Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XVI, 1952

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ МЕХАНИКИ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ [1]

В. В. Добронравов

§ 1. О перестановочности операций дифференцирования и варьирования. Для голономной механической системы из n точек, совокупность координат которых x^i $(i = 1, 2, \ldots 3_n)$ образует голономное многообразие A_{3n}, имеют место соотношения

$$d\delta x^i - \delta dx^i = 0 \tag{1}$$

При наличии в системе неголономных связей вида

$$\sum_{j=1}^{3n} a_j{}^k \, dx^j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots l) \tag{2}$$

соотношения (1) не могут выполняться для всех координат. Но ряд авторов и в этом случае принимает справедливость соотношений (1) для независимых координат. Из числа этих авторов следует в первую очередь указать Г. К. Суслова, который в своем известном руководстве [2] по теоретической механике приводит это допущение. На базе подобного допущения и получаются те соотношения Вольтерры, которые применяются для вывода уравнений движения неголономных механических систем типа Вольтерры.

Действительно, выражая сначала независимые дифференциалы и вариации декартовых координат через некоторые новые независимые «кинематические характеристики p^s» (по терминологии Вольтерры) [3], где $s = 1, 2, \ldots, m = 3n - l$, а затем по уравнениям неголономных связей и все остальные дифференциалы, будем иметь

$$\frac{dx^\nu}{dt} = \sum_{s=1}^{m} x_s{}^\nu p^s \text{ и } \delta x^\nu = \sum_{s=1}^{m} x_s{}^\nu \delta\omega^s \tag{3}$$

Далее, в первых m равенствах в (3), т. е. для независимых x^ν, Вольтерра полагает

$$\frac{d}{dt}\delta x^\nu = \delta \frac{dx^\nu}{dt}$$

для того, чтобы получить выражение билинейного ковариантa

$$\delta p^s - \frac{d}{dt}\delta\omega^s = \sum_{h=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} a_{hr}{}^s \, p^h \, \delta\omega^r \tag{4}$$

Соотношения, подобные (4) и выводимые аналогичным образом, можно встретить у ряда авторов: В. В. Вагнера [4], З. Горака и др. Горак в своей работе [5]

---

[1] См. статью Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева [1] в ПММ, т. XV, вып. 5, 1951,

соглашается с допущением Г. К. Суслова о переместимости варьирования и дифференцирования для независимых координат.

Также Вундгейлер в одной из своих работ [6], рассматривая неголономное многообразие A_n^m как совокупность локальных m направлений в некотором n-мерном аффинном пространстве A_n, принимает перестановочность двух операций δ и $\overline{\delta}$ в A_n вообще и выводит по существу формулу, аналогичную формуле (4) Вольтерры для δ и $\overline{\delta}$, примененных к вектору из A_n^m.

Наконец, следует отметить, что для «замкнутых неголономных систем», каковыми мы называем в нашей работе такие системы, для которых коэффициенты уравнений связей, коэффициенты живой силы и силовая функция активных сил не зависят от зависимых координат, условия $\delta dx^i = d\delta x^i$ для независимых координат очевидны хотя бы потому, что уравнения движения системы распадаются на две группы: 1) уравнения движения для независимых координат в замкнутом голономном подпространстве m измерений для независимых координат и 2) уравнения связей, через которые определяются зависимые координаты.

§ 2. О применимости уравнений типа Вольтерры к системам с неголономными связями. Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев все же признают, что уравнения самого Вольтерры справедливы и применимы к системам с неголономными связями, но объясняют это «случайностью»; подобная аргументация нам кажется весьма странной.

Никакой случайности здесь, конечно, нет, так как вывод уравнений базируется не на ошибочном положении $\delta dx^i - d\delta x^i = 0$. Никакими несовместными соотношениями Вольтерра не пользуется; нет несовместности и в примере, указанном Ю. И. Неймарком и Н. А. Фуфаевым, так как для независимых координат билинейный ковариант равен нулю, а для зависимых координат он выражается через дифференциалы независимых.

В нашей работе [7] мы привели вывод уравнений движения неголономных механических систем методом Вольтерры с тем только отличием: уравнения самого Вольтерры выведены при помощи перехода от декартовых координат к неголономным координатам; таким образом, в уравнениях Вольтерры под знаки производных входят неголономные координаты, а коэффициенты уравнений суть функции непосредственно декартовых координат.

Мы же при выводе уравнений движения переходим к неголономным координатам от обобщенных лагранжевых координат системы; в наших уравнених коэффициенты уравнений зависят от обобщенных координат.

Почему же, спрашивается, уравнения Вольтерры верны и для неголономных систем, а уравнения, полученные нами, применимы, как утверждают Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев, только к голономным системам?

§ 3. Уравнения неголономных связей и процесс вывода уравнений движения. Вопрос о том, в каком месте процесса вывода уравнений движения неголономных систем принимать во внимание уравнения неголономных связей, очень важен.

