Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В. М. Старжинский

(Москва)

Целью настоящей статьи является исследование устойчивости невозмущенного движения по Ляпунову в случае, когда уравнения первого приближения возмущенного движения приводятся к дифференциальному уравнению второго порядка специального вида. Исследование опирается на фундаментальные результаты А. М. Ляпунова [1,2] и представляет распространение его метода на диссипативную систему с постоянной диссипацией.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$y'' + ay' + p(x)y = 0 \tag{1.1}$$

где a — положительная постоянная, $p(x)$ — данная непрерывная и неотрицательная периодическая с периодом $\omega > 0$ функция действительного переменного x, т. е.

$$p(x+\omega) = p(x), \qquad p(x) \geqslant 0, \qquad p(x) \not\equiv 0$$

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — два решения уравнения (1.1), определяемые следующими начальными условиями:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0; \qquad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$$

Известно, что характеристическое уравнение в данном случае имеет вид:

$$\rho^2 - (1 + e^{-a\omega}) A\rho + e^{-a\omega} = 0$$

где

$$A = \frac{f(\omega) + \varphi'(\omega)}{1 + e^{-a\omega}} \tag{1.2}$$

Корни этого уравнения таковы:

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2}\left((1 + e^{-a\omega}) A \mp \sqrt{(1 + e^{-a\omega})^2 A^2 - 4e^{-a\omega}}\right)$$

При $|A| < 2e^{-1/_2 a\omega}(1 + e^{-a\omega})^{-1}$ корни комплексные и $|\rho_{1,2}| = e^{-1/_2 a\omega} < 1$. При $|A| \geqslant 2e^{-1/_2 a\omega}(1 + e^{-a\omega})^{-1}$ корни действительные и наибольший по абсолютной величине корень будет меньше единицы, если $|A| < 1$.

При условии $|A| < 1$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво (теорема II, п. 55 [1]), если же $|A| > 1$, то один из корней по абсолютной величине больше единицы и невозмущенное движение неустойчиво (п. 72 [3]).

Для вычисления A из формулы (1.2) Ляпуновым предложено вместо уравнения (1.1) рассматривать уравнение

$$y'' + ay' = \varepsilon p(x) y$$

Ляпунов доказал (п. 48, [1]) что всякое решение последнего уравнения, определяемое начальными условиями, не зависящими от ε, может быть разложено по возрастающим целым и положительным степеням ε, что приведет к абсолютно сходящемуся ряду, каково бы ни было x и каково бы ни было ε. Первая производная этого решения представляется рядом, члены которого будут производными предыдущего ряда. Что касается решений $f(x)$ и $\varphi(x)$, то имеют место следующие разложения:

$$f(x) = 1 + f_1(x)\varepsilon + f_2(x)\varepsilon^2 + f_3(x)\varepsilon^3 + \cdots$$

$$\varphi(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{a} + \varphi_1(x)\varepsilon + \varphi_2(x)\varepsilon^2 + \varphi_3(x)\varepsilon^3 + \cdots$$

где $f_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ — функции, вычисляемые последовательно по формулам

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^x e^{-ax_1}\,dx_1 \int_0^{x_1} e^{ax_2} p(x_2) f_{n-1}(x_2)\,dx_2 \\ \varphi_n(x) &= \int_0^x e^{-ax_1}\,dx_1 \int_0^{x_1} e^{ax_2} p(x_2) \varphi_{n-1}(x_2)\,dx_2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

исходя из функций

$$f_0(x) = 1, \qquad \varphi_0(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{a}$$

Положив в этих разложениях $\varepsilon = -1$, получим

$$f(x) = 1 - f_1(x) + f_2(x) - f_3(x) + \cdots$$

$$\varphi(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{a} - \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \varphi_3(x) + \cdots$$

Следовательно, если положить

$$A_n = \frac{f_n(\omega) + \varphi_n'(\omega)}{1 + e^{-a\omega}}$$

то получим выражение для A, установленное при $a = 0$ Ляпуновым:

$$A = 1 - A_1 + A_2 - A_3 + \cdots \tag{1.4}$$

§ 2. Вычисление A_n. Формулы (1.3) приводят к различным выражениям для A_n в форме кратных интегралов, некоторые из которых укажем, проводя преобразования, установленные при $a = 0$ Ляпуновым (п. 3 [2]), и сохраняя его пояснения.

