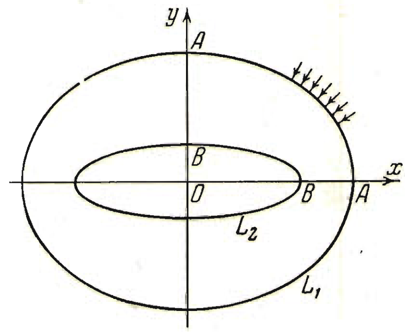
Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVII, 1953

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

М. П. Шереметьев

(Москва)

В работе дается решение задачи об упругом равновесии кольца, ограниченного двумя конфокальными эллипсами[1]. Заметим, что Тимпе[1] опубликовал решение этой задачи. Однако, как указал Н. И. Мусхелишвили в своей книге[2] (подстрочное примечание на стр. 231), это решение оказалось неправильным, так как система функций, которой он пользовался, была неполной.



Фиг. 1

Пусть область S, занятая телом,— эллиптическое кольцо (фиг. 1), ограниченное двумя конфокальными эллипсами L_1 и L_2. Начало координат выберем в центре эллиптического кольца, ось x направим вдоль большой полуоси.

Пусть заданы внешние напряжения x_n^j и y_n^j, действующие на эллипсах L_1 и L_2. Отобразим функцией

$$z = \omega(\zeta) = A\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)$$

область кольца на круговое кольцо, заключенное между двумя концентрическими окружностями γ_1 и γ_2, радиусы которых $R = 1$ и $R_2 < 1$.

Граничные условия в преобразованной области запишутся в виде

$$\overline{\varphi(\sigma_j)} + \frac{\omega(\sigma_j)}{\overline{\omega'(\sigma_j)}}\,\overline{\varphi'(\sigma_j)} + \overline{\psi(\sigma_j)} = f_j(\sigma_j) + C_j \qquad (j = 1, 2) \tag{1}$$

Здесь σ_j — точка на окружности γ_j $(j = 1,2)$,

$$f_j(\sigma_j) = i\int_0^{\vartheta} (X_n^{(j)} - iY_n^{(j)})\,|\,\omega'(\sigma_j)\,|\,d\vartheta$$

где ϑ — центральный угол.

Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что главный вектор и главный момент равны нулю на каждом из контуров в отдельности. В этом случае f_j — непрерывная функция от σ_j, а функции $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ можно представить в виде

$$\varphi(\zeta) = P_1(\zeta) + P_2(\zeta), \qquad \psi(\zeta) = Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta) \tag{2}$$

Здесь

$$P_1(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \zeta^\nu, \qquad P_2(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \zeta^{-\nu}$$
$$Q_1(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu \zeta^\nu, \qquad Q_2(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \zeta^{-\nu} \tag{3}$$

---

[1] Прием, применяемый к решению данной задачи, был изложен в работе[3].

функции, регулярные соответственно внутри γ_1 и вне γ_2, включая и бесконечно удаленную точку.

Предположим также, что правые части (1) разлагаются в ряд Фурье:

$$f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma_1^{k} + \beta_k \sigma_1^{-k}, \qquad f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_k \sigma_2^{k} + \gamma_k \sigma_2^{k}) + \delta_0 \tag{4}$$

Здесь постоянная C_1 выбрана так, что свободный член $\alpha_0 = 0$, а свободный член f_2 и C_2 включены в δ_0. Из условия равенства нулю момента на каждом контуре в отдельности следует, что $\beta_1 + m\overline{\alpha_1}$ и $\gamma_1 + m\overline{\delta_1}$ должны быть величинами вещественными. Умножим равенства (1) на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma_j}{\sigma_j - \zeta}$$

и проинтегрируем их по γ_j $(f = 1,2)$, принимая во внимание при этом равенства (2), (4) и соотношения

$$\frac{\overline{\omega(\sigma_1)}}{\overline{\omega'(\sigma_1)}} = \frac{\sigma_1 (1 + m\sigma_1^2)}{\sigma_1^2 - m} \quad \text{на } \gamma_1, \qquad \frac{\overline{\omega(\sigma_2)}}{\overline{\omega'(\sigma_2)}} = \frac{\sigma_2 (R_2^4 + m\sigma_2^2)}{R_2^2 (\sigma_2^2 - m)} \quad \text{на } \gamma_2$$

