Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ, ПРИМЕНИМЫХ К РЕШЕНИЮ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Я. Риекстыньш

(Рига)

В предыдущей статье автора [1] рассмотрены специальные функции, полученные из функций Ломмеля от двух мнимых аргументов заменой независимых переменных. При помощи этих функций можно выразить решения системы телеграфных уравнений при различных граничных условиях. Но часто оказывается притом, что эти функции приходится рассматривать с комплексными аргументами, вместо которых целесообразно ввести новые специальные функции, и этому вопросу посвящена настоящая статья.

В работе рассматриваются некоторые свойства упомянутых новых специальных функций. Затем выводится ряд формул, при помощи которых можно получить в удобном виде решения телеграфных уравнений при различных граничных и нулевых начальных условиях. В конце работы в качестве примера рассмотрена система телеграфных уравнений для полубесконечного провода с приключенным синусоидальным напряжением.

1. Решение системы телеграфных уравнений

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = Gu + C\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \begin{pmatrix} R>0, & L>0 \\ C>0, & G\geqslant 0\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

преобразованием Лапласа при различных граничных и при нулевых начальных условиях приводит к надобности обращения следующих выражений:

$$\frac{P_1(p)}{Q_1(p)}e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}, \qquad \frac{P_2(p)}{Q_2(p)}\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}} \qquad \begin{pmatrix} \xi>0, & \rho>0 \\ & \sigma\geqslant 0\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Здесь $P_1(p)$, $P_2(p)$, $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$ являются многочленами различных степеней, причем обычно степень числителя ниже степени знаменателя. Если ограничиться этим случаем, то функции $P_1(p)/Q_1(p)$ и $P_2(p)/Q_2(p)$ можно разложить на простейшие дроби. В предположении, что знаменатели этих функций не имеют кратных корней, приходится находить выражения вида

$$L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{p-p_0}\right\}, \qquad L_t^{-1}\left\{\frac{1}{p-p_0}\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\} \tag{1.3}$$

$$L_t^{-1}\left\{\frac{\delta}{(p-p_0)^2+\delta^2}e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\}, \qquad L_t^{-1}\left\{\frac{p-p_0}{(p-p_0)^2+\delta^2}e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\} \tag{1.4}$$

$$L_t^{-1}\left\{\frac{\delta}{(p-p_0)^2+\delta^2}\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\}, \qquad L_t^{-1}\left\{\frac{p-p_0}{(p-p_0)^2+\delta^2}\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\} \tag{1.5}$$

где L_t^{-1} означает обратное преобразование Лапласа, p_0 — любая вещественная, а δ — любая положительная постоянные.

В статье [1] показано, что при $p_0=0$ обращения (1.3) выражаются через специальные функции

$$u_\nu(x, y)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+2k} I_{\nu+2k}(2\sqrt{xy}) \tag{1.6}$$

показательные и бесселевы функции. Легко убедиться в том, что полученные формулы с малыми изменениями справедливы также при $|\rho+p_0|>\sigma$. В этом случае

$$L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{p-p_0}\right\}=\{e^{p_0t-\varkappa\mu\xi}+e^{-\rho t}[u_0(\beta\tau, \alpha\eta)+$$
$$+\varkappa u_1(\beta\tau, \alpha\eta)-u_0(\beta\eta, \alpha\tau)-\varkappa u_1(\beta\eta, \alpha\tau)]\}\, h(\tau) \tag{1.7}$$

$$L_t^{-1}\left\{\frac{1}{p-p_0}\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\}=\frac{1}{\mu}\{\varkappa e^{p_0t-\varkappa\mu\xi}-e^{-\rho t}[\varkappa u_0(\beta\tau, \alpha\eta)+$$
$$+u_1(\beta\tau, \alpha\eta)+\varkappa u_0(\beta\eta, \alpha\tau)+u_1(\beta\eta, \alpha\tau)-\varkappa I_0(2\sqrt{\alpha\beta\eta\tau})]\}\, h(\tau)$$

где (1.8)

$$\varkappa=\operatorname{sign}(\rho+p_0), \qquad \tau=t-\xi, \qquad \eta=t+\xi, \qquad \mu=+\sqrt{(\rho+p_0)^2-\sigma^2},$$

$$\alpha=\frac{1}{2}[\varkappa(\rho+p_0)+\mu], \qquad \beta=\frac{1}{2}[\varkappa(\rho+p_0)-\mu], \qquad h(\tau)=\begin{cases}0 & \tau<0\\ 1 & \tau>0\end{cases} \tag{1.9}$$

При $|\rho+p_0|<\sigma$ в формулах (1.3), а также в формулах (1.4) — (1.5) приходится рассматривать функции $u_\nu(x, y)$ с комплексными аргументами, вместо которых целесообразно ввести новые специальные функции.