Понимая под $x_1, x_2, x_3, \ldots$ различные значения независимого переменного x, положим для сокращения

$$p(x) = p, \qquad p(x_1) = p_1, \qquad p(x_2) = p_2, \qquad p(x_3) = p_3, \ldots$$

В таком случае для функций $f_n(x)$, $\varphi_n'(x)$ будем иметь выражения

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{2n-1}} \exp\left[-a(x_1 - x_2 + x_3 - \cdots - x_{2n})\right] p_2 p_4 \cdots p_{2n}\,dx_{2n} \\ \varphi_n'(x) &= e^{-ax} \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{2n-1}} \exp\left[a(x_1 - x_2 + x_3 - \cdots - x_{2n-2}) + \right. \\ &\qquad \left. + a x_{2n}\right] p_1 p_3 \ldots p_{2n-1}\,dx_{2n} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Отсюда выводят

$$A_n = \frac{1}{1+e^{-a\omega}}\int\limits_0^{\omega} dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{2n-1}} \{\exp[a(x_1 - x_2 + x_3 - \cdots - x_{2n-2}) - $$
$$- a\omega + ax_{2n}]\, p_1 p_3 \ldots p_{2n-1} +$$
$$+ \exp[-a(x_1 - x_2 + x_3 - \cdots - x_{2n})]\, p_2 p_4 \ldots p_{2n}\}\, dx_{2n}$$

Обращаясь к формулам (2.1) и замечая, что интегралы, которые там фигурируют, могут быть рассматриваемы как интегралы, распространенные на переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, удовлетворяющие неравенствам

$$x > x_1 > x_2 > \cdots > x_{2n} > 0$$

проведем интегрирование для $f_n(x)$ относительно переменных $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}$ и для $\varphi_n'(x)$ относительно переменных $x_2, x_4, \ldots, x_{2n}$. Тогда, вводя для n оставшихся переменных обозначения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим

$$f_n(x) = \frac{1}{a^n}\int\limits_0^{x} p_1 dx_1 \int\limits_0^{x_1} p_2 dx_2 \cdots \int\limits_0^{x_{n-1}} [1 - e^{-a(x-x_1)}][1 - e^{-a(x_1-x_2)}]\ldots$$
$$\ldots[1 - e^{-a(x_{n-1}-x_n)}]\, p_n dx_n$$

$$\varphi_n'(x) = \frac{1}{a^n}\int\limits_0^{x} p_1 dx_1 \int\limits_0^{x_1} p_2 dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} e^{-a(x-x_1)}[1 - e^{-a(x_1-x_2)}][1 - e^{-a(x_2-x_3)}]\ldots$$
$$\ldots[1 - e^{-a(x_{n-2}-x_{n-1})}]\{[1 - e^{-a(x_{n-1}-x_n)}] - (e^{-ax_n} - e^{-ax_{n-1}})\}\, p_n dx_n$$

Следовательно, будем иметь

$$A_n = \frac{1}{(1+e^{-a\omega})\, a^n}\int\limits_0^{\omega} p_1 dx_1 \int\limits_0^{x_1} p_2 dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} [1 - e^{-a(\omega - x_1 + x_n)}] \times$$
$$\times [1 - e^{-a(x_1-x_2)}][1 - e^{-a(x_2-x_3)}]\cdots[1 - e^{-a(x_{n-1}-x_n)}]\, p_n dx_n \qquad (2.2)$$

В пределе при $a = 0$ эта формула обращается в формулу (10) Ляпунова [2].

При последовательном вычислении $A_1, A_2, A_3, \ldots$ удобнее исходить не из формулы (2.2), а из формул (1.3), которые после интегрирования по частям дают

$$f_n(x) = \frac{1}{a}\int\limits_0^{x} p_1 f_{n-1}(x_1)\, dx_1 - \frac{e^{-ax}}{a}\int\limits_0^{x} e^{ax_1} p_1 f_{n-1}(x_1)\, dx_1$$

$$\varphi_n'(x) = e^{-ax}\int\limits_0^{x} e^{ax_1} p_1 \varphi_{n-1}(x_1)\, dx_1$$

Отсюда

$$A_n = \frac{1}{(1+e^{-a\omega})\, a}\Bigg[\int\limits_0^{\omega} p_1 f_{n-1}(x_1)\, dx_1 - e^{-a\omega}\int\limits_0^{\omega} e^{ax_1} p_1 f_{n-1}(x_1)\, dx_1 +$$
$$+ a e^{-a\omega}\int\limits_0^{\omega} e^{ax_1} p_1 \varphi_{n-1}(x_1)\, dx_1\Bigg] \qquad (2.3)$$