Здесь и в дальнейшем штрихи означают дифференцирование. В результате интегрирования по γ_1 ($|\zeta| > 1$) и γ_2 ($|\zeta| > R_2$) из (1) получим

$$\overline{P}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \overline{c}_0 + \frac{1+m^2}{2}\left(\frac{\overline{P_1'(\sqrt{m})}}{\zeta - \sqrt{m}} + \frac{\overline{P_1'(-\sqrt{m})}}{\zeta + \sqrt{m}}\right) + \\ + \frac{\zeta(1 + m\zeta^2)}{\zeta^2 - m} P_2'(\zeta) + Q_2(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_\nu \zeta^{-k} \tag{5}$$

$$\overline{P}_1\left(\frac{R_2^2}{\zeta}\right) - \overline{c}_0 + \frac{R_2^4 + m_2}{2R_2^2}\left(\frac{\overline{P_1'(\sqrt{m})}}{\zeta - \sqrt{m}} + \frac{\overline{P_1'(-\sqrt{m})}}{\zeta + \sqrt{m}}\right) + \\ + \frac{\zeta(R_2^4 + m\zeta^2)}{R_2^2(\zeta^2 - m)} P_2'(\zeta) + Q_2(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \zeta^{-\nu} \tag{6}$$

Интегрируя (1) по тем же окружностям γ_1 и γ_2, но полагая соответственно $|\zeta| < 1$ и $|\zeta| < R_2$, будем иметь из (1) еще два равенства:

$$\overline{c}_0 + \frac{\zeta(1 + m\zeta^2)}{\zeta^2 - m} P_1'(\zeta) - \frac{1+m^2}{2}\left(\frac{\overline{P_1'(\sqrt{m})}}{\zeta - \sqrt{m}} + \frac{\overline{P_1'(-\sqrt{m})}}{\zeta + \sqrt{m}}\right) + \\ + \overline{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) + Q_1(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \zeta^{\nu} \tag{7}$$

$$\overline{c}_0 + \frac{\zeta(R_2^4 + m\zeta^2)}{R_2^2(\zeta^2 - m)} P_1'(\zeta) - \frac{R_2^4 + m^2}{2R_2^2}\left(\frac{\overline{P_1'(\sqrt{m})}}{\zeta - \sqrt{m}} + \frac{\overline{P_1'(-\sqrt{m})}}{\zeta + \sqrt{m}}\right) + \\ + \overline{P}_2\left(\frac{R_2^2}{\zeta}\right) + Q_1(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu \zeta + \delta_0 \tag{8}$$

Заменим в (5) ζ на $\overline{\zeta}^{-1}$ и перейдем к сопряженным величинам. Тогда получим

$$P_1(\zeta) - c_0 + \frac{(1+m^2)\zeta}{2}\left(\frac{\overline{P_1'(\sqrt{m})}}{1 - \sqrt{m}\zeta} + \frac{\overline{P_1'(-\sqrt{m})}}{1 + \zeta\sqrt{m}}\right) + \\ + \frac{\zeta^2 + m}{\zeta(1 - m\zeta^2)} \overline{P}_2'\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \overline{Q}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\beta}_k \zeta^k \tag{9}$$

Формула (9) справедлива всюду внутри γ_1, т. е. при $|\zeta| \leqslant 1$. Заменим в ней ζ на $R_2^2\bar{\zeta}^{-1}$ и, взяв сопряженные величины, будем иметь

$$\bar{P}_1\left(\frac{R_2^2}{\zeta}\right) - \bar{c}_0 + \frac{(1+m^2)R_2^2}{2}\left(\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta - R_2^2\sqrt{m}} + \frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta + R_2^2\sqrt{m}}\right) +$$

$$+ \frac{\zeta(R_2^4 + m\zeta^2)}{R_2^2(\zeta^2 - mR_2^4)} P_2'\left(\frac{\zeta}{R_2^2}\right) + Q_2\left(\frac{\zeta}{R_2^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k R_2^{2k}\zeta^{-k} \tag{10}$$