Некоторые авторы при выводе уравнений движения принимают уравнения неголономных связей в начале вывода, т. е. после написания общего уравнения динамики

$$\sum_{\nu=1}^{3n} (- m_\nu \ddot{x}^\nu + F_{\nu x}) \delta x^\nu = 0 \tag{5}$$

Они выражают вариации зависимых координат через вариации независимых из уравнений связей и подставляют в (5). Так поступают, например, Аппелль, Вольтерра и др.

В известных уравнениях Аппелля энергия ускорения, фигурирующая в них, уже выражена через вторые производные от независимых координат. В уравнения Вольтерры входит живая сила, тоже преобразованная с учетом уравнений связей.

Некоторые же авторы принимают во внимание неголономные связи на позднейшем этапе вывода уравнений движения. Так, например, С. А. Чаплыгин[8] при выводе уравнений движения сначала преобразует уравнение (5) к виду

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial T}{\partial q^i}-Q_i\right)\delta q^i=0 \tag{6}$$

не принимая во внимание уравнений связей, и только после этого выражает зависимые δq^k через независимые из уравнения связей. В результате в уравнениях С. А. Чаплыгина остается частично живая сила, не преобразованная с учетом уравнений связей.

Гамель [10] принимает во внимание уравнения связей еще на более позднем этапе вывода, и в его уравнениях полностью фигурирует непреобразованная живая сила. В общем случае любых неголономных систем с линейными связями не гарантирована идентичность составляемых различными методами уравнений.

Для уничтожения подобного возможного различия мы предложили метод перехода к нормальным неголономным координатам, т. е. к таким, в которых живая сила системы будет представлять каноническую квадратичную форму вида

$$2T=\sum_{i=1}^{n}A_i\,(\dot{\pi}^i)^2 \qquad (A_i=\mathrm{const})$$

В этом случае выражения $\partial T / \partial \dot{\pi}^i = p_i$ (импульсы) в неголономных координатах не будут зависеть от того, когда принимаются во внимание неголономные связи: до дифференцирования по $\dot{\pi}^i$ или после (при условии, что связи в неголономных координатах выражаются в виде $\dot{\pi}^{m+1}=\dot{\pi}^{m+2}=\ldots\dot{\pi}^{m+l}=0$). Эффективность этого метода признают Ю. И. Неймарк и Н. А. Фуфаев.

Переходим теперь к разработанному в наших работах обобщению метода Якоби на неголономные системы.

§ 4. Обобщение метода Якоби на случай неголономных механических систем. В ряде работ мы показали, что теорема Гамильтона-Якоби обобщается в неголономных координатах для голономных систем, а также и для тех систем с неголономными связями, которые мы называли выше замкнутыми неголономными системами.

Это вытекает из того, что система операторов $\partial F / \partial \pi^i$, выражающих производные по неголономным координатам, должна быть замкнутой в том смысле, что должна удовлетворять одному из условий С. Ли

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \pi^i \partial \pi^j}-\frac{\partial^2 F}{\partial \pi^j \partial \pi^i}=\gamma_{ij}^{\ \ k}\frac{\partial F}{\partial \pi^k} \tag{7}$$

В замкнутых неголономных системах это соотношение удовлетворяется, так как для составления операторов $\partial F / \partial \pi^i$ в этом случае возможно пользоваться квадратной матрицей коэффициентов $\beta_j^{\,i}$, вырезаемой из прямоугольной матрицы коэффициентов в формулах, выражающих голономные скорости через неголономные:

$$\dot{q}^i=\sum_{j=1}^{m}\beta_j^{\,i}\dot{\pi}^j \qquad \left(\begin{matrix}\dot{\pi}^{m+1}=\dot{\pi}^{m+2}=\ldots\dot{\pi}^{n}=0\\ =1,\,2,\,\ldots,\,n\end{matrix}\right)$$

а число импульсов в функции Гамильтона будет равно числу исходных независимых лагранжевых координат q^k $(k=1,\ldots,m)$, явно входящих в уравнения.

Первый пример (задача С. А. Чаплыгина и Каратеодори), приводимый в статье Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева, не удовлетворяет условиям замкнутости, так как уравнение связей одно, а циклических лагранжевых координат две, а следовательно, метод Якоби к нему не применим.

В первоначальной нашей заметке [9] по данному вопросу, где упоминалась вскользь эта задача, предполагалось применение метода Якоби с учетом дополнительной связи постоянства угловой скорости, вытекающей из того факта, что реакция основной связи, перпендикулярная к плоскости колесика, проходит через центр тяжести системы.

Второй пример, относящийся к катанию однородной сферы по плоскости, удовлетворяет всем условиям нашей теоремы, и метод Якоби в нем вполне проходит. Утверждения Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева об ошибке в этом примере основаны на том, что они не заметили опечатки в выражении полного интеграла, в котором недостает одной константы [1].

---

[1] Вскоре после опубликования неоднократно цитировавшейся здесь статьи Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева [1] эти авторы обратились в редакцию с письмом по поводу первоначально не замеченной ими опечатки в статье В. В. Добронравова.

Редакция журнала ПММ не опубликовала этого письма, полагая, что исправление этой опечатки принципиального научного значения не имеет.