2. Введем обозначение

$$\psi_\nu(x, y)=\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu} I_\nu(2\sqrt{xy}) \tag{2.1}$$

Рассмотрим функции

$$\operatorname{cb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{\nu+2k}(x, y)\cos(2k+\nu+\varepsilon)\varphi$$
$$\operatorname{sb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{\nu+2k}(x, y)\sin(2k+\nu+\varepsilon)\varphi \tag{2.2}$$

где x, y — неотрицательные вещественные переменные, а $\nu, \varphi, \varepsilon$ — любые вещественные постоянные. Очевидно, мы имеем

$$\operatorname{cb}_\nu(x, y, 0, \varepsilon)=u_\nu(x, y), \qquad \operatorname{sb}_\nu(x, y, 0, \varepsilon)=0 \tag{2.3}$$

$$\operatorname{cb}_\nu(x, y, \varphi, 0)=\frac{1}{2}[u_\nu(e^{i\varphi}x, e^{-i\varphi}y)+u_\nu(e^{-i\varphi}x, e^{i\varphi}y)]$$
$$\operatorname{sb}_\nu(x, y, \varphi, 0)=\frac{1}{2i}[u_\nu(e^{i\varphi}x, e^{-i\varphi}y)-u_\nu(e^{-i\varphi}x, e^{i\varphi}y)] \tag{2.4}$$

$$\operatorname{cb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon)=\operatorname{sb}_\nu\left(x, y, \varphi, \varepsilon+\frac{\pi}{2\varphi}\right) \qquad (\varphi\neq 0) \tag{2.5}$$

Разложение (1.6) для функции $u_\nu(x, y)$ является мажорантом для рядов (2.2). Поэтому [1] ряды (2.2) также абсолютно сходятся при всех указанных выше значениях x, y, ν, φ и ε, кроме $x=0$ при $\nu<0$ $(\nu\neq -n)$.

Воспользуемся результатами перегруппировок, приведенных в работе [1], обращая внимание на множители $\cos(2k+\nu+\varepsilon)\varphi$ и $\sin(2k+\nu+\varepsilon)\varphi$. Таким образом при $\nu \neq -n$ получим

$$\mathrm{cb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} a_{k+\nu}(x, \varphi, \varepsilon),$$

$$\mathrm{cb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1)} b_k(y, \varphi, \varepsilon) \tag{2.6}$$

где

$$a_{k+\nu}(x, \varphi, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{k+\nu+2m}}{\Gamma(k+\nu+2m+1)} \cos(2m+\nu+\varepsilon)\varphi \tag{2.7}$$

$$b_k(y, \varphi, \varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \cos(\nu+\varepsilon+k)\varphi + \frac{y^2}{2!}\cos(\nu+\varepsilon+k-2)\varphi + \cdots + \frac{y^k}{k!}\cos(\nu+\varepsilon)\varphi & (k=2r) \\ y\cos(\nu+\varepsilon+k-1)\varphi + \frac{y^3}{3!}\cos(\nu+\varepsilon+k-3)\varphi + \cdots + \frac{y^k}{k!}\cos(\nu+\varepsilon)\varphi & (k=2r+1) \end{cases}$$

При $\nu = -n$ имеем

$$\mathrm{cb}_{-n}(x, y, \varphi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} b_{k+n}(y, \varphi, \varepsilon) \tag{2.8}$$

Соответствующие формулы для функции $\mathrm{sb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon)$ получаются в силу соотношения (2.5). Пользуясь формулами для $u_\nu(x, y)$, приведенными в работе [1], а также формулами (2.4) и (2.6), можно установить также и следующие соотношения:

$$\mathrm{cb}_{-n}(x, y, \varphi, 0) =$$

$$= \begin{cases} \mathrm{ch}\,[(x+y)\cos\varphi]\cos[(x-y)\sin\varphi] - \mathrm{cb}_{n+2}(y, x, \varphi, 0) & (n=2r) \\ \mathrm{sh}\,[(x+y)\cos\varphi]\cos[(x-y)\sin\varphi] - \mathrm{cb}_{n+2}(y, x, \varphi, 0) & (n=2r+1) \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\mathrm{sb}_{-n}(x, y, \varphi, 0) =$$