Вычитая из (6) равенство (10), а из (8) равенство (7), получим

$$\frac{R_2^4 + m^2}{2R_2^2}\left[\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta - \sqrt{m}} + \frac{R_1'(\sqrt{m})}{\zeta + \sqrt{m}}\right] - \frac{(1+m^2)R_2^2}{2}\left[\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta - R_2^2\sqrt{m}} + \frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta + R_2^2\sqrt{m}}\right] +$$

$$+ \frac{\zeta(R_2^4 + m\zeta^2)}{R_2^2(\zeta^2 - m)} P_2'(\zeta) - \frac{\zeta(R_2^4 + m\zeta^2)}{R_2^2(\zeta - mR_2^4)} P_2'\left(\frac{\zeta}{R_2^2}\right) + Q_2(\zeta) - Q_2\left(\frac{\zeta}{R_2^2}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k - R_2^{2k}\beta_k)\zeta^{-k} \tag{11}$$

$$\frac{(1-R_2^2)(R_2^2 - m)}{2R_2^2}\left[\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta - \sqrt{m}} + \frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta + \sqrt{m}}\right] - \frac{(1-R_2^2)\zeta(R_2^2 - m\zeta^2)}{R_2^2(\zeta^2 - m)} P_1'(\zeta) +$$

$$+ \bar{P}_2\left(\frac{R_2^2}{\zeta}\right) - \bar{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_k - \alpha_k)\zeta^k + \delta_0 \tag{12}$$

Каждое слагаемое левой части равенства (11) представляет функцию переменной ζ, регулярную вне γ_2, включая и бесконечно удаленную точку. Кроме того, каждая из этих слагаемых стремится к нулю, когда $\zeta \to \infty$. Поэтому каждое из них разлагается в ряд по отрицательным степеням ζ.

Выполнив это разложение, найдем, что

$$\frac{(R_2^4 + m^2)}{2R_2^2}\left[\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta - \sqrt{m}} + \frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta + \sqrt{m}}\right] - \frac{(1+m^2)R_2^2}{2}\left[\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta - R_2^2\sqrt{m}} + \frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta + R_2^2\sqrt{m}}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [P_1'(\sqrt{m}) + P_1'(-\sqrt{m})(-k)^{k-1}]\, l_k\zeta^{-k} \tag{13}$$

где

$$l_k = \left(\frac{R_2^4 + m^2}{2R_2^2} - \frac{(1+m^2)R_2^{2k}}{2}\right)(\sqrt{m})^{k-1} \qquad (k = 1, 2; \ldots) \tag{14}$$

$$\frac{\zeta(R_2^4 + m\zeta^2)}{R_2^2(\zeta^2 - m)} P_2'(\zeta) - \frac{\zeta(R_2^4 + m\zeta^2)}{R_2^2(\zeta^2 - mR_2^4)} P_2'\left(\frac{\zeta}{R_2^2}\right) = -m\sum_{k=1}^{\infty} ka_k \frac{1 - R_2^{2(k+1)}}{R_2^2}\frac{1}{\zeta^k} -$$

$$- \sum_{s=3}^{\infty}\left[\frac{R_2^4 + m^2 - (1+m^2)R_2^{2(s+1)}}{2R_2^2}\sum_{\nu=1}^{1/2(s-1)} (s - 2\nu)a_{s-2\nu}m^{\nu-1}\right]\frac{1}{\zeta^s} \tag{15}$$

Наконец, на основании (3) имеем

$$Q_2(\zeta) - Q_2\left(\frac{\zeta}{R_1^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - R_2^{2k})\, b_k\frac{1}{\zeta^k} \tag{16}$$

