \nu(\theta_0) a(\theta_0)$$

§ 9. Случай круглого цилиндра. По формулам этой статьи было произведено вычисление для круглого цилиндра единичного радиуса, причем коэффициент лобового сопротивления c_D оказался равным 1.137.

В книге под редакцией Гольдштейна «Современное состояние гидроаэромеханики вязкой жидкости», т. 2, стр. 96, 1948, дана кривая зависимости коэффициента c_D лобового сопротивления от числа Рейнольдса

$$c_D = f(R)$$

Из этой кривой видно, что теоретический коэффициент 1.137 полностью совпадает с экспериментальным при двух значениях числа Рейнольдса — при $R = 560$ и $R = 10^4$, т. е. когда завихренность невелика, что и соответствует исходному положению теории исчезающей вязкости о том, что движение жидкости происходит со слабыми вихрями.

В то же время на значительном интервале, от $R = 10^4$ до $R = 10^5$, теоретический коэффициент 1.137 весьма мало отличается от экспериментального, оставаясь немного меньше его. Наибольшая разность на этом интервале есть $c_D - 1.137 = 0.07$.

Поступила 29 III 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Oseen C. W. Hydrodynamik. Leipzig, 1927.
2. Villat H. Leçons sur l'hydrodynamique. Paris, 1929.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.