$$= \begin{cases} \mathrm{sh}\,[(x+y)\cos\varphi]\sin[(x-y)\sin\varphi] + \mathrm{sb}_{n+2}(y, x, \varphi, 0) & (n=2r) \\ \mathrm{ch}\,[(x+y)\cos\varphi]\sin[(x-y)\sin\varphi] + \mathrm{sb}_{n+2}(y, x, \varphi, 0) & (n=2r+1) \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\mathrm{cb}_\nu(0, y, \varphi, \varepsilon) = \begin{cases} \cos\varepsilon\varphi & \text{при } \nu=0, \\ 0 & \text{при } \nu>0, \end{cases} \qquad \mathrm{sb}_\nu(0, y, \varphi, \varepsilon) = \begin{cases} \sin\varepsilon\varphi & \text{при } \nu=0 \\ 0 & \text{при } \nu>0 \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\mathrm{cb}_{2n}(x, 0, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{2}e^{x\cos\varphi}\cos(x\sin\varphi+\varepsilon\varphi) + \frac{1}{2}e^{-x\cos\varphi}\cos(x\sin\varphi-\varepsilon\varphi) - \\ - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos(2k+\varepsilon)\varphi \tag{2.12}$$

$$\mathrm{cb}_{2n+1}(x, 0, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{2}e^{x\cos\varphi}\cos(x\sin\varphi+\varepsilon\varphi) - \frac{1}{2}e^{-x\cos\varphi}\cos(x\sin\varphi-\varepsilon\varphi) - \\ - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos(2k+1+\varepsilon)\varphi \tag{2.13}$$

$$\mathrm{sb}_{2n}(x, 0, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{2}e^{x\cos\varphi}\sin(x\sin\varphi+\varepsilon\varphi) - \frac{1}{2}e^{-x\cos\varphi}\sin(x\sin\varphi-\varepsilon\varphi) - \\ - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sin(2k+\varepsilon)\varphi \tag{2.14}$$

$$\mathrm{sb}_{2n+1}(x, 0, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{2}e^{x\cos\varphi}\sin(x\sin\varphi+\varepsilon\varphi) + \frac{1}{2}e^{-x\cos\varphi}\sin(x\sin\varphi-\varepsilon\varphi) - \\ - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin(2k+1+\varepsilon)\varphi \tag{2.15}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^n}{\partial y^n}\,\mathrm{cb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon) = \cos n\varphi\,\mathrm{cb}_{\nu+n}(x, y, \varphi, \varepsilon) + \sin n\varphi\,\mathrm{sb}_{\nu+n}(x, y, \varphi, \varepsilon)\\
&\frac{\partial^n}{\partial x^n}\,\mathrm{cb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon) = \cos n\varphi\,\mathrm{cb}_{\nu-n}(x, y, \varphi, \varepsilon) - \sin n\varphi\,\mathrm{sb}_{\nu-n}(x, y, \varphi, \varepsilon)\\
&\frac{\partial^n}{\partial y^n}\,\mathrm{sb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon) = \cos n\varphi\,\mathrm{sb}_{\nu+n}(x, y, \varphi, \varepsilon) - \sin n\varphi\,\mathrm{cb}_{\nu+n}(x, y, \varphi, \varepsilon)\\
&\frac{\partial^n}{\partial x^n}\,\mathrm{sb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon) = \cos n\varphi\,\mathrm{sb}_{\nu-n}(x, y, \varphi, \varepsilon) + \sin n\varphi\,\mathrm{cb}_{\nu-n}(x, y, \varphi, \varepsilon)
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

3. В применениях этих функций к телеграфным уравнениям часто приходится складывать по две такие функции, которые отличаются друг от друга лишь последним аргументом ε. При этом полезна следующая формула:

$$k_1\,\mathrm{cb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon_1) + k_2\,\mathrm{cb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon_2) = k_3\,\mathrm{cb}_\nu(x, y, \varphi, \varepsilon_3) \tag{3.1}$$

где k_1, k_2 — любые вещественные,

$$k_3 = +\sqrt{k_1{}^2 + k_2{}^2 + 2k_1k_2\cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varphi}, \qquad \operatorname{tg}\varepsilon_3\varphi = \frac{k_1\sin\varepsilon_1\varphi + k_2\sin\varepsilon_2\varphi}{k_1\cos\varepsilon_1\varphi + k_2\cos\varepsilon_2\varphi}$$

причем $\varepsilon_3\varphi$ надо брать так, чтобы $\sin\varepsilon_3\varphi$ имел одинаковый знак с числителем дроби. Формула (3.1) легко получается из определения (2.2) функций cb_ν и известных тригонометрических формул.