Укажем выражения для первых трех членов ряда (1.4):

$$A_1 = \frac{1}{a} \operatorname{th} \frac{a\omega}{2} \int_0^\omega p\, dx$$

$$A_2 = \frac{1}{2a^2}\left(\int_0^\omega p dx\right)^2 - \frac{e^{-a\omega}}{(1+e^{-a\omega})\, a^2}\int_0^\omega e^{-ax_1} p\, dx \int_0^\omega e^{ax} p dx - \tag{2.4}$$

$$- \frac{1}{a^2} \operatorname{th} \frac{a\omega}{2} \int_0^\omega e^{-ax} p\, dx \int_0^x e^{ax_1} p_1 dx_1$$

$$A_3 = \frac{1}{a^3} \operatorname{th} \frac{a\omega}{2} \int_0^\omega p dx \int_0^x p_1 dx_1 \int_0^{x_1} p_2 dx_2 + \frac{1}{(1+e^{-a\omega})\, a^3} [-K_1(p;\, \omega,\, a) +$$

$$+ e^{-a\omega} K_1(p;\, \omega,\, -a) + K_2(p;\, \omega,\, a) - e^{-a\omega} K_2(p;\, \omega,\, -a) -$$

$$- K_3(p;\, \omega,\, a) + e^{-a\omega} K_3(p;\, \omega,\, -a)]$$

где

$$K_1(p;\, \omega,\, a) = \int_0^\omega p\, dx \int_0^x e^{-ax_1} p_1 dx_1 \int_0^{x_1} e^{ax_2} p_2 dx_2$$

$$K_2(p;\, \omega,\, a) = \int_0^\omega e^{-ax} p\, dx \int_0^x p_1 dx_1 \int_0^{x_1} e^{ax_2} p_2 dx_2$$

$$K_3(p;\, \omega,\, a) = \int_0^\omega e^{-ax} p\, dx \int_0^x e^{ax_1} p_1 dx_1 \int_0^{x_1} p_2 dx_2$$

§ 3. Анализ условия $|A| < 1$. Ляпуновым (п. 49 [1]) для случая $a = 0$ установлено неравенство

$$A_n < \frac{A_1}{n} A_{n-1} \qquad (n \geqslant 2) \tag{3.1}$$

Аналогичное неравенство в рассматриваемом случае установлено Р. Эйнауди [4]. В своих выкладках Эйнауди полностью воспроизводит доказательство Ляпунова.

Из неравенства (3.1) следует, что члены ряда (1.4) будут, начиная с некоторого номера, убывать по абсолютной величине. В зависимости от величины первого члена ряда (1.4) представятся следующие случаи.

1. Если $A_1 \leqslant 2$, то непременно будем иметь $A_1 > A_2 > A_3 > \ldots$, вследствие чего получим $1 - A_1 < A < 1$ и будем иметь $A^2 < 1$.

Что касается условия $A_1 \leqslant 2$, определяющего первую область устойчивости, то оно запишется в силу (2.4) в виде

$$\operatorname{th} \frac{a\omega}{2} \int_0^\omega p\, dx \leqslant 2a \tag{3.2}$$

и было получено впервые, как нам известно, Эйнауди; этим и заканчивается его статья [4].

2. Если $2 < A_1 \leqslant 3$, то непременно будем иметь $A_2 > A_3 > A_4 > \ldots$, вследствие чего получим $1 - A_1 < A < 1 - A_1 + A_2$. Следовательно, если $1 - A_1 + A_2 \leqslant -1$, то $A < -1$ и условия

$$A_1 \leqslant 3, \qquad A_2 \leqslant A_1 - 2 \tag{3.3}$$

определяют первую область неустойчивости.

3. Если $3 < A_1 \leqslant 4$, то $A_3 > A_4 > A_5 > \ldots$, вследствие этого получим

$$1 - A_1 + A_2 - A_3 < A < 1 - A_1 + A_2$$

Отсюда при $1 - A_1 + A_2 - A_3 \geqslant -1$ и подавно будем иметь $A > -1$, а при $1 - A_1 + A_2 \leqslant 1$ также и $A < 1$. Таким образом, условия

$$2 < A_1 \leqslant 4, \qquad A_2 \leqslant A_1, \qquad A_3 \leqslant 2 - A_1 + A_2 \tag{3.4}$$

определяют вторую область устойчивости. С другой стороны, при $1 - A_1 + A_2 - A_3 \geqslant 1$ и подавно будем иметь $A > 1$ и условия

$$A_1 \leqslant 4, \qquad A_2 \geqslant A_1 + A_3 \tag{3.5}$$

определяют вторую область неустойчивости.

Дальнейший анализ можно провести лишь с рассмотрением членов, следующих за A_3. Заметим. что при $a = 0$ Ляпуновым получено неравенство (п. 10 [2])

$$A_n^2 > \frac{n}{n-1} A_{n-1}A_{n+1} \qquad (n \geqslant 2)$$

Мы не смогли получить подобное неравенство, и поэтому анализ Ляпунова. сформулированный им в п. 11—14 и 18 [2] в законченном виде, на рассматриваемый случай распространить не удалось.