Таким образом, равенство (11) легко приводится к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[P_1'(\sqrt{m})+P_1'(-\sqrt{m})\,(-1)^{k-1}\right]l_k\frac{1}{\zeta^k}-m\sum_{k=1}^{\infty}ka_k\frac{1-R_2^{2(k+1)}}{R_2^2}\frac{1}{\zeta^k}-$$

$$-\sum_{k=3}^{\infty}\left[\frac{R_2^4+m^2-(1+m^2)R_2^{2(k+1)}}{2R_2^2}\sum_{\nu=1}^{1/2(k-1)}(k-2\nu)\,a_{k-2\nu}m^{\nu-1}\right]\frac{1}{\zeta^k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(1-R_2^{2k})\,b_k\frac{1}{\zeta^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k-R^{2k}\beta_k)\frac{1}{\zeta^k} \tag{17}$$

Аналогично записывается в виде ряда по положительным степеням ζ и левая часть равенства (12), слагаемые которой — регулярные функции в окрестности нуля:

$$-\frac{(1-R_2^2)\,(R_2^2-m^2)}{2R_2^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[P_1'(-\sqrt{m})-P_1'(-\sqrt{m})\,(-1)^{\nu-2}\right]\frac{\zeta^{\nu-1}}{(\sqrt{m})^{\nu}}+$$

$$+\frac{1-R_2^2}{m}\sum_{k=1}^{\infty}kc_k\zeta^k+\frac{(1-R_2^2)\,(R_2^2-m^2)}{2R_2^2}\sum_{k=3}^{\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{1/2(k-1)}(k-2\nu)\,c_{k-2\nu}\frac{1}{m^{\nu+1}}\right]\zeta^k+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-R_2^{2k}}{R_2^{2k}}\,a_k\zeta^k=\sum_{k=1}^{\infty}(\delta_k-\alpha_k)\,\zeta^k+\delta_0 \tag{18}$$

Коэффициенты c_ν функции $P_1(\zeta)$, которые входят в равенство (18), легко определяются из (9), если каждое слагаемое левой части заменить соответствующим рядом по положительным степеням ζ.

Выполнив это разложение, из (9) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\zeta^k=-\frac{1+m^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\overline{P_1'(\sqrt{m})}+(-1)^{k-1}\overline{P_1'(-\sqrt{m})}\right](\sqrt{m})^{k-1}\zeta^k+$$

$$+m\sum_{k=1}^{\infty}k\bar{a}_k\zeta^k+(1+m^2)\sum_{k=3}^{\infty}\left[\sum_{\nu=1}^{1/2(k-1)}(k-2\nu)\,m^{\nu-1}\bar{a}_{k-2\nu}\right]\zeta^k-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\bar{b}_k\zeta^k+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\beta}_k\zeta^k$$

Отсюда

$$c_1=m\bar{a}_1-\bar{b}_1-\frac{1+m^2}{2}\,[\overline{P_1'(\sqrt{m})}+\overline{P_1'(-\sqrt{m})}]+\bar{\beta}_1$$

$$c_2=2m\bar{a}_2-\bar{b}_2-\frac{(1+m^2)\sqrt{m}}{2}\,[\overline{P_1'(\sqrt{m})}-\overline{P_1'(-\sqrt{m})}]+\bar{\beta}_2$$

$$c_k=mk\bar{a}_k-\bar{b}_k-\frac{(1+m^2)\,(\sqrt{m})^{k-1}}{2}\,[\overline{P_1'(\sqrt{m})}+\overline{P_1'(-\sqrt{m})}\,(-1)^{k-1}]+$$

$$+(1+m^2)\sum_{\nu=1}^{1/2(k-1)}(k-2\nu)\,m^{\nu-1}+\bar{\beta}_k \qquad (k=3,\,4,\,\ldots) \tag{19}$$

Равенства (17) и (18) вместе с (19) и решают поставленную задачу.