Исходя из полученных формул, можно получить разные формулы преобразования Лапласа для функций cb_ν и sb_ν. Для решения телеграфных уравнений большее значение имеют следующие формулы:

$$
\begin{aligned}
&L_t\{[\mathrm{cb}_0(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0) + \mathrm{cb}_1(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0)]\,h(\tau)\} =\\
&= \tfrac{1}{2}\,e^{-\xi\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}} + \frac{p-(\alpha+\beta)\cos\varphi}{[p-(\alpha+\beta)\cos\varphi]^2 + (\alpha-\beta)^2\sin^2\varphi} + \right.\\
&\left. + \frac{p(\alpha-\beta)\cos\varphi + (\beta^2-\alpha^2)}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,\{[p-(\alpha+\beta)\cos\varphi]^2 + (\alpha-\beta)^2\sin^2\varphi\}}\right]
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_t\{[\mathrm{sb}_0(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0) + \mathrm{sb}_1(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0)]\,h(\tau)\} =\\
&= \tfrac{1}{2}\,e^{-\xi\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}\left[\frac{p(\alpha+\beta)\sin\varphi - 2\alpha\beta\sin 2\varphi}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,\{[p-(\alpha+\beta)\cos\varphi]^2 + (\alpha-\beta)^2\sin^2\varphi\}} - \right.\\
&\left. - \frac{(\beta-\alpha)\sin\varphi}{[p-(\alpha+\beta)\cos\varphi]^2 + (\alpha-\beta)^2\sin^2\varphi}\right]
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

причем

$$L_t\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

а $h(\tau)$, τ и η определяются по формуле (1.9). Меняя местами α и β и складывая (соответственно отнимая) полученные выражения, имеем

$$
\begin{aligned}
&L_t\{[\mathrm{sb}_0(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0) + \mathrm{sb}_1(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0) - \mathrm{sb}_0(\beta\tau, \alpha\eta, \varphi, 0) -\\
&- \mathrm{sb}_1(\beta\tau, \alpha\eta, \varphi, 0)]\,h(\tau)\} = \frac{(\alpha-\beta)\sin\varphi}{[p-(\alpha+\beta)\cos\varphi]^2 + (\alpha-\beta)^2\sin^2\varphi}\,e^{-\xi\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_t\{\mathrm{cb}_0(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0) + \mathrm{cb}_1(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0) + \mathrm{cb}_0(\beta\tau, \alpha\eta, \varphi, 0) + \mathrm{cb}_1(\beta\tau, \alpha\eta, \varphi, 0) -\\
&- I_0(2\sqrt{\alpha\beta\eta\tau})]\,h(\tau)\} = \frac{p-(\alpha+\beta)\cos\varphi}{[p-(\alpha+\beta)\cos\varphi]^2 + (\alpha-\beta)^2\sin^2\varphi}\,e^{-\xi\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$$L_t\{[\mathrm{sb}_0(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0)+\mathrm{sb}_1(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0)+\mathrm{sb}_0(\beta\tau, \alpha\eta, \varphi, 0)+$$

$$+\mathrm{sb}_1(\beta\tau, \alpha\eta, \varphi, 0)]\,h(\tau)\}=\frac{p(\alpha+\beta)\sin\varphi-2\alpha\beta\sin 2\varphi}{[p-(\alpha+\beta)\cos\varphi]^2+(\alpha-\beta)^2\sin^2\varphi}\,\frac{e^{-\xi\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}} \tag{3.6}$$

$$L_t\{[(\mathrm{cb}_0(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0)+\mathrm{cb}_1(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0)-\mathrm{cb}_0(\beta\tau, \alpha\eta, \varphi, 0)-$$

$$-\mathrm{cb}_1(\beta\tau, \alpha\eta, \varphi, 0)]\,h(\tau)\}=\frac{p(\alpha-\beta)\cos\varphi+\beta^2-\alpha^2}{[p-(\alpha+\beta)\cos\varphi]^2+(\alpha-\beta)^2\sin^2\varphi}\,\frac{e^{-\xi\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}} \tag{3.7}$$

4. Для осуществления преобразований (1.4) — (1.5), а также и преобразований (1.3) при $|\rho+p_0|<\sigma$ введем подстановку $p+\rho=q$, совершим обратное преобразование относительно q при помощи формул (3.4) — (3.7) и, наконец, согласно известным правилам умножим результат на $e^{-\rho t}$.

При $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ ввиду формулы (2.3), из (3.5) и (3.7) опять можно получить формулы (1.7) и (1.8).