§ 4. Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение [5]

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \left(1 + \lambda\cos\frac{2\pi}{\omega}t\right)y = 0 \qquad (\alpha > 0,\ \ 0 < \lambda < 1) \tag{4.1}$$

Если ввести новое независимое переменное $x = 2\pi\omega^{-1}t$, то уравнение запишется в виде

$$y'' + ay' + C(1 + \lambda\cos x)\,y = 0 \qquad \left(a = \frac{\omega}{2\pi}\alpha,\ \ C = \frac{\omega^2}{4\pi^2}\right) \tag{4.2}$$

Первые три члена ряда (1.4), вычисленные по формулам (2.4), будут

$$A_1 = \frac{2\pi C}{a}\operatorname{th}\pi a$$

$$A_2 = \frac{2\pi^2C^2}{a^2} - \frac{\pi C^2}{a}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2}\right)\operatorname{th}\pi a$$

$$A_3 = -\frac{2\pi^2C^3}{a^2}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2}\right) + \frac{2\pi C^3}{a}\left[\frac{2}{a^4} + \frac{2\pi^2}{3a^2} + \frac{2\lambda^2}{a^2(1+a^2)} - \frac{\lambda^2}{a^2(1+a^2)^2} + \frac{\lambda^2}{(1+a^2)^2}\right]\operatorname{th}\pi a$$

Первая область устойчивости в пространстве параметров (C, a, λ) определяется неравенством, получаемым из (3.2)

$$\operatorname{th}\pi a - \frac{a}{\pi C} \leqslant 0 \tag{4.3}$$

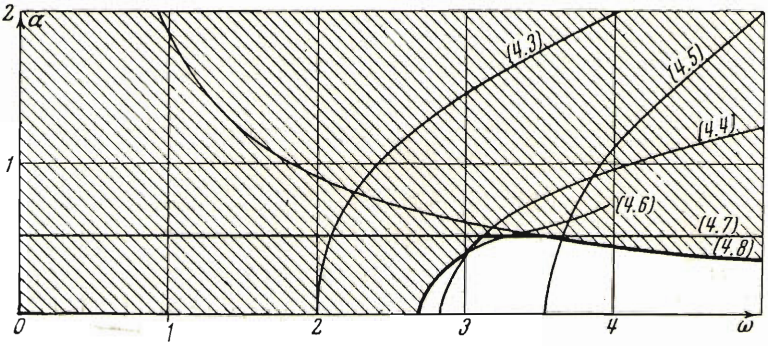
Вторая область устойчивости определяется неравенствами, получаемыми из (3.4):

$$-\frac{a}{\pi C} < \operatorname{th}\pi a - \frac{2a}{\pi C} \leqslant 0 \tag{4.4}$$

$$\frac{\pi C}{a} - \left[1 + \left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2}\right)\frac{C}{2}\right]\operatorname{th}\pi a \leqslant 0 \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\Big\{1 + \left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2}\right)\frac{C}{2} + \Big[\frac{2}{a^4} + \frac{2\pi^2}{3a^2} + \frac{2\lambda^2}{a^2(1+a^2)} - \frac{\lambda^2}{a^2(1+a^2)^2} +{}\\ + \frac{\lambda^2}{(1+a^2)^2}\Big]C^2\Big\}\operatorname{th}\pi a - \frac{a}{\pi C} - \frac{\pi C}{a} - \frac{\pi C^2}{a}\left(\frac{2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{1+a^2}\right) \leqslant 0\end{aligned} \tag{4.6}$$

Можно убедиться, что условия (3.3) и (3.5) невозможны в нашем случае, т. е. если для рассматриваемого примера имеем $A < -1$ или $A > 1$, то это можно было бы установить только рассмотрением членов ряда (1.4), следующих за A_3.



Фиг. 1

В статье [6] были установлены два достаточных условия устойчивости при более общем виде уравнения (1.1). Для уравнения (4.1) эти условия имеют вид [см. (15) и (17) [6]]:

$$\alpha \geqslant \sqrt{1+\lambda} - \sqrt{1-\lambda} \tag{4.7}$$

$$\alpha \geqslant \frac{\pi\lambda}{\omega\sqrt{1-\lambda^2}} \tag{4.8}$$

На фиг. 1 построены кривые, определяемые уравнениями (4.3) — (4.8) при $\lambda = 0.5$ на плоскости (ω, α). Результирующая область устойчивости заштрихована.

Поступила 20 X 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1935.
2. Ляпунов А. М. Sur une série dans la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. Зап. Акад. наук по физ.-мат. отд., 8-я серия, т. XIII, № 2, 1902.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
4. Einaudi R. Sulle vibrazioni quasi-armoniche di un sistema dissipativo. Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, т. XCV, p. II, 1936.
5. Андронов А. А. и Леонтович М. А. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами. Журнал Русского физико-химического общества. Серия физическая, т. IX, вып. 5—6, 1927.
6. Старжинский В. М. Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.