Действительно, сравнивая коэффициенты в (17) при одинаковых степенях ζ, получим

$$m(1-R_2^4)a_1-(1-R_2^4)R_2^2 b_1 = \\ = l_1[P_1'(\sqrt{m})+P_1'(-\sqrt{m})]R_2^2-R_2^2(\gamma_1-R_2^2\beta_1)$$

$$2m(1-R_2^6)a_2-(1-R_2^4)R_2^2 b_2=l_2[P_1'(\sqrt{m})-P_1'(-\sqrt{m})]R_2^2-R_2^2(\gamma_2-R_2^4\beta_2)$$

. . . .

$$km(1-R_2^{2(k+1)})a_k-(1-R_2^{2k})R_2^2 b_k+\mu_k R_2^2\sum_{\nu=1}^{1/2(k-1)}(k-2\nu)a_{k-2\nu}m^{\nu-1}= \\ = l_k[P_1'(\sqrt{m})+P_1'(-\sqrt{m})(-1)^{k-1}]R_2^2-R_2^2(\gamma_k-R_2^{2k}\beta_k) \qquad (20)$$

где

$$\mu_k=\frac{(R_2^4+m^2)-(1+m^2)R_2^{2(k+1)}}{2R_2^2} \qquad (k=3,4,5,\dots)$$

Сравнение в (18) свободных членов дает

$$\delta_0=\frac{\lambda}{\sqrt{m}}[P_1'\sqrt{m})-P_1'(-\sqrt{m}) \qquad \left(\lambda=\frac{(1-R_2^2)(R_2^2-m^2)}{2R_2^2}\right) \qquad (21)$$

Сравнение коэффициентов в этом же равенстве при одинаковых степенях ζ дает вторую совокупность уравнений относительно a_k и b_k:

$$\frac{1-R_2^2}{m}c_1+\frac{1-R_2^2}{R_2^2}\bar{a}_1=\frac{\lambda}{m}[P_1'(\sqrt{m})+P_1'(-\sqrt{m})]+\delta_1-\alpha_1$$

$$\frac{2(1-R_2^2)}{m}c_2+\frac{1-R_2^4}{R_2^4}\bar{a}_2=\frac{\lambda}{(\sqrt{m})^3}[P_1'(\sqrt{m})-P_1'(-\sqrt{m})+\delta_2-\alpha_2$$

$$\frac{(1-R_2^2)k}{m}c_k+\frac{1-R_2^{2k}}{R_2^{2k}}\bar{a}_k+\lambda\sum_{\nu=1}^{1/2(k-1)}(k-2\nu)c_{k-2\nu}\frac{1}{m^{\nu+1}}= \\ =\frac{\lambda}{(\sqrt{m})^{k+1}}[P_1'(\sqrt{m})-P_1'(-\sqrt{m})(-1)^k]+\delta_k-\alpha_k \qquad (k=3,4,\dots) \qquad (22)$$

где c_k определяется из (19). Подставим в первое уравнение (22) вместо c_1 его выражение из (19) и перейдем к сопряженному значению. Тогда получим

$$m(1-R_2^4)a_1-(1-R_2^2)R_2^2 b_1=\lambda R_2^2[\overline{P_1'(\sqrt{m})}+\overline{P_1'(-\sqrt{m})}]+ \\ +\frac{(1-R_2^2)(1+m^2)R_2^2}{2}[P_1'(\sqrt{m})+P_1'(-\sqrt{m})]- \\ -(1-R_2^2)R_2^2\beta_1+R_2^2 m(\delta_1-\alpha_1) \qquad (23)$$

Из равенства правых частей уравнения (23) и первого из совокупности уравнений (20) следует, что

$$\lambda R_2^2[P_1'(\sqrt{m})+P_1'(-\sqrt{m})+\overline{P_1'(\sqrt{m})}+\overline{P_1'(-\sqrt{m})}]= \\ =R_2^2(\beta_1+m\bar{a}_2)-R_2^2(\gamma_1+m\delta_1) \qquad (24)$$

Из вещественности левой части (24) следует, что правая часть должна быть тоже вещественной, а это, как уже отмечалось, будет иметь место, если главный момент равен нулю.