При $\sigma\neq 0$ и $|\rho+p_0|<\sigma$, пользуясь обозначениями

$$\alpha=\beta=\frac{\sigma}{2}, \qquad \cos\varphi=\frac{\rho+p_0}{\sigma}, \qquad \mu=+\sqrt{\sigma^2-(\rho+p_0)^2} \tag{4.1}$$

из (3.5) и (3.6) находим

$$L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{p-p_0}\right\}=e^{-\rho t}\,[2\,\mathrm{cb}_0(\alpha\tau,\alpha\eta,\varphi,0)+2\,\mathrm{cb}_1(\alpha\tau,\alpha\eta,\varphi,0)-I_0(2\alpha\sqrt{\eta\tau})]\,h(\tau)$$

$$L_t^{-1}\left\{\frac{1}{p-p_0}\,\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\}=\frac{2e^{-\rho t}}{\mu}]\,\mathrm{sb}_0(\alpha\tau, \alpha\eta, \varphi, 0)+\mathrm{sb}_1(\alpha\tau, \alpha\eta, \varphi, 0)]\,h(\tau) \tag{4.2}$$

По формуле (3.4), пользуясь обозначениями

$$(\alpha+\beta)\cos\varphi=\rho+p_0, \qquad (\alpha-\beta)\sin\varphi=\delta, \qquad 4\alpha\beta=\sigma^2 \tag{4.3}$$

получаем

$$L_t^{-1}\left\{\frac{\delta e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{(p-p_0)^2+\delta^2}\right\}=e^{-\rho t}\,[\mathrm{sb}_0(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0)+\mathrm{sb}_1(\alpha\tau, \beta\eta, \varphi, 0)-$$

$$-\mathrm{sb}_0(\beta\tau, \alpha\eta, \varphi, 0)-\mathrm{sb}_1(\beta\tau, \alpha\eta, \varphi, 0)]\,h(\tau) \tag{4.4}$$

Систему (4.3) всегда можно решить относительно неизвестных α, β и φ. При $\rho=-p_0$ имеем $\varphi={}^1/_2\,\pi$, и α и β легко получаются из остальных двух уравнений.

При $\rho\neq -p_0$, введя обозначения

$$\mu=\sqrt{(\rho+p_0)^2-\sigma^2\cos^2\varphi}, \qquad \Theta=\sqrt{\delta^2+\sigma^2\sin^2\varphi}$$

получаем

$$\Theta=\sqrt{\tfrac{1}{2}[\sigma^2+\delta^2-(\rho+p_0)^2+\sqrt{\{\sigma^2+\delta^2-(\rho+p_0)^2\}^2+4\delta^2(\rho+p_0)^2}]}, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\Theta}{\rho+p_0}=\frac{\delta}{\mu}$$

$$\alpha=\frac{\rho+p_0+\mu}{2\cos\varphi}=\frac{\Theta+\delta}{2\sin\varphi}, \qquad \beta=\frac{\rho+p_0-\mu}{2\cos\varphi}=\frac{\Theta-\delta}{2\sin\varphi} \tag{4.5}$$

Практически оказывается удобным брать $\alpha>0$, $\beta>0$ и $\alpha>\beta$. Поэтому возьмем $\Theta>0$. Ввиду того что $\delta>0$ и $\Theta>\delta$, нам надо тогда брать φ, чтобы было $\sin\varphi>0$. Таким образом, можно ограничиться значениями $0<\varphi<\pi$. Величина μ имеет тот же знак, как и $\rho+p_0$.

Ввиду (2.10) при $n=0$ и $n=-1$ формулу (4.4) можно представить в следующем виде:

$$L_t^{-1}\left\{\frac{\delta e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{(p-p_0)^2+\delta^2}\right\}=\{e^{p_0t-\mu\xi}\sin(\delta t-\Theta\xi)+e^{-\rho t}[\mathrm{sb}_0(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,0)-$$
$$-\mathrm{sb}_0(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)+\mathrm{sb}_1(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,0)-\mathrm{sb}_1(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)]\}\,h(\tau)\tag{4.6}$$

Подобным образом при тех же обозначениях из формул (3.5) и (2.9) следует

$$L_t^{-1}\left\{\frac{p-p_0}{(p-p_0)^2+\delta^2}e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\}=\{e^{p_0t-\mu\xi}\cos(\delta t-\Theta\xi)+e^{-\rho t}[\mathrm{cb}_0(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)-$$
$$-\mathrm{cb}_0(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,0)+\mathrm{cb}_1(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)-\mathrm{cb}_1(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,0)]\}\,h(\tau)\tag{4.7}$$

