Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

ВАРЬИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПУАНКАРЕ

К. Е. Шурова
(Москва)

Уравнения Пункаре описывают движение системы, стесненной гладкими голономными связями.

Пусть положение системы задается зависимыми переменными $x_1, \ldots, x_n$, из которых k независимы. Возможные перемещения определяются группой операторов

$$X_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_\alpha{}^i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (\alpha = 1, \ldots, k)$$

так, чтобы изменение функции $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ на возможном перемещении определялось формой

$$\delta f = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha X_\alpha f(t, x_1, \ldots, x_n)$$

где ω_α определяют возможные перемещения системы. Изменение функции на действительном перемещении определяется соотношением

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{k} \eta_\alpha X_\alpha f\right) dt$$

где η_α определяют действительные перемещения.

При этом предполагается перестановочность операторов

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{ и } X_\alpha \quad \left(\frac{\partial t}{\partial t} X_\alpha\right) = 0; \qquad d \text{ и } \delta \quad (d\delta f = \delta\, df)$$

Группа операторов X удовлетворяет следующему условию:

$$(X_\alpha, X_\beta) = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = \sum_{i=1}^{k} c_{\alpha i \beta} X_i$$

Уравнения Пуанкаре для этой системы имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \eta_i}\right) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha i \beta} \eta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \eta_\beta} + X_i L$$

где

$$L(t, x_1, \ldots, x_n, \eta_1, \ldots, \eta_k) = T + U$$

В канонической форме эти уравнения запишутся так:

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha s \beta} \eta y_\beta - X_s H, \qquad \eta_s = \frac{\partial H}{\partial y_s} \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Здесь y_s — новые переменные, а H — функция Гамильтона:

$$y_s = \frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha} (\alpha = 1, \ldots, k), \qquad H(t, x, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = \sum_{j=1}^{k} \eta_j y_j - L$$

Составим уравнения для возмущенного движения.

Пусть α_l и β_s $(l = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, k)$ — возмущения для x_l и y_s соответственно. Функцию действия для возмущенного движения представим в виде

$$H(t, x_1 + \alpha_1, \ldots, x_n + \alpha_n;\ y_1 + \beta_1, \ldots, y_k + \beta_k) =$$
$$= H(t, x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_k) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_2} \alpha_l + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_s} \beta_s + \ldots$$

Здесь члены более высокого порядка не выписаны.

Тогда уравнения для возмущенного движения запишутся так:

$$\frac{d\beta_s}{dt} = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha s \beta}\, \eta_\alpha \beta_\beta + \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha s \beta}\, y_\beta \delta\eta_\alpha - X_\alpha \left[\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_l} \alpha_l + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_s} \beta_s\right]$$
$$\delta\eta_s = \frac{\partial}{\partial y_s}\left[\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_l} \alpha_l + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_s} \beta_s\right]$$

Но полученная система не замкнута. Если учесть связи, наложенные на систему, функция действия представится в виде

$$H(t, x_1 + \beta_1, \ldots, x_n + \alpha_n;\ y_1 + \beta_1, \ldots, x_k + \beta_k) =$$
$$= H(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) + \sum_{s=1}^{k} \omega_s X_s H + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_s} \beta_s$$

а уравнения движения преобразуются в замкнутую систему для переменных ω_s, β_s. Таким образом, зависимые переменные α_l исключаются из системы:

$$\frac{d\beta_s}{dt} = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha s \beta}\, y_\beta \delta\eta_\alpha + \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha s \beta}\, \beta_\beta \eta_\alpha - X_s \left[\sum_{s=1}^{k} \omega_s X_s H + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_s} \beta_s\right]$$
$$\delta\eta_s = \frac{\partial}{\partial y_s}\left[\sum_{s=1}^{k} \omega_s X_s H + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_s} \beta_s\right] \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Параметры η_s могут быть исключены из системы из условия

$$\eta_s = \frac{\partial H}{\partial y_s} \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Отсюда

$$\delta\eta_s = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha X_\alpha \frac{\partial H}{\partial y_s}$$

и уравнения окончательно принимают вид:

$$\frac{d\beta_s}{dt} = \sum_{\alpha, \beta}^{r} \left[c_{\alpha s \beta}\, y_\beta \sum_{\alpha'=1}^{k} \omega_{\alpha'} X_{\alpha'} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\right] + \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha s \beta}\, \beta_\beta \frac{\partial H}{\partial y_s} - X_s \left[\sum_{s=1}^{k} \omega_s X_s H + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_s} \beta_s\right]$$
$$\sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha X_\alpha \frac{\partial H}{\partial y_s} = \frac{\partial}{\partial y_s}\left[\sum_{s=1}^{k} \omega_s X_s H + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial y_s} \beta_s\right] \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Поступила 8 X 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, т. V, вып. 2, 1941.