Таким образом, из первого уравнения (20) и уравнения (23) определяется только b_1 через a_1 и $P_1'(\sqrt{m}) + P_1'(-\sqrt{m})$:

$$b_1 = \frac{(1+R_2^2)\, m a_1}{R_2^2} + \frac{R_2(\gamma_1 - R_2\beta_1)}{1 - R_2^2} - \frac{m^2(1+R_2^2)}{2R_2^2}\left[P_1'(\sqrt{m}) + P_1'(-\sqrt{m})\right]$$

Из третьих уравнений (20) и (22) определяются a_3 и b_3 и т. д.

Все коэффициенты функций P_2 и Q_2 с нечетными индексами будут линейным образом зависеть от a_1 и $P_1'(\sqrt{m}) + P_1(-\sqrt{m})$:

$$\begin{aligned} a_{2\nu+1} &= h_{2\nu+1} + g_{2\nu+1} a_1 + f_{2\nu+1}\left[P_1(\sqrt{m}) + P_1'(-\sqrt{m})\right] \\ b_{2\nu+1} &= h'_{2\nu+1} + g'_{2\nu+1} a_1 + f'_{2\nu+1}\left[P_1'(\sqrt{m}) + P_1'(-\sqrt{m})\right] \end{aligned} \tag{25}$$

Коэффициенты же с четными индексами, определенные из соответствующих уравнений (20) и (22), будут зависеть от разностей $P_1'(\sqrt{m}) - P_1'(-\sqrt{m})$ и $\overline{P_1'(\sqrt{m})} - \overline{P_1'(-\sqrt{m})}$ линейно:

$$\begin{aligned} a_{2\nu} &= h_{2\nu} + g_{2\nu}\left[P_1'(\sqrt{m}) - P_1'(-\sqrt{m})\right] + f_{2\nu}\left[\overline{P_1'\sqrt{m})} - \overline{P_1'(-\sqrt{m})}\right] \\ b_{2\nu} &= h_{2\nu}' + g_{2\nu}'\left[P_1'(\sqrt{m}) - P_1'(-\sqrt{m})\right] + f_{2\nu}'\left[\overline{P_1'\sqrt{m})} - \overline{P_1'(-\sqrt{m})}\right] \end{aligned} \tag{26}$$

где все h, g, f и h', g', f' — известные числа.

Пусть для заданной степени точности вычислений достаточно удержать j коэффициентов функции P_2 и n коэффициентов функции Q_2. Дифференцируя (9) по ζ и удерживая указанное число коэффициентов в функциях P_2 и Q_2, получим

$$\begin{aligned} P_1'(\zeta) = {} & \frac{m\zeta^4 + (1+3m^2)\zeta^2 - m}{\zeta^2(1-m\zeta^2)^2} \sum_{\nu=1}^{j} \nu \bar{a}_\nu \zeta^{\nu+1} + \frac{\zeta^2+m}{\zeta(1-m\zeta^2)} \sum_{\nu=1}^{j} \nu(\nu+1)\bar{a}_\nu \zeta^\nu - \\ & - \sum_{\nu=1}^{n} \nu b_\nu \zeta^{\nu-1} - \frac{1+m^2}{2}\left[\frac{\overline{P_1'(\sqrt{m})}}{(1-\sqrt{m}\,\zeta)^2} + \frac{\overline{P_1'(-\sqrt{m})}}{(1+\sqrt{m}\,\zeta)^2}\right] \end{aligned} \tag{27}$$

Положим в (27) последовательно $\zeta = \sqrt{m}$ и $\zeta = -\sqrt{m}$ и подставим вместо a и b соответствующие значения из (25) и (26); правые и левые части вновь полученных равенств почленно сложим и вычтем одно из другого. Тогда получим два уравнения вида

$$\begin{aligned} x &= H_{jn} + g_{jn} a_1 + F_{jn} x + \varepsilon_{jn} y + D_{jn}\bar{y} \\ y &= H_{jn}' + g_{jn}' a_1 + F_{jn}' x + \varepsilon_{jn}' y + D_{jn}'\bar{y} \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$x = P_1'(\sqrt{m}) + P_1'(-\sqrt{m}), \qquad y = P_1'(\sqrt{m}) - P_1'(-\sqrt{m})$$

Недостающие уравнения для определения величин x, y, $\bar{y}$ и a_1 получим из (28), перейдя в этих равенствах к сопряженным значениям, учитывая при этом равенство (24), позволяющее определить величину $\bar{x}$ через x, и то, что величина a_1 — вещественная вследствие равенства нулю главного момента.