5. Чтобы затем получить формулу обращения для первой формулы (1.5), помножим формулу (3.6) на $(\alpha-\beta)\cos\varphi$ и формулу (3.7) на $-(\alpha+\beta)\sin\varphi$ и затем сложим их. В результате, согласно предыдущим обозначениям, получаем

$$L_t^{-1}\left\{\frac{\delta}{(p-p_0)^2+\delta^2}\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\}=\frac{e^{-\rho t}}{\mu^2+\Theta^2}\{\mu[\mathrm{sb}_0(\alpha\tau,\beta\eta,\varphi,0)+$$
$$+\mathrm{sb}_1(\alpha\tau,\beta\eta,\varphi,0)+\mathrm{sb}_0(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)+\mathrm{sb}_1(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)]-\Theta[\mathrm{cb}_0(\alpha\tau,\beta\eta,\varphi,0)+$$
$$+\mathrm{cb}_1(\alpha\tau,\beta\eta,\varphi,0)-\mathrm{cb}_0(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)-\mathrm{cb}_1(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)]\}\,h(\tau)=$$
$$=\frac{1}{\Theta^2+\mu^2}\{e^{p_0t-\mu\xi}[\mu\sin(\delta t-\Theta\xi)-\Theta\cos(\delta t-\Theta\xi)]+$$
$$+\mu e^{-\rho t}[\mathrm{sb}_0(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,0)+\mathrm{sb}_1(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,0)+\mathrm{sb}_0(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)+$$
$$+\mathrm{sb}_1(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)]+\Theta e^{-\rho t}[\mathrm{cb}_0(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)+\mathrm{cb}_1(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,0)+$$
$$+\mathrm{cb}_0(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,0)+\mathrm{cb}_1(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,0)-I_0(2\sqrt{\alpha\beta\eta\tau})]\}\,h(\tau)\tag{5.1}$$

Формула (3.1) в силу (2.5) при $k_1=\Theta$, $k_2=\mu$, $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=-\pi/2\varphi$ принимает вид:

$$\Theta\,\mathrm{cb}_\nu(x,y,\varphi,0)+\mu\,\mathrm{sb}_\nu(x,y,\varphi,0)=\sqrt{\Theta^2+\mu^2}\,\mathrm{sb}_\nu(x,y,\varphi,\varepsilon)\tag{5.2}$$

где

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon\varphi=\frac{\Theta}{\mu}\qquad(0<\varepsilon\varphi<\pi)\tag{5.3}$$

Кроме того,

$$\mu\sin(\delta t-\Theta\xi)-\Theta\cos(\delta t-\Theta\xi)=\sqrt{\Theta^2+\mu^2}\sin(\delta t-\Theta\xi-\varepsilon\varphi)\tag{5.4}$$

В силу соотношений

$$\mathrm{sb}_0(x,y,\varphi,0)=\mathrm{sb}_2(x,y,\varphi,0),\quad \mathrm{cb}_0(x,y,\varphi,0)-I_0(2\sqrt{xy})=\mathrm{cb}_2(x,y,\varphi,0$$

получаем

$$L_t^{-1}\left\{\frac{\delta}{(p-p_0)^2+\delta^2}\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\Theta^2+\mu^2}}\{e^{p_0t-\mu\xi}\sin(\delta t-\Theta\xi-\varepsilon\varphi)+$$
$$+e^{-\rho t}[\mathrm{sb}_0(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,\varepsilon)+\mathrm{sb}_1(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,\varepsilon)+\mathrm{sb}_1(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,\varepsilon)+$$
$$+\mathrm{sb}_2(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,\varepsilon)]\}\,h(\tau)\tag{5.5}$$

Помножив формулу (3.6) на $(\alpha+\beta)\sin\varphi$ и формулу (3.7) на $(\alpha-\beta)\cos\varphi$ и затем сложив их, получаем

$$L_t^{-1}\left\{\frac{p-p_0}{(p-p_0)^2+\delta^2}\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\}=\frac{1}{\Theta^2+\mu^2}\{e^{p_0t-\mu\xi}[\Theta\sin(\delta t-\Theta\xi)+$$

$$+\mu\cos(\delta t-\Theta\xi)]+\Theta e^{-\rho t}[\mathrm{sb}_0(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ 0)+\mathrm{sb}_1(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ 0)+$$

$$+\mathrm{sb}_0(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ 0)+\mathrm{sb}_1(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ 0)]-\mu e^{-\rho t}[\mathrm{cb}_0(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ 0)+$$