Так как в своем ответе В. В. Добронравов затронул вновь этот вопрос, редакция журнала ПММ считает необходимым опубликовать соответствующее замечание из письма Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева от 18 XII 1951 г.

«В связи с тем, что в найденном В. В. Добронравовым полном интеграле задачи о качении шара по плоскости содержится опечатка, не замеченная авторами и введшая их в заблуждение, приведенное ими в конце заметки доказательство неправильности решения теряет силу.

Исправленный полный интеграл имеет вид:

$$V = -\frac{ht}{2A^2} + a_1\varphi + a_3\psi + $$
$$+\int\sqrt{h\sin^2\theta - a_3{}^2(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta) + 2a_1a_3\cos\theta - a_1{}^2}\,\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

и не приводит к указанному в заметке противоречию. Однако и он не дает правильного решения рассматриваемой неголономной задачи, так как определяемые им согласно В. В. Добронравову обобщенные импульсы удовлетворяют уравнениям

$$\dot p_1 = \frac{1-\lambda}{A^2}p_2p_3, \qquad \dot p_2 = -\frac{1-\lambda}{A^2}p_1p_3, \qquad \dot p_3 = 0$$

получаемым дифференцированием общего решения и исключением произвольных постоянных. Из этих уравнений следует, что

$$p_1 = a\sin\omega t + b\cos\omega t, \qquad p_2 = a\cos\omega t - b\sin\omega t, \qquad p_3 = c$$

где a, b, c — произвольные постоянные и $\omega = (1-\lambda)c/A^2$. Это неверно, так как для свободно катящегося однородного шара не только p_3, но и p_1 и p_2 постоянны (p_1 и p_2 с точностью до постоянных множителей являются проекциями угловой скорости шара на декартовы оси, параллельные плоскости качения).

Отметим, что В. В. Добронравов фактически получил уравнение в частных производных (а следовательно, и решение) не задачи о качении однородного шара, а задачи о движении волчка Эйлера с главными моментами инерции A^2, A^2 и k^2. Действительно, направим оси ξ, η, ζ по главным осям инерции волчка, а оси x, y, z будем считать неподвижными (см., например, Н. Н. Бухгольц. Основной курс теоретической механики, ч. 2, стр. 102), тогда кинетическая энергия волчка будет:

$$T = \tfrac{1}{2}\{A^2p'^2 + A^2q'^2 + k^2r'^2\}$$

Выражение, которое эти авторы обозначили через S, надо писать так:

$$S = \sqrt{h \sin^2 \theta - a_3^2 (\cos^2 \theta + \lambda \sin^2 \theta) + 2a_1 a_3 \cos \theta - a_1^2}$$

А тогда все дальнейшие выкладки в заметке этих авторов несостоятельны, так как получится

$$r = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = \text{const} = \frac{a_3}{k^2}$$

Поступила 29 VI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Об ошибке В. Гольтерры при выводе уравнений движения неголономных механических систем. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 5.
2. Суслов Г. К. Теоретическая механика. Стр. 597. Изд. 3. 1946.
3. Volterra V. Atti dell' Acc. di Torino. T. XXXIII. P. 451—475. 1898.
4. Вагнер В. В. Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия. Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ. Вып. V. Стр. 171. 1941.
5. Norak Z. Mécanique absolue et sa répésentation dans l'espace-temps des configurations. Prace mat.-fiz. Warszawa. 42, 69—107. 1934.
6. Wundheiler A. W. Über die Variationsgleichungen für affine geodätische Linien und nichtholonome, nichtkonservative dynamische Systeme. Prace mat.-fiz., Warszawa. 38, 129—147. 1931.
7. Добронравов В. В. Аналитическая динамика в неголономных координатах. Уч. записки МГУ. Вып. 122. Т. II (механика). 1948.
8. Чаплыгин С. А. Собрание сочинений. Т. 1. 1934.
9. Добронравов В. В. Обобщение теоремы Гамильтона-Якоби на случай квазикоординат. ДАН СССР. 1939. Т. XXII. № 8.
10. Hamel G. Die virtuelle Verschibungen in der analitischen Mechanik. Math. Annalen. Bd. 56. 1905.

или, пользуясь известными формулами [см. Н. Н. Бухгольц, стр. 103, формула (48)], находим, что

$$T = \frac{1}{2}\left\{A^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + k^2 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2\right\}$$

и

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{A^2 \sin^2\theta} p_\varphi^2 + \left(\frac{\cos^2 \theta}{A^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{k^2}\right) p_\psi^2 + \frac{1}{A^2} p_\theta^2 - \frac{2\cos\theta}{A^2 \sin^2\theta} p_\varphi p_\psi\right\}$$

Составляем уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{A^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{ctg}^2 \theta}{A^2} + \frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 + \frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{2\cos\theta}{A^2 \sin^2\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\partial V}{\partial \psi}\right\} = 0$$

которое, как нетрудно убедиться, совпадает с уравнением (78) работы В. В. Добронравова».

От редакции