Из полученных таким образом четырех уравнений определяются четыре неизвестных x, y, $\bar{y}$ и a_1.

С определением этих величин определяются коэффициенты a_ν, b_ν и потом, как это следует из (8) и (10), коэффициенты e_ν, d_ν. Величины e_ν, a_ν, d_ν, b_ν при безграничном увеличении индекса ν стремятся к нулю, как коэффициенты разложения голоморфных функций, поэтому правые части уравнений (22) и (23) могут быть практически взяты равными нулю, если ν достаточно велико. После этого из уравнений (22), (23) можно определить величины a_1, x, y, $\bar{y}$. Полученные значения величин a_1, x, y, $\bar{y}$ должны при этом в пределе принятой точности расчета совпадать со значением этих величин, определенных из уравнений, вытекающих из (27). Если это равенство на самом деле имеет место, то количество членов f и n функций P_2 и Q_2 в (24) взято достаточно.

Рассмотрим в качестве примера равновесие эллиптического кольца, внешний контур которого подвержен равномерному давлению p, а внутренний контур свободен от усилий; в этом случае

$$f_2(\sigma_2) = 0, \qquad f_1(\sigma_1) = Ap\left(\frac{1}{\sigma_1} + m\sigma_1\right)$$

В разложении (5) $\alpha_1 = Apm$, $\beta_1 = Ap$, а все остальные коэффициенты $\alpha_\nu = \beta_\nu = 0$ ($\nu = 2, 3, 4, \ldots$) и $\gamma_k = \delta_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) равны нулю. Кроме того, в рассматриваемом примере

$$P_1'(\sqrt{m}) = P_1'(-\sqrt{m}), \qquad P_1'(\sqrt{m}) = \overline{P_1'(-\sqrt{m})} \tag{29}$$

Первое из равенств справедливо потому, что напряженное состояние кольца симметрично относительно осей координат, второе — вследствие того, что все α_ν, β_ν, δ_ν, γ_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) действительны, а следовательно, будут действительными и все коэффициенты функций P_1, Q_1, P_2, Q_2. Постоянная δ_0 на основании (21) и (26) равна нулю.

После изложенных выше замечаний из (24) имеем

$$P_1'(\sqrt{m}) = \frac{R_2^2 AP(1 + m^2)}{2(1 - R_2^2)(R_2^2 - m^2)}$$

Теперь видно, что коэффициенты a_ν ($\nu = 2, 3, \ldots$) и b_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) с нечетными индексами ν, как это следует из (29), будут линейным образом зависеть только от a_1, те же коэффициенты с четными индексами равны нулю.

Нами вычислены напряжения в отдельных точках кольца по сечениям $\vartheta = {}^1/_2\pi$ и $\vartheta = 0$. Результаты вычисления приведены в табл. 1.

Таблица 1

Точка	$\vartheta = 0$		$\vartheta = {}^1/_2\pi$	
	σ_r / p	σ_ϑ / p	σ_r / p	σ_ϑ / p
A	—1.00	+2.27	—0.98	—6.28
B	0.00	—23.6	0.00	+4.03

Вычисления выполнены для эллиптического кольца (фиг. 1), у которого отношение больших полуосей a_2 к a_1 конфокальных эллипсов L_2 и L_1 равно ${}^3/_4$, а отношение полуосей b_2 / a_2 внутреннего эллипса L_2 равно ${}^1/_3$.

Поступила 20 VI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Timpe A. Die Airysche Funktion für den Ellipsenring. Math. Zeitschrift, 1923. Bd. 52.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.
3. Шереметьев М. П. Влияние упругого кольца, впаянного в криволинейное отверстие, на однородное напряженное плоское поле. Украинский математ. журнал, № 3, 1949.