$$+\mathrm{cb}_1(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ 0)+\mathrm{cb}_0(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ 0)+\mathrm{cb}_1(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ 0)-$$

$$-I_0(2\sqrt{\alpha\beta\eta\tau})]\}\,h(\tau) \tag{5.6}$$

Воспользуемся формулами, аналогичными (5.2) и (5.4):

$$\mu\,\mathrm{cb}_\nu(x,\ y,\ \varphi,\ 0)-\Theta\,\mathrm{sb}_\nu(x,\ y,\ \varphi,\ 0)=\sqrt{\Theta^2-\mu^2}\,\mathrm{cb}_\nu(x,\ y,\ \varphi,\ \varepsilon)$$

$$\Theta\sin(\delta t-\Theta\xi)+\mu\cos(\delta t-\Theta\xi)=\sqrt{\Theta^2+\mu^2}\cos(\delta t-\Theta\xi-\varepsilon\varphi)$$

Получим

$$L_t^{-1}\left\{\frac{p-p_0}{(p-p_0)^2+\delta^2}\frac{e^{-\xi\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\Theta^2+\mu^2}}\{e^{p_0t-\mu\xi}\cos(\delta t-\Theta\xi-\varepsilon\varphi)-$$

$$-e^{-\rho t}[\mathrm{cb}_0(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,\varepsilon)+\mathrm{cb}_1(\beta\eta,\alpha\tau,\varphi,\varepsilon)+\mathrm{cb}_1(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,\varepsilon)+\mathrm{cb}_2(\beta\tau,\alpha\eta,\varphi,\varepsilon)]\}\,h(\tau) \tag{5.7}$$

Итак, искомые формулы обращения задаются соотношениями (1.7), (1.8), (4.2), (4.6), (4.7), (5.5) и (5.7), где введенные новые постоянные определяются по формулам (1.9), (4.1), (4.5) и (5.3).

6. Таким образом, доказано, что, исключая случай кратных корней знаменателей в выражениях (1.2), решение системы телеграфных уравнений можно выразить через функции u_ν, cb_ν, sb_ν, показательные, тригонометрические и бесселевы.

Пользуясь полученными формулами, для определения установившегося процесса надо брать предел при $t\to\infty$. В работе [1] показано, что при $\rho\geqslant 2\sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha>\beta$ и $\nu=0$ или 1

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}u_\nu(\beta\tau,\ \alpha\eta)=0,\qquad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}u_\nu(\beta\eta,\ \alpha\tau)=0 \tag{6.1}$$

В силу неравенств

$$0\leqslant|\mathrm{cb}_\nu(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ \varepsilon)|\leqslant u_\nu(\beta\eta,\ \alpha\tau),\qquad 0\leqslant|\mathrm{sb}_\nu(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ \varepsilon)|\leqslant u_\nu(\beta\eta,\ \alpha\tau)$$

$$0\leqslant|\mathrm{cb}_\nu(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ \varepsilon)|\leqslant u_\nu(\beta\tau,\ \alpha\eta),\qquad 0\leqslant|\mathrm{sb}_\nu(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ \varepsilon)|\leqslant u_\nu(\beta\tau,\ \alpha\eta)$$

имеем также

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mathrm{cb}_\nu(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ \varepsilon)=0,\qquad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mathrm{sb}_\nu(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ \varepsilon)=0\\ &\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mathrm{cb}_\nu(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ \varepsilon)=0,\qquad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\mathrm{sb}_\nu(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ \varepsilon)=0\end{aligned} \tag{6.2}$$

Если же $\rho>\alpha+\beta$, то формулы (6.2) имеют место также при $\alpha<\beta$. В случае телеграфных уравнений $\rho\geqslant\sigma=2\sqrt{\alpha\beta}$, поэтому формулы (6.2) всегда имеют место.

7. В качестве примера на применение полученных формул рассмотрим случай линии полубесконечной длины при следующих условиях:

$$u(x,\ 0)=i(x,\ 0)=0,\qquad u(0,\ t)=E\sin\delta t \tag{7.1}$$

Решение системы (1.1) в этом случае представляется в виде

$$u(x,\ t) = L_t^{-1}\left\{\frac{E\delta}{p^2+\delta^2}\, e^{-\omega x\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\}$$
$$i(x,\ t) = L_t^{-1}\left\{\frac{E}{\omega}\left(\frac{G\delta}{p^2+\delta^2}+\frac{C\delta p}{p^2+\delta^2}\right)\frac{e^{-\omega x\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\} \tag{7.2}$$

где

$$\rho = \frac{RC+LG}{2LC}, \qquad \sigma = \frac{RC-LG}{2LC}, \qquad \omega = \sqrt{LC} \tag{7.3}$$

Из формулы (4.6) при $p_0 = 0$, $\xi = \omega x$ и остальных прежних обозначениях непосредственно имеем

$$u(x,\ t) = E\{e^{-\omega\mu x}\sin(\delta t-\omega\Theta x) + e^{-\rho t}[\mathrm{sb}_0(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ 0) + \mathrm{sb}_1(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ 0) -$$
$$- \mathrm{sb}_0(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ 0) - \mathrm{sb}_1(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ 0)]\, h(\tau) \tag{7.4}$$

Из формул (5.5) и (5.7) получаем

$$i(x,\ t) = \frac{E}{\omega\sqrt{\mu^2+\Theta^2}}\{Ge^{-\omega\mu x}\sin(\delta t-\omega\Theta x-\varepsilon\varphi) + Ge^{-\rho t}[\mathrm{sb}_0(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ \varepsilon) +$$
$$+ \mathrm{sb}_1(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ \varepsilon) + \mathrm{sb}_1(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ \varepsilon) + \mathrm{sb}_2(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ \varepsilon)] +$$
$$+ C\delta e^{-\omega\mu x}\cos(\delta t-\omega\Theta x-\varepsilon\varphi) - C\delta e^{-\rho t}[\mathrm{cb}_0(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ \varepsilon) +$$
$$+ \mathrm{cb}_1(\beta\eta,\ \alpha\tau,\ \varphi,\ \varepsilon) + \mathrm{cb}_1(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ \varepsilon) + \mathrm{cb}_2(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ \varepsilon)]\}\, h(\tau) \tag{7.5}$$

Пользуясь, как и выше, формулой (3.1), имеем

$$C\delta\,\mathrm{cb}_\nu(x,\ y,\ \varphi,\ \varepsilon) - G\,\mathrm{sb}_\nu(x,\ y,\ \varphi,\ \varepsilon) = \sqrt{G^2+(C\delta)^2}\,\mathrm{cb}_\nu(x,\ y,\ \varphi,\ \varepsilon+\varepsilon_1)$$
$$G\sin(\delta t-\omega\Theta x-\varepsilon\varphi) + C\delta\cos(\delta t-\omega\Theta x-\varepsilon\varphi) =$$
$$= \sqrt{G^2+(C\delta)^2}\cos[\delta t-\omega\Theta x-(\varepsilon+\varepsilon_1)\varphi] \tag{7.6}$$

где

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1\varphi = \frac{G}{C\delta} \qquad \left(0 \leqslant \varepsilon_1\varphi < \tfrac{1}{2}\pi\right) \tag{7.7}$$

Следовательно, окончательную формулу для $i(x,\ t)$ можно представить в виде

$$i(x,\ t) = \frac{E\sqrt{G^2+(C\delta)^2}}{\omega\sqrt{\Theta^2+\mu^2}}\{e^{-\omega\mu x}\cos[\delta t-\omega\Theta x-(\varepsilon+\varepsilon_1)\varphi] -$$
$$- e^{-\rho t}[\mathrm{cb}_0(\beta\eta, \alpha\tau, \varphi, \varepsilon+\varepsilon_1) + \mathrm{cb}_1(\beta\eta, \alpha\tau, \varphi, \varepsilon+\varepsilon_1) + \mathrm{cb}_1(\beta\tau, \alpha\eta, \varphi, \varepsilon+\varepsilon_1) +$$
$$+ \mathrm{cb}_2(\beta\tau,\ \alpha\eta,\ \varphi,\ \varepsilon+\varepsilon_1)]\}\, h(\tau) \tag{7.8}$$

Ввиду формул (6.2) при установившемся режиме, который достигается с любой точностью после достаточно долгого промежутка времени, имеем

$$u(x,\ t) = Ee^{-\omega\mu x}\sin(\delta t-\omega\Theta x)$$
$$i(x,\ t) = \frac{E\sqrt{G^2+(C\delta)^2}}{\omega\sqrt{\Theta^2+\mu^2}}\, e^{-\omega\mu x}\cos[\delta t-\omega\Theta x-(\varepsilon+\varepsilon_1)\varphi] \tag{7.9}$$

Поступила 13 XI 1951

Латвийский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Риекстыньш Э. Я. О некоторых специальных функциях, применимых к решению телеграфных уравнений. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 4. Стр. 485—494.